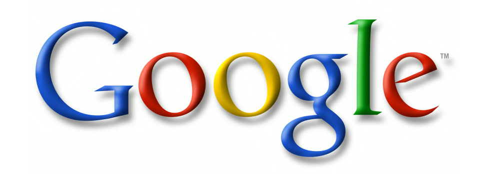
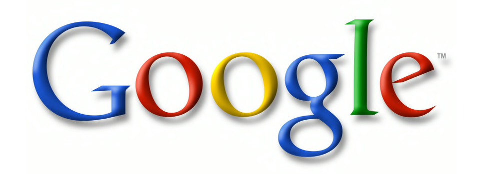





Stanford University Libraries
3 6105 000 993 514

# Journal

für die

# reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

---

Als Fortsetzung des von

**A. L. Crelle**

gegründeten Journals

herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

**Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass**

von

**C. W. Borchardt.**

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

---

## Neunzigster Band.

In vier Heften.

Mit zwei Figurentafeln.

---

Berlin, 1881.

Druck und Verlag von G. Reimer.

## Inhaltsverzeichniss des neunzigsten Bandes.

---

---

## Druckfehler.

Seite 22 Zeile 8 von unten statt $J_3-2J_2\lambda+J_1\lambda^2$ lese man $J_3+2J_2\lambda+J_1\lambda^2$.

- 23 - 2 - oben - $J_4-2J_2\tau_{ii}+J_3\tau_{ii}^2$ lese man $J_3+2J_2\tau_{ii}+J_3\tau_{ii}^2$.

- 24 - 15, 16, 17 von oben müssen lauten:

$$(\xi_1\partial_1+\eta_1\partial_2+\zeta_1\partial_3)(\xi_2x_1+\eta_2x_2+\zeta_2x_3)(\xi_3x_1+\eta_3x_2+\zeta_3x_3) = 0,$$
$$(\xi_2\partial_1+\eta_2\partial_2+\zeta_2\partial_3)(\xi_3x_1+\eta_3x_2+\zeta_3x_3)(\xi_1x_1+\eta_1x_2+\zeta_1x_3) = 0,$$
$$(\xi_3\partial_1+\eta_3\partial_2+\zeta_3\partial_3)(\xi_1x_1+\eta_1x_2+\zeta_1x_3)(\xi_2x_1+\eta_2x_2+\zeta_2x_3) = 0.$$

Seite 33 Zeile 3 von oben statt $0=J_3-2J_2\frac{1}{r_1}+J_1\frac{1}{r_1^2}$ lese man

$$0=J_3+2J_2\frac{1}{r_1}+J_1\frac{1}{r_1^2}\cdot$$

- 33 - 6 - - - „für $i=1$“ lese man „für $i=3$.“

Figurentafel I, Fig. 2. Auf der Geraden $A'B'$ ist statt $F$ zu lesen $J$.

---

# Ueber Relationen zwischen den Näherungsbrüchen von Potenzreihen.

(Von Herrn *G. Frobenius* in Zürich.)

---

Die Aufgabe, eine rationale Function zu bestimmen, deren Zähler und Nenner von vorgeschriebenem Grade sind, und die für möglichst viele gegebene Werthe der Variabeln einer gegebenen Function gleich ist, ist zuerst von *Cauchy* (Analyse alg. p. 528) gelöst und später ausführlicher von *Jacobi* (dieses Journ. Bd. 30, S. 127) behandelt worden, welcher Zähler und Nenner auf die verschiedensten Weisen in Determinantenform darzustellen gelehrt hat. Dagegen ist er nicht auf die Relationen eingegangen, welche zwischen mehreren solchen Brüchen bestehen, deren Zähler und Nenner von verschiedenen Graden sind. Die wichtigsten Beziehungen dieser Art will ich hier kurz zusammenstellen, mich dabei aber der Einfachheit halber auf den Fall beschränken, wo die gegebenen Werthe der Variabeln alle in einen zusammenfallen. (*Jacobi,* l. c. S. 149; vgl. auch *Kronecker,* Monatsber. d. Berliner Ak. 1878, S. 97.)

## §. 1.

### Ueber die Näherungsbrüche von Potenzreihen.

Ist eine nach aufsteigenden Potenzen der Variabeln $x$ geordnete Reihe

$$(1.)\qquad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

gegeben, so kann man zwei ganze Functionen, die nicht identisch verschwinden, und deren Grade nicht höher als $\alpha$ und $\beta$ sind,

$$T = t_0 + t_1 x + \cdots + t_\alpha x^\alpha, \quad U = u_0 + u_1 x + \cdots + u_\beta x^\beta,$$

so bestimmen, dass die Entwickelung von

$$(2.)\qquad yU - T = V$$

erst mit der $(\alpha+\beta+1)^{\text{ten}}$ Potenz von $x$ anfängt. Denn zur Bestimmung

der Coefficienten von $U$ erhält man aus der gestellten Forderung die Gleichungen

$$(3.)\qquad 0 = a_{\nu+\alpha}u_0 + a_{\nu+\alpha-1}u_1 + \cdots + a_{\nu+\alpha-\beta}u_\beta \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots\ \beta),$$

in denen, wie stets im Folgenden, $a_{-1} = a_{-2} = \cdots = 0$ zu setzen ist, und diesen $\beta$ homogenen linearen Gleichungen zwischen $\beta+1$ Unbekannten kann man stets durch Werthe derselben genügen, die nicht sämmtlich Null sind. Alsdann sind die Coefficienten von $T$

$$t_\mu = a_\mu u_0 + a_{\mu-1}u_1 + \cdots + a_0 u_\mu \qquad (\mu = 0,\ 1,\ \ldots\ \alpha).$$

Wenn die Determinanten $\beta^{\text{ten}}$ Grades, die sich aus den Coefficienten der Gleichungen (3.) bilden lassen, nicht alle verschwinden, so werden durch die entwickelten Relationen die Verhältnisse der Grössen $u_\nu$ und mithin die Functionen $T$, $U$, $V$ bis auf einen constanten Factor vollständig bestimmt. Wenn aber jene Determinanten sämmtlich Null sind, so genügen diesen Bedingungen alle linearen Verbindungen aus mehreren unabhängigen Functionen $U$, deren jeder eine Function $T$ und eine $V$ entspricht. Welche dieser Functionen $U$ man aber auch wählen mag, so sind doch die Verhältnisse $T:U:V$ immer dieselben. Denn aus zwei Gleichungen von der Form (2.), $Uy-T=V$ und $U'y-T'=V'$ folgt $TU'-T'U=UV'-U'V$. Da die Entwickelung der linken Seite dieser Gleichung nach aufsteigenden Potenzen von $x$ mit der $(\alpha+\beta)^{\text{ten}}$ Potenz endigt, die der rechten aber mit der $(\alpha+\beta+1)^{\text{ten}}$ anfängt, so sind beide Seiten derselben Null, und mithin ist $T:U:V = T':U':V'$.

Wir setzen nun

$$(4.)\qquad c_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} a_{\alpha-\beta+1} & a_{\alpha-\beta+2} & \cdots & a_\alpha \\ a_{\alpha-\beta+2} & a_{\alpha-\beta+3} & \cdots & a_{\alpha+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_\alpha & a_{\alpha+1} & \cdots & a_{\alpha+\beta-1} \end{vmatrix},$$

$$(5.)\qquad T_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} a_{\alpha-\beta+1} & a_{\alpha-\beta+2} & \cdots & a_\alpha & a_{\alpha-\beta}x^\alpha + a_{\alpha-\beta-1}x^{\alpha-1} + \cdots \\ a_{\alpha-\beta+2} & a_{\alpha-\beta+3} & \cdots & a_{\alpha+1} & a_{\alpha-\beta+1}x^\alpha + a_{\alpha-\beta}x^{\alpha-1} + \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{\alpha+1} & a_{\alpha+2} & \cdots & a_{\alpha+\beta} & a_\alpha x^\alpha + a_{\alpha-1}x^{\alpha-1} + \cdots \end{vmatrix},$$

$$(6.)\qquad U_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} a_{\alpha-\beta+1} & a_{\alpha-\beta+2} & \cdots & a_\alpha & x^\beta \\ a_{\alpha-\beta+2} & a_{\alpha-\beta+3} & \cdots & a_{\alpha+1} & x^{\beta-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{\alpha+1} & a_{\alpha+2} & \cdots & a_{\alpha+\beta} & 1 \end{vmatrix},$$

$$(7.)\qquad V_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} a_{\alpha-\beta+1} & a_{\alpha-\beta+2} & \dots & a_\alpha & a_{\alpha+1}\; x^{\alpha+\beta+1} + a_{\alpha+2}\; x^{\alpha+\beta+2} + \cdots \\ a_{\alpha-\beta+2} & a_{\alpha-\beta+3} & \dots & a_{\alpha+1} & a_{\alpha+2}\; x^{\alpha+\beta+1} + a_{\alpha+3}\; x^{\alpha+\beta+2} + \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \qquad\qquad \cdot \\ a_{\alpha+1} & a_{\alpha+2} & \dots & a_{\alpha+\beta} & a_{\alpha+\beta+1} x^{\alpha+\beta+1} + a_{\alpha+\beta+2} x^{\alpha+\beta+2} + \cdots \end{vmatrix},$$

also speciell

$$(8.)\qquad \begin{cases} T_{\alpha0} = a_\alpha x^\alpha + a_{\alpha-1} x^{\alpha-1} + \cdots + a_0, \quad V_{\alpha0} = a_{\alpha+1} x^{\alpha+1} + a_{\alpha+2} x^{\alpha+2} + \cdots, \\ U_{\alpha0} = 1, \quad U_{\alpha1} = a_\alpha - a_{\alpha+1} x, \\ c_{\alpha0} = 1, \quad c_{\alpha1} = a_\alpha, \quad c_{0\beta} = (-1)^{\frac{\beta(\beta-1)}{2}} a_0^\beta, \quad T_{0\beta} = (-1)^{\frac{\beta(\beta-1)}{2}} a_0^{\beta+1}. \end{cases}$$

Dann genügen die Functionen $T = T_{\alpha\beta}$, $U = U_{\alpha\beta}$, $V = V_{\alpha\beta}$, falls sie nicht identisch verschwinden, den oben gestellten Forderungen. Ist ferner $c_{\alpha\beta}$ von Null verschieden, so sind sie durch jene Bedingungen bis auf einen constanten Factor vollständig bestimmt *). Da für $x = 0$

$$(9.)\qquad U_{\alpha\beta}(0) = c_{\alpha\beta}, \quad T_{\alpha\beta}(0) = a_0 c_{\alpha\beta}$$

ist, so lässt sich, falls $c_{\alpha\beta} = 0$ ist, der Bruch $T_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta}$ durch $x$ heben. Ist aber $c_{\alpha\beta}$ von Null verschieden, so lässt er sich nicht durch $x$ heben und auch nicht durch eine ganze Function $u$, die für $x = 0$ nicht verschwindet. Denn sonst wäre $\frac{U_{\alpha\beta}}{u} y - \frac{T_{\alpha\beta}}{u} = \frac{V_{\alpha\beta}}{u}$, und die Entwickelung von $\frac{V_{\alpha\beta}}{u}$ nach steigenden Potenzen von $x$ würde mit $x^{\alpha+\beta+1}$ anfangen. Die ganzen Functionen $\frac{T_{\alpha\beta}}{u}$ und $\frac{U_{\alpha\beta}}{u}$ würden also den obigen Bedingungen genügen, und ebenso $\frac{T_{\alpha\beta}}{u} v$ und $\frac{U_{\alpha\beta}}{u} v$, falls $v$ eine willkürliche ganze Function von demselben Grade wie $u$ wäre. Es würde also möglich sein, den Gleichungen (3.) auf mehrere verschiedene Weisen zu genügen, und mithin müsste $c_{\alpha\beta} = 0$ sein.

*Damit der Bruch $T_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta}$ irreductibel sei, ist nothwendig und hinreichend, dass $c_{\alpha\beta}$ von Null verschieden ist.*

Da es mir vorzugsweise darauf ankommt, ein System von identischen Relationen zu entwickeln, so setze ich voraus, dass für alle in Betracht kommenden Werthe der Indices $\alpha$ und $\beta$ die Determinanten $c_{\alpha\beta}$ von Null verschieden sind. Die so erhaltenen Identitäten sind dann allgemein gültig,

*) Dasselbe gilt, wenn $c_{\alpha+1,\beta+1}$ von Null verschieden ist. Denn die $\beta+1$ Determinanten $\beta^{\text{ten}}$ Grades, die sich aus den Coefficienten der Gleichungen (3.) bilden lassen, sind die den Elementen der letzten Zeile entsprechenden Unterdeterminanten der Determinante $(\beta+1)^{\text{ten}}$ Grades $c_{\alpha+1,\beta+1}$.

falls nicht ein in ihnen vorkommender Nenner verschwindet. Für das Folgende ist noch die Bemerkung von Wichtigkeit, dass der Coefficient von

$$\begin{array}{llll} x^{\alpha} & \text{in } T_{\alpha\beta} & \text{gleich} & (-1)^{\beta} c_{\alpha,\beta+1}, \\ x^{\beta} & \text{in } U_{\alpha\beta} & \text{gleich} & (-1)^{\beta} c_{\alpha+1,\beta}, \\ x^{\alpha+\beta+1} & \text{in } V_{\alpha\beta} & \text{gleich} & c_{\alpha+1,\beta+1} \end{array}$$

ist.

## §. 2.

### Algebraische Relationen zwischen den Zählern, Nennern und Resten der Näherungsbrüche.

Setzt man

$$c_{\alpha+1,\beta} T_{\alpha-1,\beta} - c_{\alpha,\beta+1} T_{\alpha,\beta-1} = T, \quad c_{\alpha+1,\beta} U_{\alpha-1,\beta} - c_{\alpha,\beta+1} U_{\alpha,\beta-1} = U,$$
$$c_{\alpha+1,\beta} V_{\alpha-1,\beta} - c_{\alpha,\beta+1} V_{\alpha,\beta-1} = V,$$

so ist $Uy - T = V$, es sind $T$ und $U$ ganze Functionen von den Graden $\alpha$ und $\beta$, und die Entwickelung von $V$ fängt mit

$$(c_{\alpha+1,\beta} c_{\alpha,\beta+1} - c_{\alpha,\beta+1} c_{\alpha+1,\beta}) x^{\alpha+\beta} + \cdots,$$

also erst mit der $(\alpha+\beta+1)^{\text{ten}}$ Potenz von $x$ an. Daher ist $T = h T_{\alpha\beta}$, $U = h U_{\alpha\beta}$, $V = h V_{\alpha\beta}$, wo $h$ eine Constante ist. Vergleicht man in der ersten dieser drei Gleichungen die Coefficienten von $x^{\alpha}$, so findet man $h = c_{\alpha\beta}$. Es ergiebt sich also die Relation

$$c_{\alpha+1,\beta} T_{\alpha-1,\beta} - c_{\alpha,\beta+1} T_{\alpha,\beta-1} = c_{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}$$

nebst den beiden analogen, die man aus der hingesetzten erhält, indem man $T$ durch $U$ oder $V$ ersetzt. Wir werden noch mehrere Relationen entwickeln, die für die Functionen $T$, $U$, $V$ in gleicher Weise gelten, und wollen uns daher der Kürze halber des Buchstabens $S$ bedienen, um sowohl $T$ als $U$ als $V$ zu bezeichnen. Statt der drei soeben abgeleiteten Formeln schreiben wir also die eine Gleichung

$$(1.) \qquad c_{\alpha+1,\beta} S_{\alpha-1,\beta} - c_{\alpha,\beta+1} S_{\alpha,\beta-1} = c_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}.$$

Setzt man in derselben $S = U$ und $x = 0$, so erhält man die Beziehung

$$(2.) \qquad c_{\alpha+1,\beta} c_{\alpha-1,\beta} - c_{\alpha,\beta+1} c_{\alpha,\beta-1} = c^2_{\alpha\beta}.$$

Setzt man ferner

$$c_{\alpha,\beta+1} S_{\alpha+1,\beta} - c_{\alpha+1,\beta} S_{\alpha,\beta+1} = x S,$$

(wo auf der rechten Seite $T$, $U$ oder $V$ zu setzen ist, je nachdem auf der linken der entsprechende Buchstabe steht), so sind nach Formel (9.), §. 1

$T$ und $U$ *ganze* Functionen vom $\alpha^{\text{ten}}$ und $\beta^{\text{ten}}$ Grade, und die Entwickelung von $V = yU - T$ beginnt mit der $(\alpha+\beta+1)^{\text{ten}}$ Potenz von $x$. Mithin ist $S = hS_{\alpha\beta}$. Setzt man $S = U$ und vergleicht die Coefficienten von $x^{\beta+1}$, so erhält man $h = c_{\alpha+1,\beta+1}$. Man gelangt so zu der ersten (und in ähnlicher Weise zu den beiden letzten) der drei folgenden Gleichungen:

$$(3.)\quad c_{\alpha,\beta+1} S_{\alpha+1,\beta} - c_{\alpha+1,\beta} S_{\alpha,\beta+1} = c_{\alpha+1,\beta+1} x S_{\alpha\beta},$$

$$(4.)\quad c_{\alpha+1,\beta} S_{\alpha\beta} - c_{\alpha\beta} S_{\alpha+1,\beta} = c_{\alpha+1,\beta+1} x S_{\alpha,\beta-1},$$

$$(5.)\quad c_{\alpha,\beta+1} S_{\alpha\beta} - c_{\alpha\beta} S_{\alpha,\beta+1} = c_{\alpha+1,\beta+1} x S_{\alpha-1,\beta}.$$

Von den Relationen, welche sich durch Combination dieser Gleichungen ergeben, erwähne ich nur die folgenden:

$$(6.)\quad c_{\alpha\beta} c_{\alpha,\beta+1} S_{\alpha+1,\beta} - (c_{\alpha,\beta+1} c_{\alpha+1,\beta} + c_{\alpha\beta} c_{\alpha+1,\beta+1} x) S_{\alpha\beta} + c_{\alpha+1,\beta} c_{\alpha+1,\beta+1} x S_{\alpha-1,\beta} = 0,$$

$$(7.)\quad c_{\alpha\beta} c_{\alpha+1,\beta} S_{\alpha,\beta+1} - (c_{\alpha,\beta+1} c_{\alpha+1,\beta} - c_{\alpha\beta} c_{\alpha+1,\beta+1} x) S_{\alpha\beta} + c_{\alpha,\beta+1} c_{\alpha+1,\beta+1} x S_{\alpha,\beta-1} = 0,$$

$$(8.)\quad \begin{cases} c_{\alpha\beta}^2 S_{\alpha+1,\beta+1} - \big(c_{\alpha\beta} c_{\alpha+1,\beta+1} + (c_{\alpha+1,\beta+2} c_{\alpha,\beta-1} - c_{\alpha+2,\beta+1} c_{\alpha-1,\beta}) x\big) S_{\alpha\beta} \\ \qquad + c_{\alpha+1,\beta+1}^2 x^2 S_{\alpha-1,\beta-1} = 0. \end{cases}$$

Multiplicirt man die Formel (4.) mit $S_{\alpha-1,\beta}$, die Formel (5.) mit $S_{\alpha,\beta-1}$ und subtrahirt sie von einander, so erhält man unter Berücksichtigung der Gleichung (1.)

$$(9.)\quad S_{\alpha+1,\beta} S_{\alpha-1,\beta} - S_{\alpha,\beta+1} S_{\alpha,\beta-1} = S_{\alpha\beta}^2.$$

Setzt man hier $S = U$ und multiplicirt mit $y$, so ergiebt sich in Verbindung mit der Relation (2.), §. 1 die Gleichung

$$T_{\alpha+1,\beta} U_{\alpha-1,\beta} - U_{\alpha,\beta+1} T_{\alpha,\beta-1} - T_{\alpha\beta} U_{\alpha\beta} =$$
$$- V_{\alpha+1,\beta} U_{\alpha-1,\beta} + U_{\alpha,\beta+1} V_{\alpha,\beta-1} + V_{\alpha\beta} U_{\alpha\beta}.$$

Die Entwickelung der linken Seite schliesst mit der $(\alpha+\beta)^{\text{ten}}$ Potenz von $x$, während die der rechten mit $c_{\alpha,\beta+1} c_{\alpha+1,\beta} x^{\alpha+\beta}$ anfängt. So ergiebt sich die erste der vier folgenden Gleichungen

$$(10.)\quad T_{\alpha+1,\beta} U_{\alpha-1,\beta} - T_{\alpha,\beta-1} U_{\alpha,\beta-1} = T_{\alpha\beta} U_{\alpha\beta} + c_{\alpha,\beta+1} c_{\alpha+1,\beta} x^{\alpha+\beta},$$

$$(11.)\quad T_{\alpha-1,\beta} U_{\alpha+1,\beta} - T_{\alpha,\beta+1} U_{\alpha,\beta-1} = T_{\alpha\beta} U_{\alpha\beta} - c_{\alpha,\beta+1} c_{\alpha+1,\beta} x^{\alpha+\beta},$$

$$(12.)\quad T_{\alpha+1,\beta} U_{\alpha-1,\beta} - T_{\alpha,\beta+1} U_{\alpha,\beta-1} = T_{\alpha\beta} U_{\alpha\beta} + c_{\alpha\beta} c_{\alpha+1,\beta+1} x^{\alpha+\beta+1},$$

$$(13.)\quad T_{\alpha-1,\beta} U_{\alpha+1,\beta} - T_{\alpha,\beta-1} U_{\alpha,\beta+1} = T_{\alpha\beta} U_{\alpha\beta} - c_{\alpha\beta} c_{\alpha+1,\beta+1} x^{\alpha+\beta+1}.$$

Aus den beiden Relationen

$$y U_{\alpha\beta} - T_{\alpha\beta} = V_{\alpha\beta}, \quad y U_{\alpha+1,\beta} - T_{\alpha+1,\beta} = V_{\alpha+1,\beta}$$

findet man durch Elimination von $y$

$$T_{\alpha+1,\beta} U_{\alpha\beta} - T_{\alpha\beta} U_{\alpha+1,\beta} = U_{\alpha+1,\beta} V_{\alpha\beta} - U_{\alpha\beta} V_{\alpha+1,\beta}.$$

Die Entwickelung der linken Seite hört mit der $(\alpha+\beta+1)^{\text{ten}}$ Potenz von $x$ auf, während die der rechten mit $c_{\alpha+1,\beta}c_{\alpha+1,\beta+1}x^{\alpha+\beta+1}$ anfängt. So gelangt man zu der ersten der sechs folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&(14.) \quad T_{\alpha+1,\beta}U_{\alpha\beta} - T_{\alpha\beta}\,U_{\alpha+1,\beta} = c_{\alpha+1,\beta}c_{\alpha+1,\beta+1}x^{\alpha+\beta+1},\\
&(15.) \quad T_{\alpha,\beta+1}U_{\alpha\beta} - T_{\alpha\beta}\,U_{\alpha,\beta+1} = c_{\alpha,\beta+1}c_{\alpha+1,\beta+1}x^{\alpha+\beta+1},\\
&(16.) \quad T_{\alpha+1,\beta+1}U_{\alpha\beta} - T_{\alpha\beta}U_{\alpha+1,\beta+1} = c^2_{\alpha+1,\beta+1}x^{\alpha+\beta+1},\\
&(17.) \quad T_{\alpha,\beta+1}U_{\alpha+1,\beta} - T_{\alpha+1,\beta}U_{\alpha,\beta+1} = c^2_{\alpha+1,\beta+1}x^{\alpha+\beta+2},\\
&(18.) \quad T_{\alpha+1,\beta}U_{\alpha-1,\beta} - T_{\alpha-1,\beta}U_{\alpha+1,\beta} = c_{\alpha,\beta+1}c_{\alpha+1,\beta}x^{\alpha+\beta} + c_{\alpha\beta}c_{\alpha+1,\beta+1}x^{\alpha+\beta+1},\\
&(19.) \quad T_{\alpha,\beta+1}U_{\alpha,\beta-1} - T_{\alpha,\beta-1}U_{\alpha,\beta+1} = c_{\alpha,\beta+1}c_{\alpha+1,\beta}x^{\alpha+\beta} - c_{\alpha\beta}c_{\alpha+1,\beta+1}x^{\alpha+\beta+1}.
\end{aligned}$$

Aus der Gleichung (16.) ergiebt sich ein neuer Beweis für den in §. 1 abgeleiteten Satz.

## §. 3.

### Ueber die Näherungsbrüche der *Taylor*schen Reihe.

Sei $y = f(s)$ eine Function der Variabeln $s$, sei $t$ eine unbestimmte Constante, von der $y$ nicht abhängt und sei die Reihe (1.), §. 1 die Entwickelung von $y$ nach Potenzen von $x = s-t$, also

$$(1.) \qquad a_n = \frac{f^n(t)}{\Pi(n)}.$$

Bezeichnet das Operationssymbol $D$ eine Differentiation nach dem Parameter $t$, so ergiebt sich aus der Relation

$$(2.) \qquad yU_{\alpha\beta} - T_{\alpha\beta} = V_{\alpha\beta}$$

die Gleichung

$$yD\frac{U_{\alpha\beta}}{c_{\alpha+1,\beta}} - D\frac{T_{\alpha\beta}}{c_{\alpha+1,\beta}} = D\frac{V_{\alpha\beta}}{c_{\alpha+1,\beta}}.$$

Da der Coefficient von $x^\beta$ in $U_{\alpha\beta}$ gleich $(-1)^\beta c_{\alpha+1,\beta}$ ist, so ist $D\frac{U_{\alpha\beta}}{c_{\alpha+1,\beta}}$ eine ganze Function $(\beta-1)^{\text{ten}}$ Grades von $x$. Ferner ist $D\frac{T_{\alpha\beta}}{c_{\alpha+1,\beta}}$ eine ganze Function $\alpha^{\text{ten}}$ Grades, und die Entwickelung von $D\frac{V_{\alpha\beta}}{c_{\alpha+1,\beta}}$ beginnt mit der $(\alpha+\beta)^{\text{ten}}$ Potenz von $x$. Mithin ist $D\frac{S_{\alpha\beta}}{c_{\alpha+1,\beta}} = hS_{\alpha,\beta-1}$, wo $h$ eine von $s$ unabhängige Grösse ist. Setzt man $S = V$, so erhält man durch Vergleichung der Coefficienten der Anfangsglieder $h = -(\alpha+\beta+1)\frac{c_{\alpha+1,\beta+1}}{c^2_{\alpha+1,\beta}}$. Auf

diesem Wege ergiebt sich die erste *) der vier Formeln

$$(3.)\quad c^2_{\alpha+1.\beta} D \frac{S_{\alpha\beta}}{c_{\alpha+1.\beta}} = -(\alpha+\beta+1)\, c_{\alpha+1.\beta+1} S_{\alpha.\beta-1},$$

$$(4.)\quad c^2_{\alpha.\beta+1} D \frac{S_{\alpha\beta}}{c_{\alpha.\beta+1}} = -(\alpha+\beta+1)\, c_{\alpha+1.\beta+1} S_{\alpha-1.\beta},$$

$$(5.)\quad c^2_{\alpha+1.\beta} D \frac{S_{\alpha\beta}}{c_{\alpha+1.\beta}\, x^{\alpha+\beta+1}} = (\alpha+\beta+1)\, c_{\alpha\beta} \frac{S_{\alpha+1.\beta}}{x^{\alpha+\beta+2}},$$

$$(6.)\quad c^2_{\alpha.\beta+1} D \frac{S_{\alpha\beta}}{c_{\alpha.\beta+1}\, x^{\alpha+\beta+1}} = (\alpha+\beta+1)\, c_{\alpha\beta} \frac{S_{\alpha.\beta+1}}{x^{\alpha+\beta+2}}.$$

Setzt man in der Formel (6.) $\alpha = 0$, so erhält man

$$D \frac{S_{0\beta}}{a_0^{\beta+1} x^{\beta+1}} = (-1)^\beta (\beta+1) \frac{S_{0.\beta+1}}{a_0^{\beta+2} x^{\beta+2}}$$

und daher

$$(7.)\quad \frac{S_{0\beta}}{a_0^{\beta+1} x^{\beta+1}} = \frac{(-1)^{\frac{\beta(\beta-1)}{2}}}{\Pi(\beta)} D^\beta \frac{S_{00}}{a_0 x}.$$

Setzt man in der Formel (5.) $\beta = 0$, so erhält man

$$D \frac{S_{\alpha 0}}{x^{\alpha+1}} = (\alpha+1) \frac{S_{\alpha+1.0}}{x^{\alpha+2}}$$

und daher

$$(8.)\quad \frac{S_{\alpha 0}}{x^{\alpha+1}} = \frac{1}{\Pi(\alpha)} D^\alpha \frac{S_{00}}{x}.$$

Endlich ergiebt sich aus der Formel $U_{\alpha 1} = a_\alpha - a_{\alpha+1} x$

$$DU_{\alpha 1} = (\alpha+2)\, U_{\alpha+1,1}, \quad D(a_0 x) = -U_{01}$$

und daher

$$(9.)\quad U_{\alpha 1} = \frac{-1}{\Pi(\alpha+1)} D^{\alpha+1}(a_0 x).$$

Um von diesen Relationen (vgl. *Jacobi*, l. c. S. 149—156) eine Anwendung zu machen, schicke ich die folgenden Bemerkungen voraus. Mit Hülfe der Gleichungen (8.), §. 1 lassen sich die drei Formeln (5.), (6.), (7.), §. 1 in eine vereinigen

$$(10.)\quad (-1)^\beta S_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} x^\beta S_{\alpha-\beta,0} & a_{\alpha-\beta+1} & \dots & a_{\alpha-1} & a_\alpha \\ x^{\beta-1} S_{\alpha-\beta+1,0} & a_{\alpha-\beta+2} & \dots & a_\alpha & a_{\alpha+1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ S_{\alpha 0} & a_{\alpha+1} & \dots & a_{\alpha+\beta-1} & a_{\alpha+\beta} \end{vmatrix}.$$

Setzt man in derselben $S = V$ und

$$(11.)\quad a_n = \frac{V_{n-1,0} - V_{n0}}{x^n},$$

*) Für die Gültigkeit dieser Formel ist, wie man mit Hülfe der Anmerkung in §. 1 leicht direct beweisen kann, nur die Bedingung erforderlich, dass $c_{\alpha+1.\beta}$ von Null verschieden ist.

so erhält man nach leichten Reductionen

$$(12.)\qquad x^{\alpha\beta}V_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} V_{\alpha-\beta,0} & \dots & V_{\alpha 0} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ V_{\alpha 0} & \dots & V_{\alpha+\beta,0} \end{vmatrix}.$$

In der nämlichen Weise findet man

$$(13.)\qquad (-1)^{\beta}x^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} T_{\alpha-\beta,0} & \dots & T_{\alpha 0} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ T_{\alpha 0} & \dots & T_{\alpha+\beta,0} \end{vmatrix}.$$

Wenn man endlich in der Determinante für $U_{\alpha\beta}$ jede Zeile, mit $x$ multiplicirt, von der vorhergehenden subtrahirt, so erhält man*)

$$(14.)\qquad U_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} U_{\alpha-\beta+1,1} & \dots & U_{\alpha 1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ U_{\alpha 1} & \dots & U_{\alpha+\beta-1,1} \end{vmatrix}.$$

Mit Hülfe der Formeln (8.) und (9.) ergiebt sich aus diesen Relationen, wenn man

$$(15.)\qquad V = \frac{f(s)-f(t)}{s-t},\quad T = \frac{f(t)}{s-t},\quad U = f(t)(s-t)$$

setzt**)

$$(16.)\qquad \frac{V_{\alpha\beta}}{x^{\alpha+\beta+1}} = \begin{vmatrix} \frac{D^{\alpha-\beta}V}{\Pi(\alpha-\beta)} & \dots & \frac{D^{\alpha}V}{\Pi(\alpha)} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{D^{\alpha}V}{\Pi(\alpha)} & \dots & \frac{D^{\alpha+\beta}V}{\Pi(\alpha+\beta)} \end{vmatrix},$$

$$(17.)\qquad \frac{(-1)^{\beta}T_{\alpha\beta}}{x^{\alpha+\beta+1}} = \begin{vmatrix} \frac{D^{\alpha-\beta}T}{\Pi(\alpha-\beta)} & \dots & \frac{D^{\alpha}T}{\Pi(\alpha)} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{D^{\alpha}T}{\Pi(\alpha)} & \dots & \frac{D^{\alpha+\beta}T}{\Pi(\alpha+\beta)} \end{vmatrix},$$

$$(18.)\qquad (-1)^{\beta}U_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} \frac{D^{\alpha-\beta+2}U}{\Pi(\alpha-\beta+2)} & \dots & \frac{D^{\alpha+1}U}{\Pi(\alpha+1)} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{D^{\alpha+1}U}{\Pi(\alpha+1)} & \dots & \frac{D^{\alpha+\beta}U}{\Pi(\alpha+\beta)} \end{vmatrix}.$$

---

*) Damit diese Formeln allgemein gültig bleiben, ist für negative Werthe von $n$ $V_{n0} = y$, $T_{n0} = 0$, $U_{-1,0} = -a_0 x$, $U_{n0} = 0$ zu setzen.

**) Für negative Werthe von $n$ ist $\frac{D^n T}{\Pi(n)}$ und $\frac{D^n U}{\Pi(n)}$ durch 0, dagegen $\frac{D^n V}{\Pi(n)}$ durch $\frac{y}{x^{n+1}}$ zu ersetzen.

Setzt man

$$(19.)\quad c'_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} a_{\alpha-\beta+1} & a_{\alpha-\beta+2} & \cdots & a_{\alpha-1} & a_{\alpha+1} \\ a_{\alpha-\beta+2} & a_{\alpha-\beta+3} & \cdots & a_{\alpha} & a_{\alpha+2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{\alpha} & a_{\alpha+1} & \cdots & a_{\alpha+\beta-2} & a_{\alpha+\beta} \end{vmatrix},$$

so ist

$$(20.)\quad U_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta} - c'_{\alpha\beta}x + \cdots, \quad V_{\alpha\beta} = c_{\alpha+1,\beta+1}x^{\alpha+\beta+1} + c'_{\alpha+1,\beta+1}x^{\alpha+\beta+2} + \cdots.$$

Vergleicht man daher in der Formel (6.) für $S = U$ die Coefficienten von $x^{-\alpha-\beta-1}$, so ergiebt sich

$$\frac{Dc_{\alpha\beta}-(\alpha+\beta)c'_{\alpha\beta}}{c_{\alpha\beta}} = \frac{Dc_{\alpha,\beta+1}-(\alpha+\beta+1)c'_{\alpha,\beta+1}}{c_{\alpha,\beta+1}}.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite ist mithin von $\beta$ unabhängig, also gleich

$$\frac{Dc_{\alpha 1}-(\alpha+1)c'_{\alpha 1}}{c_{\alpha 1}} = \frac{Da_{\alpha}-(\alpha+1)a_{\alpha+1}}{a_{\alpha}} = 0.$$

Demnach ist

$$(21.)\quad Dc_{\alpha\beta} = (\alpha+\beta)c'_{\alpha\beta}.$$

Mit Hülfe dieser Relation ergeben sich aus den Gleichungen (3.) bis (6.) durch Coefficientenvergleichung die Formeln:

$$(22.)\quad c_{\alpha+1,\beta}Dc_{\alpha,\beta+1} - c_{\alpha,\beta+1}Dc_{\alpha+1,\beta} = (\alpha+\beta+1)c_{\alpha\beta}c_{\alpha+1,\beta+1},$$

$$(23.)\quad c_{\alpha\beta}D\frac{c_{\alpha+1,\beta}}{\alpha+\beta+1} - c_{\alpha+1,\beta}D\frac{c_{\alpha\beta}}{\alpha+\beta} = c_{\alpha,\beta-1}c_{\alpha+1,\beta+1},$$

$$(24.)\quad c_{\alpha\beta}D\frac{c_{\alpha,\beta+1}}{\alpha+\beta+1} - c_{\alpha,\beta+1}D\frac{c_{\alpha\beta}}{\alpha+\beta} = c_{\alpha-1,\beta}c_{\alpha+1,\beta+1},$$

$$(25.)\quad c_{\alpha-1,\beta}Dc_{\alpha+1,\beta} - c_{\alpha,\beta-1}Dc_{\alpha,\beta+1} = \frac{\alpha+\beta+1}{\alpha+\beta}c_{\alpha\beta}Dc_{\alpha\beta},$$

$$(26.)\quad c_{\alpha+1,\beta}Dc_{\alpha-1,\beta} - c_{\alpha,\beta+1}Dc_{\alpha,\beta-1} = \frac{\alpha+\beta-1}{\alpha+\beta}c_{\alpha\beta}Dc_{\alpha\beta}.$$

Mit Hülfe der Formeln (16.), (17.), (18.) lassen sich alle zwischen den Grössen $c_{\alpha\beta}$ und ihren Ableitungen bestehenden Relationen auf die Functionen $S_{\alpha\beta}$ übertragen. (Vgl. die Formeln (2.) und (9.), §. 2). So ergiebt sich unter Anwendung des in der Formel (21.) liegenden Satzes aus der Gleichung (16.) durch Differentiation

$$\frac{DV_{\alpha\beta}}{(\alpha+\beta+1)x^{\alpha+\beta+1}} + \frac{V_{\alpha\beta}}{x^{\alpha+\beta+2}} = \begin{vmatrix} \frac{D^{\alpha-\beta}V}{\Pi(\alpha-\beta)} & \cdots & \frac{D^{\alpha-1}V}{\Pi(\alpha-1)} & \frac{D^{\alpha+1}V}{\Pi(\alpha+1)} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \frac{D^{\alpha}V}{\Pi(\alpha)} & \cdots & \frac{D^{\alpha+\beta-1}V}{\Pi(\alpha+\beta-1)} & \frac{D^{\alpha+\beta+1}V}{\Pi(\alpha+\beta+1)} \end{vmatrix}.$$

Mit Hülfe der Formeln (8.) und (11.) folgt daraus nach leichten Reductionen

$$\frac{DV_{\alpha\beta}}{(\alpha+\beta+1)x^{\alpha+\beta+1}}+\frac{V_{\alpha\beta}}{x^{\alpha+\beta+2}} = \frac{V_{\alpha\beta}+xV'_{\alpha\beta}}{x^{\alpha+\beta+2}},$$

falls man

$$(27.)\qquad (-1)^{\beta}S'_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} x^{\beta} & S_{\alpha-\beta,0} & a_{\alpha-\beta+1} & \cdots & a_{\alpha-1} & a_{\alpha+1} \\ x^{\beta-1} & S_{\alpha-\beta+1,0} & a_{\alpha-\beta+2} & \cdots & a_{\alpha} & a_{\alpha+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ & S_{\alpha 0} & a_{\alpha+1} & \cdots & a_{\alpha+\beta-1} & a_{\alpha+\beta+1} \end{vmatrix}$$

setzt. Daraus folgt zunächst für $S=V$ die Relation

$$(28.)\qquad DS_{\alpha\beta} = (\alpha+\beta+1)S'_{\alpha\beta}.$$

Da dieselbe, falls man $V_{\alpha\beta}=yU_{\alpha\beta}-T_{\alpha\beta}$ und $V'_{\alpha\beta}=yU'_{\alpha\beta}-T'_{\alpha\beta}$ setzt, in Bezug auf $y$ eine Identität sein muss, so ist sie auch für $S=T$ oder $U$ richtig.

Ebenso bleiben die Formeln (22.) bis (26.) gültig, falls man in denselben durchgehends $c$ durch $S$ und $\alpha+\beta$ durch $\alpha+\beta+1$ ersetzt.

Es ist leicht, die in den Formeln (21.) und (28.) enthaltenen Determinantensätze direct zu beweisen. Wir beschränken uns auf die letztere Gleichung für $S=T$. Setzt man

$$a_{\varkappa 0} = x^{\beta-\varkappa}T_{\alpha-\beta+\varkappa,0},\quad a_{\varkappa\lambda} = a_{\alpha-\beta+\varkappa+\lambda},\qquad (\varkappa=0,\ 1,\ \ldots\ \beta;\ \ \lambda=1,\ \ldots\ \beta),$$

so ist $(-1)^{\beta}T_{\alpha\beta}$ nach (10.) gleich der aus diesen Elementen gebildeten Determinante $(\beta+1)^{\text{ten}}$ Grades. Bezeichnet man den Coefficienten von $a_{\mu\nu}$ in dieser Determinante mit $A_{\mu\nu}$, so ist

$$(-1)^{\beta}DT_{\alpha\beta} = \sum_{\mu,\nu}A_{\mu\nu}\,da_{\mu\nu}.$$

Nun ist aber

$$Da_{\varkappa\lambda} = (\alpha-\beta+\varkappa+\lambda+1)a_{\alpha-\beta+\varkappa+\lambda+1} = (\varkappa-\beta)a_{\varkappa+1,\lambda}+(\alpha+\lambda+1)a_{\varkappa,\lambda+1},$$
$$Da_{\varkappa 0} = (\varkappa-\beta)a_{\varkappa+1,0}+(\alpha+1)x^{\alpha}a_{\varkappa 1}$$

und daher

$$(-1)^{\beta}DT_{\alpha\beta} = \sum_{\varkappa}{}_0^{\beta}(\varkappa-\beta)\sum_{\lambda}{}_0^{\beta}A_{\varkappa\lambda}a_{\varkappa+1,\lambda}+(\alpha+1)x^{\alpha+1}\sum_{\varkappa}{}_0^{\beta}A_{\varkappa 0}a_{\varkappa 1}$$
$$+\sum_{\lambda}{}_1^{\beta}(\alpha+\lambda+1)\sum_{\varkappa}{}_0^{\beta}A_{\varkappa\lambda}a_{\varkappa,\lambda+1}.$$

Die beiden ersten Theile dieses Ausdrucks sind Null, der dritte ist gleich

$$(\alpha+\beta+1)\sum_{\varkappa}A_{\varkappa\beta}a_{\varkappa,\beta+1} = (-1)^{\beta}(\alpha+\beta+1)T'_{\alpha\beta}.$$

## §. 4.

### Integration der Differentialgleichung $c_{\alpha\beta} = 0$.

Die Beweise der im vorigen Paragraphen entwickelten Identitäten beruhen auf der Voraussetzung, dass die Grössen $c_{\alpha\beta}$ von Null verschieden sind. Ich will nun zeigen, dass die mit $c_{\alpha\beta}$ bezeichnete Function der Variable $t$ nicht identisch verschwinden kann, falls nicht $y$ eine rationale Function von $s$ ist, mit anderen Worten dass die allgemeine Lösung $f(t)$ der Differentialgleichung $(\alpha+\beta-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $c_{\alpha\beta}=0$ eine rationale Function ist, deren Zähler vom $(\alpha-1)^{\text{ten}}$ und deren Nenner vom $(\beta-1)^{\text{ten}}$ Grade ist. Aus ihr erhält man jede Lösung, indem man den $\alpha+\beta-1$ willkürlichen Coefficienten dieser Function bestimmte Werthe beilegt, so dass jene Differentialgleichung keine eigentlichen singulären Lösungen besitzt. Sei

$$y_n = \frac{1}{\Pi(n)}\frac{d^n y}{ds^n} \quad \text{oder} \quad y_n = 0,$$

je nachdem $n$ positiv oder negativ ist, sei

$$y_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} y_{\alpha-\beta+1} & \cdots & y_\alpha \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ y_\alpha & \cdots & y_{\alpha+\beta-1} \end{vmatrix},$$

und sei $y=f(s)$ irgend eine der Differentialgleichung $y_{\alpha\beta}=0$ genügende Function. Ich mache zunächst die Annahme, dass $y$ nicht die Differentialgleichung $y_{\alpha,\beta-1}=0$ befriedigt. Dies ist statthaft, weil letztere Differentialgleichung nur von der $(\alpha+\beta-2)^{\text{ten}}$ Ordnung ist, also nicht eine Folge der Differentialgleichung $(\alpha+\beta-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $y_{\alpha\beta}=0$ sein kann.

Nach dem Fundamentalsatze der Theorie der Differentialgleichungen giebt es bestimmte Werthe $c$ von $s$, in deren Umgebung $y$ nach ganzen positiven Potenzen von $s-c$ in eine convergente Reihe entwickelt werden kann. Ist $t$ irgend ein Werth im Innern (nicht an der Grenze) des Convergenzbereiches dieser Reihe, so kann $y$ auch nach ganzen positiven Potenzen von $x=s-t$ entwickelt werden. Da nun $y_{\alpha,\beta-1}$ nicht identisch Null ist, so kann man $t$ so wählen, dass dieser Ausdruck für $s=t$ nicht verschwindet, dass also $c_{\alpha,\beta-1}$ von Null verschieden ist. Unter dieser Voraussetzung besteht nach Formel (3.), §. 3 die Relation

$$c^2_{\alpha,\beta-1} D \frac{V_{\alpha-1,\beta-1}}{c_{\alpha,\beta-1}} = -(\alpha+\beta-1)c_{\alpha\beta}V_{\alpha-1,\beta-2},$$

also weil $c_{\alpha\beta}=0$ ist, $D\frac{V_{\alpha-1,\beta-1}}{c_{\alpha,\beta-1}}=0$. Mithin ist $\frac{V_{\alpha-1,\beta-1}}{c_{\alpha,\beta-1}}$ eine von $t$ unabhängige Function von $s$. Da ihre Entwickelung nach Potenzen von $s-t$ erst mit der $(\alpha+\beta-1)^{\text{ten}}$ Potenz anfängt, so verschwindet sie für $s=t$, und folglich, da sie von $t$ unabhängig ist, identisch. Nach Gleichung (2.), §. 1 ist also *)

$$y = \frac{T_{\alpha-1,\beta-1}}{U_{\alpha-1,\beta-1}}.$$

Wenn aber $y_{\alpha,\beta-1}$ ebenfalls für $y=f(s)$ verschwindet, dagegen $y_{\alpha,\beta-2}$ von Null verschieden ist, so ergiebt sich in derselben Weise, dass

$$y = \frac{T_{\alpha-1,\beta-2}}{U_{\alpha-1,\beta-2}}$$

ist, u. s. w. Ist schliesslich

$$y_{\alpha 1} = \frac{1}{\Pi(\alpha)}\frac{d^\alpha y}{ds^\alpha} = 0,$$

so ist $y$ eine ganze Function höchstens $(\alpha-1)^{\text{ten}}$ Grades. In jedem Falle ist daher $y$ eine rationale Function, deren Zähler von niedrigerem als dem $\alpha^{\text{ten}}$ und deren Nenner von niedrigerem als dem $\beta^{\text{ten}}$ Grade ist.

Umgekehrt genügt jede solche Function $y=\frac{T}{U}$ der Differentialgleichung $y_{\alpha\beta}=0$ (*Jacobi,* l. c. S. 153). Denn ist $t$ ein unbestimmter Werth von $s$, für den $U$ nicht verschwindet, und ist nach Potenzen von $x=s-t$ entwickelt

$$U = u_0+u_1x+\cdots+u_{\beta-1}x^{\beta-1},\quad y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots,$$

so folgen aus der Beziehung $yU-T=0$ die $\beta$ Gleichungen

$$u_{\beta-1}a_{\nu+\alpha-\beta}+u_{\beta-2}a_{\nu+\alpha-\beta+1}+\cdots+u_0a_{\nu+\alpha-1}\qquad(\nu=1,\,2,\,\ldots\,\beta).$$

Mithin ist die Determinante dieser Gleichungen $c_{\alpha\beta}=0$, oder wenn man $t$ durch $s$ ersetzt, $y_{\alpha\beta}=0$. Allgemeiner gilt der folgende Satz:

*Ist* $a_n=\frac{f^n(t)}{\Pi(n)}$ *oder Null, je nachdem n positiv oder negativ ist, ist in dem Elementensysteme*

$$(1.)\qquad \begin{cases} a_\varkappa & a_{\varkappa+1} & a_{\varkappa+2} & \cdots \\ a_{\varkappa+1} & a_{\varkappa+2} & a_{\varkappa+3} & \cdots \\ a_{\varkappa+2} & a_{\varkappa+3} & a_{\varkappa+4} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{cases}$$

---

*) $U_{\alpha-1,\beta-1}$ ist nicht identisch Null, weil der Coefficient von $x^{\beta-1}$ gleich $(-1)^{\beta-1}c_{\alpha,\beta-1}$ ist. Der Nenner ist also genau vom $(\beta-1)^{\text{ten}}$ Grade, während der Zähler von niedrigerem als dem $(\alpha-1)^{\text{ten}}$ Grade sein kann.

*die aus den ersten* $\lambda\,(>0)$ *Zeilen und Colonnen gebildete Determinante identisch Null, und ist, falls* $\varkappa$ *negativ ist,* $\lambda > -\varkappa$, *so verschwinden in diesem Systeme alle Determinanten* $\lambda^{\text{ten}}$ *und höheren Grades.*

Ist $\lambda = -\varkappa+1$, so ist jene Determinante $D = (-1)^{\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}} a_0^\lambda$. Ist also $D = 0$, so ist $a_0 = 0$ und folglich auch $a_n = 0$. Wir setzen daher voraus, dass $\lambda > -\varkappa+1$ ist. Aus der Annahme $D = 0$ folgt, dass $y = f(s)$ eine rationale Function ist, deren Zähler $T$ vom $(\varkappa+\lambda-2)^{\text{ten}}$ und deren Nenner $U$ vom $(\lambda-1)^{\text{ten}}$ Grade ist. Sei $\beta$ eine hinlänglich grosse Zahl und $\alpha = \beta+\varkappa-1$ $(\geqq 0)$. Sucht man nun zwei ganze Functionen $T'$ und $U'$ vom $\alpha^{\text{ten}}$ und $\beta^{\text{ten}}$ Grade so zu bestimmen, dass die Entwickelung von $yU'-T'$ nach Potenzen von $x = s-t$ mit der $(\alpha+\beta+1)^{\text{ten}}$ Potenz anfängt, so erhält man zur Bestimmung der Coefficienten von $U'$ die Gleichungen (3.), §. 1. Nun wird aber die gestellte Bedingung durch die Functionen $T' = TH$, $U' = UH$ befriedigt, wo $H = h_0+h_1x+\cdots+h_{\beta-\lambda+1}x^{\beta-\lambda+1}$ $(\beta-\lambda+1 \geqq 0)$ eine willkürliche ganze Function $(\beta-\lambda+1)^{\text{ten}}$ Grades ist. Daher enthalten die Lösungen jener linearen Gleichungen zwischen $\beta+1$ Unbekannten $\beta-\lambda+2$ willkürliche Constanten, die, wie leicht zu sehen, unabhängig sind, und mithin müssen in dem Coefficientensysteme der Gleichungen alle Determinanten verschwinden, deren Grad höher als $(\beta+1)-(\beta-\lambda+2) = \lambda-1$ ist. In diesem Systeme ist der erste Coefficient $a_{\alpha-\beta+1} = a_\varkappa$, der letzte $a_{\alpha+\beta} = a_{2\beta+\varkappa-1}$. Indem man daher $\beta$ genügend gross wählt, kann man bewirken, dass jede beliebig gegebene Determinante $\lambda^{\text{ten}}$ Grades des Systems (1.) dem betrachteten Gleichungssystem angehört.

## §. 5.

### Entwickelung von Potenzreihen in Kettenbrüche.

Wir setzen jetzt

$$c_{2n} = c_{n,n}, \quad c_{2n+1} = c_{n+1,n}, \quad b_{2n} = c_{n+1,n-1}, \quad b_{2n+1} = c_{n,n+1},$$

also

$$c_{2n} = \begin{vmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_n & \dots & a_{2n-1} \end{vmatrix}, \quad c_{2n+1} = \begin{vmatrix} a_2 & \dots & a_{n+1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n+1} & \dots & a_{2n} \end{vmatrix},$$

$$b_{2n} = \begin{vmatrix} a_3 & \dots & a_{n+1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n+1} & \dots & a_{2n-1} \end{vmatrix}, \quad b_{2n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & \dots & a_n \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_n & \dots & a_{2n} \end{vmatrix}.$$

Zwischen diesen Determinanten besteht nach Formel (2.), §. 2 die Relation

$$(1.) \qquad b_{n+1}c_{n-1} - b_{n-1}c_{n+1} = (-1)^{n+1}c_n^2.$$

Wir setzen ferner

$$T_{2n} = (-1)^{n+1}\frac{T_{n,n-1}}{c_{2n}} = x^n + \cdots,$$

$$U_{2n} = (-1)^{n+1}\frac{U_{n,n-1}}{c_{2n}} = \frac{b_{2n}}{c_{2n}}x^{n-1} + \cdots + (-1)^n\frac{c'_{2n-1}}{c_{2n}}x + (-1)^{n+1}\frac{c_{2n-1}}{c_{2n}},$$

$$V_{2n} = (-1)^{n+1}\frac{V_{n,n-1}}{c_{2n}} = (-1)^{n+1}\frac{c_{2n+1}}{c_{2n}}x^{2n} + (-1)^{n+1}\frac{c'_{2n+1}}{c_{2n}}x^{2n+1} + \cdots,$$

$$T_{2n+1} = (-1)^n\frac{T_{nn}}{c_{2n+1}} = \frac{b_{2n+1}}{c_{2n+1}}x^n + \cdots,$$

$$U_{2n+1} = (-1)^n\frac{U_{nn}}{c_{2n+1}} = x^n + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{c'_{2n}}{c_{2n+1}}x + (-1)^n\frac{c_{2n}}{c_{2n+1}},$$

$$V_{2n+1} = (-1)^n\frac{V_{nn}}{c_{2n+1}} = (-1)^n\frac{c_{2n+2}}{c_{2n+1}}x^{2n+1} + (-1)^n\frac{c'_{2n+2}}{c_{2n+1}}x^{2n+2} + \cdots.$$

Die Functionen $T_n$, $U_n$, $V_n$ sind, falls $c_n$ von Null verschieden ist, durch folgende Eigenschaften vollständig definirt: 1) Sie genügen der Gleichung

$$(2.) \qquad yU_n - T_n = V_n.$$

2) Die Entwickelung von $V_n$ nach steigenden Potenzen von $x$ beginnt mit der $n^{\text{ten}}$ Potenz. 3) $T_n$ ist eine ganze Function vom Grade $\frac{n}{2}$ oder $\frac{n-1}{2}$, $U_n$ eine solche vom Grade $\frac{n-2}{2}$ oder $\frac{n-1}{2}$, je nachdem $n$ gerade oder ungerade ist. 4) Der Coefficient der höchsten Potenz von $x$ ist, wenn $n$ gerade ist, in $T_n$, und wenn $n$ ungerade ist, in $U_n$ gleich 1.

Der Bruch $\frac{T_n}{U_n}$ kann sich, falls $c_n$ nicht verschwindet, nur durch eine Potenz von $x$ heben lassen, und ist, falls $c_n$ und $c_{n-1}$ von Null verschieden sind, irreductibel. Ferner ist

$$(3.) \qquad T_n U_{n+1} - T_{n+1}U_n = (-x)^n,$$

und wenn man

$$(4.) \qquad k_n = \frac{b_{n+1}}{c_{n+1}} - \frac{b_{n-1}}{c_{n-1}} = (-1)^{n+1}\frac{c_n^2}{c_{n-1}c_{n+1}}$$

setzt,

$$(5.) \qquad S_{n+1} = k_n S_n + xS_{n-1}.$$

Speciell ist

$$\begin{array}{llll} c_0 = 1, & c_1 = 1, & c_2 = a_1, & \dots \\ b_0 = 0, & b_1 = a_0, & b_2 = a_3, & \dots \\ k_0 = a_0, & k_1 = \frac{1}{a_1}, & k_2 = -\frac{a_1^2}{a_3}, & \dots \\ T_0 = 1, & T_1 = a_0, & T_2 = \frac{a_0+a_1x}{a_1}, & \dots \\ U_0 = 0, & U_1 = 1, & U_2 = \frac{1}{a_1}, & \dots \\ V_0 = -1, & V_1 = a_1x+a_2x^2+\cdots, & V_2 = \frac{a_2x^2+a_3x^3+\cdots}{a_2}, & \dots \end{array}$$

Setzt man

$$(6.)\qquad W_n = -\frac{V_{n+1}}{V_n},$$

so ist

$$(7.)\qquad W_{n-1} = \frac{x}{k_n+W_n},$$

und folglich, weil $W_0 = y-a_0 = y-k_0$ ist,

$$(8.)\qquad y = k_0+\cfrac{x}{k_1+\cfrac{x}{k_2+\cdots+\cfrac{x}{k_n+W_n}}},$$

$$\frac{T_n}{U_n} = k_0+\cfrac{x}{k_1+\cfrac{x}{k_2+\cdots+\cfrac{x}{k_{n-1}}}}.$$

Wir kehren jetzt zu den in §. 3 gemachten Annahmen zurück. Dann ergiebt sich aus den Formeln (3.) bis (6.), §. 3

$$(9.)\qquad DS_n = \frac{n}{k_n}S_{n-1},\quad D\frac{S_n}{x^n} = \frac{n}{k_n}\frac{S_{n+1}}{x^{n+1}}.$$

Durch wiederholte Anwendung der letzten Formel erhält man die Relationen

$$(10.)\qquad \Pi(n-1)\frac{T_n}{x^n} = k_{n-1}Dk_{n-2}D\dots Dk_1D\frac{k_0}{x},$$

$$(11.)\qquad \Pi(n-1)\frac{U_n}{x^n} = k_{n-1}Dk_{n-2}D\dots Dk_1D\frac{1}{x},$$

$$(12.)\qquad \Pi(n-1)\frac{V_n}{x^n} = k_{n-1}Dk_{n-2}D\dots Dk_1D\frac{f(s)-f(t)}{s-t},$$

durch wiederholte Anwendung der ersten

$$V_n = -\Pi(n)\int_s^t \frac{dt}{k_n}\int_s^t \frac{dt}{k_{n-1}}\cdots\int_s^t \frac{dt}{k_1}.$$

Aus den Formeln

$$D\,U_{2n} = \frac{2n}{k_{2n}}\,U_{2n-1},\quad D\,T_{2n+1} = \frac{2n+1}{k_{2n+1}}\,T_{2n}$$

ergiebt sich durch Vergleichung der Coefficienten der höchsten Potenzen von $x$

$$(13.)\qquad D\,\frac{b_n}{c_n} = \frac{n}{k_n},\quad b_n D\,c_n - c_n D\,b_n = (-1)^n n\,c_{n-1}c_{n+1}.$$

Aus dieser Gleichung und der Relation (4.) folgt ferner die Formel

$$(14.)\qquad D\,k_n = \frac{n+1}{k_{n+1}} - \frac{n-1}{k_{n-1}},\quad D\,k_0 = \frac{1}{k_1},\quad D\,k_1 = \frac{2}{k_2},\quad \ldots$$

mittelst deren die Grössen $k_n$ successive berechnet werden können. In ähnlicher Weise findet man die Gleichungen

$$(15.)\qquad c_n D\,\frac{c_{n+1}}{n+1} - c_{n+1} D\,\frac{c_n}{n} = c_{n-1}c_{n+2},$$

$$(16.)\qquad c_{n-1} D\,b_{n+1} - b_{n-1} D\,c_{n+1} = (-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}\,c_n D\,c_n,$$

$$(17.)\qquad b_{n+1} D\,c_{n-1} - c_{n+1} D\,b_{n-1} = (-1)^{n+1}\frac{n-1}{n}\,c_n D\,c_n.$$

Zum Schluss erwähne ich noch eine andere Darstellung der Functionen $T_n$, $U_n$, welche der Darstellung (10.), (11.) gewissermassen reciprok ist. Die Function $k_n$ der Variable $t$ möge in $h_n$ übergehen, wenn man $t$ durch $s$ ersetzt. Entwickelt man eine Function $g$ der Variabeln $s$ und $t$ nach steigenden Potenzen von $s-t$ in eine Reihe, deren Coefficienten Functionen von $t$ sind, so soll das Aggregat der negativen Potenzen von $s-t$ in dieser Reihe mit $[g]$ bezeichnet werden. Bedeutet endlich $D$ eine Differentiation nach $s$, so ist

$$(18.)\qquad \Pi(n-1)\frac{T_n}{(t-s)^n} = \left[h\,D\,h_1 D\,h_2 \ldots D\,h_{n-2} D\,\frac{h_{n-1}}{t-s}\right],$$

$$(19.)\qquad \Pi(n-1)\frac{U_n}{(t-s)^n} = \left[\ D\,h_1 D\,h_2 \ldots D\,h_{n-2} D\,\frac{h_{n-1}}{t-s}\right].$$

Da das constante Glied in der Entwickelung von $h_n$ gleich $k_n$ ist, so ist

$$\left[\frac{k_n}{(t-s)^2} - D\,\frac{h_n}{t-s}\right] = 0,$$

und weil in den Entwickelungen von $h_1, h_2, \dots$ nur positive Potenzen von $s-t$ vorkommen, falls $c_1, c_2, c_3, \dots$ von Null verschieden sind, und weil durch Differentiation von Reihen, die nur positive Potenzen von $s-t$ enthalten, wieder solche Reihen entstehen, so ist

$$\left[D h_1 D h_2 \dots D h_{n-1}\left(\frac{k_n}{(t-s)^2} - D\frac{h_n}{t-s}\right)\right] = 0$$

oder

$$k_n\left[D h_1 D h_2 \dots D\frac{h_{n-1}}{(t-s)^2}\right] = \left[D h_1 D h_2 \dots D h_{n-1} D\frac{h_n}{t-s}\right].$$

Angenommen nun, die Formel (19.) sei gültig, wenn der Index von $U$ gleich $n$ ist. Dann ist die linke Seite der letzten Gleichung nach (9.) gleich

$$-\Pi(n-1)\,k_n\frac{d}{dt}\frac{U_n}{(t-s)^n} = \Pi(n)\frac{U_{n+1}}{(t-s)^{n+1}}.$$

Mithin ist die Formel (19.) auch gültig, wenn der Index von $U$ gleich $n+1$ ist. Da sie, wie leicht zu sehen, für $n=2$ richtig ist, so ist sie damit allgemein bewiesen. In den Entwickelungen der Ausdrücke

$$h D h_1 \dots D h_{2n}\ D\frac{h_{2n+1}}{t-s}, \quad h D h_1 \dots D h_{2n-1} D\frac{h_{2n}}{t-s},$$

$$D h_1 \dots D h_{2n-2} D\frac{h_{2n-1}}{t-s}, \quad D h_1 \dots D h_{2n-1} D\frac{h_{2n}}{t-s}$$

sind demnach die Coefficienten von $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \dots \frac{1}{x^n}$ gleich Null.

Zürich, October 1879.

---

# Zur Theorie der isostatischen Flächen.

(Von Herrn *J. Weingarten.*)

---

In einem der letzten Paragraphen der „Leçons sur les coordonnées curvilignes" spricht *Lamé* den Satz aus, dass ein im Gleichgewichtszustande befindlicher fester elastischer Körper, vermöge einer dreifachen Schaar sich rechtwinklig durchschneidender Flächen, in unendlich kleine Parallelepipede zerlegt werden könne, deren Seitenflächen durch die sie behaftenden elastischen Kräfte in normaler Richtung beansprucht würden. *Lamé* legt diesen Flächenschaaren den Namen der isostatischen Flächen bei.

Der Satz selbst ist offenbar ein irrthümlicher. Aber es knüpft sich insofern ein besonderes Interesse an den Irrthum des eminenten Mathematikers, als nach den eigenen Worten desselben die Vorstellung der isostatischen Flächen Veranlassung zur Schaffung der Theorie der krummlinigen Coordinaten geworden ist. (*Lamé*, leçons sur les coordonnées curvilignes pag. 273—74.)

Es scheint, dass bisher Untersuchungen über die Bedingungen, von denen das Auftreten isostatischer Flächen abhängig ist, nicht veröffentlicht worden sind. Die nachstehenden Entwickelungen beschäftigen sich mit der Aufstellung dieser Bedingungen, und mit der Andeutung einiger Fragen, welche zu ihnen in nächster Beziehung stehen.

## 1.

Seien $x_1$, $x_2$, $x_3$ und $x_1+dx_1$, $x_2+dx_2$, $x_3+dx_3$ die rechtwinkligen Coordinaten zweier, im Innern eines festen elastischen Körpers gelegener, unendlich nahe benachbarter Punkte $M$ und $M'$, $dS$ die Entfernung derselben. In dem Punkte $M$ construire man ein zweites, dem ursprünglichen gleichartiges, rechtwinkliges Axensystem $s_1$, $s_2$, $s_3$, und bezeichne durch $ds_1$, $ds_2$, $ds_3$ die unendlich kleinen Coordinaten des Punktes $M'$ in diesem System.

Ferner seien $\xi_i$, $\eta_i$, $\zeta_i$ die Cosinus der Winkel der Axe $s_i$ mit den ursprünglichen Axen $x_1$, $x_2$, $x_3$. Alsdann lässt sich die Linie $dS$ als die gemeinschaftliche Diagonale zweier rechteckiger Parallelepipede auffassen, deren Seitenflächen beziehungsweise den ursrünglichen und den nachträglich gewählten Axenebenen parallel sind.

Die elastischen Kräfte, welche die Seitenflächen des ersten der beiden Parallelepipede behaften, seien in bekannter Weise durch $a_{11}$, $a_{22}$, $a_{33}$, $a_{23}$, $a_{31}$, $a_{12}$, die analogen Kräfte für das zweite durch $\tau_{11}$, $\tau_{22}$, $\tau_{33}$, $\tau_{23}$, $\tau_{31}$, $\tau_{12}$ angegeben.

Zwischen den in Rede stehenden Grössen bestehen, wie man weiss, die Gleichungen

$$ds_i = \xi_i dx_1 + \eta_i dx_2 + \zeta_i dx_3, \qquad i = 1,\ 2,\ 3,$$

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^3 = ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2,$$

$$\Sigma a_{hk}\, dx_h\, dx_k = \Sigma \tau_{hk}\, ds_h\, ds_k,$$

in denen $a_{hk} = a_{kh}$, $\tau_{hk} = \tau_{kh}$.

Es ist ferner bekannt, dass die Substitutionscoefficienten $\xi_i\ \eta_i\ \zeta_i$, so lange die kubische Gleichung

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

nicht zwei gleiche Wurzeln besitzt, sich in bestimmter Weise der Art angeben lassen, dass für die in den Differentialen $ds$ quadratische Form $\Sigma \tau_{hk}\, ds_h\, ds_k$ die Coefficienten $\tau_{23}$, $\tau_{31}$, $\tau_{12}$ der Null gleich werden. Es existirt daher in jedem Punkte $M$ ein unendlich kleines Parallelepiped, dessen Seitenflächen durch die sie behaftenden Kräfte in nur normaler Richtung beansprucht werden.

Allein die Existenz eines solchen Parallelepipeds in jedem Punkte $M$ des elastischen Körpers reicht zur Begründung der von *Lamé* ausgesprochenen Eigenschaft nicht hin, wenn nicht gleichzeitig nachgewiesen werden kann, dass die Cosinus $\xi_i$, $\eta_i$, $\zeta_i$ für jeden Punkt des erfüllten Raumes drei Richtungen bestimmen, welche mit den Tangenten an die Durchschnittslinien eines orthogonalen Flächensystems in jedem Raumpunkte zusammenfallen. Diese Coincidenz ist aber bekanntlich an das Bestehen der drei Gleichungen:

$$(1.)\qquad \xi_i\left(\frac{\partial \eta_i}{\partial x_3} - \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_2}\right) + \eta_i\left(\frac{\partial \zeta_i}{\partial x_1} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x_3}\right) + \zeta_i\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_2} - \frac{\partial \eta_i}{\partial x_1}\right) = 0, \qquad i = 1,\ 2,\ 3$$

gebunden, welche sich durch die folgenden ersetzen lassen:

$$ds_1 = H_1 d\varrho_1, \quad ds_2 = H_2 d\varrho_2, \quad ds_3 = H_3 d\varrho_3,$$

wenn unter $H_1\, H_2\, H_3$, $\varrho_1\, \varrho_2\, \varrho_3$ Functionen von $x_1\, x_2\, x_3$ verstanden werden.

Die Bedingungen (1.), deren Erfüllung den Cosinus $\xi_i\, \eta_i\, \zeta_i$ besonders auferlegt werden muss, wenn der Gleichgewichtszustand eines festen Körpers mit dem Vorhandensein isostatischer Flächen verbunden sein soll, constituiren drei partielle Differentialgleichungen, denen die sechs Grössen $a_{hk}$, durch welche diese Cosinus ausdrückbar sind, zu genügen haben.

Die Zurückführung dieser partiellen Differentialgleichungen auf eine rationale Form, unter unmittelbarer Benutzung der für $\xi_i\, \eta_i\, \zeta_i$ aus der Theorie der Transformation der Flächen zweiten Grades wohlbekannten Ausdrücke, erscheint nicht durchführbar. Es ergeben sich jedoch die gesuchten Bedingungen in gewünschter Form vermittelst eines Theorems, welches die Transformation der in den Differentialen $dx$ quadratischen Form $\Sigma a_{hk} dx_h dx_k$ mit der gleichzeitigen Transformation einer aus derselben abgeleiteten Form verknüpft.

Unter Einführung der Bezeichnungen

$$\alpha_{1i} = \frac{\partial a_{2i}}{\partial x_3} - \frac{\partial a_{3i}}{\partial x_2}, \quad \alpha_{2i} = \frac{\partial a_{3i}}{\partial x_1} - \frac{\partial a_{1i}}{\partial x_3}, \quad \alpha_{3i} = \frac{\partial a_{1i}}{\partial x_2} - \frac{\partial a_{2i}}{\partial x_1}$$

ist dieses Theorem das folgende:

Transformiren die Substitutionen

$$\xi_i dx_1 + \eta_i dx_2 + \zeta_i dx_3 = H_i d\varrho_i$$

die quadratischen Formen

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \quad \text{und} \quad \Sigma a_{hk} dx_h dx_k$$

in:

$$H_1^2 d\varrho_1^2 + H_2^2 d\varrho_2^2 + H_3^2 d\varrho_3^2 \quad \text{und} \quad \tau_{11} H_1^2 d\varrho_1^2 + \tau_{22} H_2^2 d\varrho_2^2 + \tau_{33} H_3^2 d\varrho_3^2,$$

so transformiren die nämlichen Substitutionen die quadratische Form

$$\Sigma \alpha_{hk} dx_h dx_k$$

in die folgende:

$$p_1 H_2 d\varrho_2 H_3 d\varrho_3 + p_2 H_3 d\varrho_3 H_1 d\varrho_1 + p_3 H_1 d\varrho_1 H_2 d\varrho_2,$$

in welcher $p_1\, p_2\, p_3$ aus den Differentialquotienten der $H$ zusammengesetzte Grössen bezeichnen, deren Angabe für das Folgende entbehrlich ist.

Mit anderen Worten: wenn die gewählten Substitutionen die Form $\Sigma a_{hk} dx_h dx_k$ in eine Form der Differentiale $d\varrho$ überführen, in welche nur die Quadrate dieser Differentiale eintreten, so wird durch die nämlichen

Substitutionen die Form $\Sigma \alpha_{hk} dx_h dx_k$ in eine andere übergeführt, in welcher die Coefficienten der quadratischen Glieder fehlen.

Wendet man dieses Theorem nicht nur auf die ursprüngliche Form $\Sigma a_{hk} dx_h dx_k$, sondern auch auf die *zugehörige* Form $\Sigma b_{hk} dx_h dx_k$ derselben an, so wird man zu der Bemerkung geführt, dass das Bestehen der Gleichungen

$$(a.)\quad \begin{cases} dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = H_1^2 d\varrho_1^2 + H_2^2 d\varrho_2^2 + H_3^2 d\varrho_3^2, \\ \Sigma a_{hk} dx_h dx_k = \tau_{11} H_1^2 d\varrho_1^2 + \tau_{22} H_2^2 d\varrho_2^2 + \tau_{33} H_3^2 d\varrho_3^2 \end{cases}$$

die nachstehenden zur nothwendigen Folge hat:

$$(b.)\quad \begin{cases} \Sigma b_{hk} dx_h dx_k = \tau_{22}\tau_{33} H_1^2 d\varrho_1^2 + \tau_{33}\tau_{11} H_2^2 d\varrho_2^2 + \tau_{11}\tau_{22} H_3^2 d\varrho_3^2, \\ \Sigma \alpha_{hk} dx_h dx_k = p_1 H_2 d\varrho_2 H_3 d\varrho_3 + p_2 H_3 d\varrho_3 H_1 d\varrho_1 + p_3 H_1 d\varrho_1 H_2 d\varrho_2, \\ \Sigma \beta_{hk} dx_h dx_k = q_1 H_2 d\varrho_2 H_3 d\varrho_3 + q_2 H_3 d\varrho_3 H_1 d\varrho_1 + q_3 H_1 d\varrho_1 H_2 d\varrho_2, \end{cases}$$

in denen

$$\beta_{1i} = \frac{\partial b_{2i}}{\partial x_3} - \frac{\partial b_{3i}}{\partial x_2}, \qquad \beta_{2i} = \frac{\partial b_{3i}}{\partial x_1} - \frac{\partial b_{1i}}{\partial x_3}, \qquad \beta_{3i} = \frac{\partial b_{1i}}{\partial x_2} - \frac{\partial b_{2i}}{\partial x_1}.$$

Das Bestehen der Gleichungen (*a.*) ist für die Existenz isostatischer Flächen offenbar nothwendig und hinreichend. Alle aus den Gleichungen (*a.*) und (*b.*) abgeleiteten Folgerungen werden daher Bedingungen darstellen, welche mit der Existenz isostatischer Flächen nothwendig verknüpft sind. Solche Bedingungen erhält man leicht durch Untersuchung des Systems simultaner Invarianten der vier Formen $\Sigma a_{hk} dx_h dx_k$, $\Sigma \alpha_{hk} dx_h dx_k$, $\Sigma b_{hk} dx_h dx_k$ und $\Sigma \beta_{hk} dx_h dx_k$. Bildet man diese Invarianten mit Hülfe der einfacheren transformirten Formen, so bemerkt man vor allen drei *verschwindende,* und zwar die folgenden:

$$\begin{aligned} J_1 &= \Sigma \alpha_{hk} a_{hk}, \\ J_2 &= \Sigma a_{hk} \beta_{hk} = \Sigma b_{hk} \alpha_{hk}, \\ J_3 &= \Sigma b_{hk} \beta_{hk}. \end{aligned}$$

Es sind daher die Gleichungen

$$J_1 = 0, \quad J_2 = 0, \quad J_3 = 0$$

drei Bedingungen, deren Erfüllung für das Vorhandensein isostatischer Flächen *nothwendig* ist. Man erkennt in denselben drei partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, denen die Kräfte $a_{hk}$ unterworfen sind. Diese Differentialgleichungen sind linear in Beziehung auf die Differentialquotienten der Grössen $a_{hk}$.

## 2.

Nachdem die eben aufgestellten Bedingungen für die in Rede stehende Frage als nothwendige erkannt worden sind, ist es nicht schwer nachzuweisen, dass ihre Erfüllung auch ausreicht, um die Existenz isostatischer Flächen zu sichern, das heisst nachzuweisen, dass diese Bedingungen die Gleichungen (1.) zur Folge haben. Zu dem Ende erinnere man sich der Gleichungen zur Bestimmung der Cosinus $\xi_i\ \eta_i\ \zeta_i$, auf welche die Theorie der Transformation der Flächen zweiten Grades auf die Hauptaxen führt.

Deutet man die Substitution von $\tau_{ii}$ für die unbestimmte Grösse $\lambda$ in die folgenden Gleichungen

$$\Delta_{11} = (a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda)-a_{23}^2,\quad \Delta_{22} = (a_{33}-\lambda)(a_{11}-\lambda)-a_{31}^2,\quad \Delta_{33} = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}^2.$$

$$\Delta_{32} = \Delta_{23} = a_{12}a_{13}-(a_{11}-\lambda)a_{23},\quad \Delta_{13} = \Delta_{31} = a_{23}a_{21}-(a_{22}-\lambda)a_{31},$$

$$\Delta_{21} = \Delta_{12} = a_{31}a_{32}-(a_{33}-\lambda)a_{12}$$

durch das Hinzufügen eines oberen Index $i$ an die Bezeichnung $\Delta$ an, so sind $\xi_i\ \eta_i\ \zeta_i$ durch die neun gleichzeitig bestehenden Relationen

$$(2.)\qquad m_k\xi_i = \Delta^i_{1k},\quad m_k\eta_i = \Delta^i_{2k},\quad m_k\zeta_i = \Delta^i_{3k},\qquad k = 1,\ 2,\ 3$$

bestimmbar, in denen die $m_k$ von Null verschiedene Grössen bezeichnen.

Untersucht man die Summe

$$K = \Sigma\left\{\Delta_{1k}\left(\frac{\partial\Delta_{2k}}{\partial x_3}-\frac{\partial\Delta_{3k}}{\partial x_2}\right)+\Delta_{2k}\left(\frac{\partial\Delta_{3k}}{\partial x_1}-\frac{\partial\Delta_{1k}}{\partial x_3}\right)+\Delta_{3k}\left(\frac{\partial\Delta_{1k}}{\partial x_2}-\frac{\partial\Delta_{2k}}{\partial x_1}\right)\right\},$$

in welcher $\lambda$ eine willkürliche Function der Grössen $x_1\,x_2\,x_3$ bedeute, so erkennt man bei einiger Aufmerksamkeit, dass dieselbe von den Werthen der Differentialquotienten $\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}$, $\frac{\partial\lambda}{\partial x_2}$, $\frac{\partial\lambda}{\partial x_3}$ unabhängig ist. Sie erweist sich als eine ganze Function zweiten Grades der Grösse $\lambda$.

Eine einfache Rechnung ergiebt:

$$K = J_3-2J_2\lambda+J_1\lambda^2,$$

wenn $J_1$, $J_2$, $J_3$ die oben angegebene Bedeutung haben.

Unter der Voraussetzung, dass für die willkürliche Function $\lambda$ eine der Wurzeln $\tau_{ii}$ der kubischen Gleichung $\Delta = 0$ gewählt werde, sei der Werth von $K$ durch $K_i$ bezeichnet. Es ist alsdann in Folge der Gleichungen (2.)

$$K_i = \Sigma m_k\left\{\xi_i\left(\frac{\partial m_k\eta_i}{\partial x_3}-\frac{\partial m_k\zeta_i}{\partial x_2}\right)+\eta_i\left(\frac{\partial m_k\zeta_i}{\partial x_1}-\frac{\partial m_k\xi_i}{\partial x_3}\right)+\zeta_i\left(\frac{\partial m_k\xi_i}{\partial x_2}-\frac{\partial m_k\eta_i}{\partial x_1}\right)\right\}$$

$$i = 1,\ 2,\ 3$$

und also für jedes $i$

$$\left[\xi_i\left(\frac{\partial \eta_i}{\partial x_3}-\frac{\partial \zeta_i}{\partial x_2}\right)+\eta_i\left(\frac{\partial \zeta_i}{\partial x_1}-\frac{\partial \xi_i}{\partial x_3}\right)+\zeta_i\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_2}-\frac{\partial \eta_i}{\partial x_1}\right)\right]\cdot \Sigma m_h^2 = J_3 - 2J_2\tau_{ii} + J_3\tau_{ii}^2.$$

Die drei Gleichungen, welche aus der vorhergehenden durch die Substitutionen der Zahlen 1, 2, 3 für $i$ hervorgehen, enthalten, unabhängig von den Entwickelungen des vorigen Paragraphen, die Aufstellung der für das Bestehen isostatischer Flächen nothwendigen und ausreichenden Bedingungen. Es ergiebt sich aus ihnen, dass mit dem Verschwinden der Invarianten $J_1$, $J_2$, $J_3$ die Gleichungen (1.) nothwendig erfüllt sind, und dass aus der Erfüllung der Gleichungen (1.) die Folgerungen

$$J_1 = 0, \quad J_2 = 0, \quad J_3 = 0$$

sich ergeben, so lange als unter den Grössen $\tau_{ii}$ nicht zwei gleiche vorhanden sind.

## 3.

Geht man nach Aufstellung der Bedingungen der isostatischen Flächen zur Untersuchung der Form dieser Bedingungen über, so erkennt man in denselben, wie schon bemerkt, partielle Differentialgleichungen erster Ordnung für die in ihnen enthaltenen Grössen, linear in Beziehung auf die Differentialquotienten dieser Grössen. Wünscht man diese Differentialgleichungen nach den in sie eingehenden achtzehn Differentialquotienten anzuordnen, so ist eine solche Anordnung bei den Invarianten $J_1$, $J_2$ unschwer durchzuführen, erfordert jedoch bei der Invariante $J_3$ einen gewissen Aufwand von Rechnung. Man erkennt jedoch bei eingehender Betrachtung, dass die Anordnung der betreffenden Formen in Beziehung auf diese Differentialquotienten mit den nämlichen Coefficienten behaftet ist, wie diejenigen, welche in den nachstehenden Determinanten $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_3$ als Coefficienten der Producte $\partial_i x_h x_k$ auftreten.

$$\mathfrak{J}_1 = \begin{vmatrix} \partial_1 & x_1 & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \partial_2 & x_2 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \partial_3 & x_3 & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{vmatrix},$$

$$\mathfrak{J}_2 = \begin{vmatrix} \partial_1 & x_1 & b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 \\ \partial_2 & x_2 & b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 \\ \partial_3 & x_3 & b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 \end{vmatrix},$$

$$\mathfrak{J}_3 = \begin{vmatrix} a_{11}\partial_1 + a_{12}\partial_2 + a_{13}\partial_3 & x_1 & b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 \\ a_{21}\partial_1 + a_{22}\partial_2 + a_{23}\partial_3 & x_2 & b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 \\ a_{31}\partial_1 + a_{32}\partial_2 + a_{33}\partial_3 & x_3 & b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 \end{vmatrix}.$$

Diese Determinanten enthalten daher eine symbolische Darstellung der in Rede stehenden Invarianten, wenn die Uebereinkunft getroffen wird, dass in der Entwickelung derselben, unter dem Product $\partial_i x_h x_k$ der Differentialquotient $\frac{\partial a_{hk}}{\partial x_i}$ verstanden werde, welche Darstellung mit Vortheil für die Transformation der betreffenden Invarianten verwerthet werden kann. Man leitet leicht aus dieser Darstellung andere Formen der Bedingungsgleichungen der Existenz isostatischer Flächen ab. Multiplicirt man z. B. eine jede der Determinanten mit der aus den neun Cosinus $\xi_i\ \eta_i\ \zeta_i$ gebildeten Determinante, welche der Einheit gleich ist, so erhält man die Bedingungsgleichungen in der Form verschwindender symbolischer Producte, für deren Auslegung die getroffene Uebereinkunft bestehen bleiben soll. Es sind die folgenden:

$$(\xi_1\partial_1 + \xi_2\partial_2 + \xi_3\partial_3)(\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + \zeta_3 x_3)(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \eta_3 x_3) = 0,$$
$$(\eta_1\partial_1 + \eta_2\partial_2 + \eta_3\partial_3)(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3)(\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + \xi_3 x_3) = 0,$$
$$(\zeta_1\partial_1 + \zeta_2\partial_2 + \zeta_3\partial_3)(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \eta_3 x_3)(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3) = 0,$$

deren Gültigkeit leicht direct verificirt werden kann.

Die eben in verschiedenen Formen dargestellten Bedingungen für die Möglichkeit der simultanen Transformationen

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = H_1^2 d\varrho_1^2 + H_2^2 d\varrho_2^2 + H_3^2 d\varrho_3^2,$$
$$\Sigma a_{hk}\, dx_h\, dx_k = \tau_{11} H_1^2 d\varrho_1^2 + \tau_{22} H_2^2 d\varrho_2^2 + \tau_{33} H_3^2 d\varrho_3^2$$

sind offenbar auch die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die simultanen Transformationen

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = H_1^2 d\varrho_1^2 + H_2^2 d\varrho_2^2 + H_3^2 d\varrho_3^2,$$
$$\Sigma e_{hk}\, dx_h\, dx_k = \sigma_{11} H_1^2 d\varrho_1^2 + \sigma_{22} H_2^2 d\varrho_2^2 + \sigma_{33} H_3^2 d\varrho_3^2,$$

in denen $\Sigma e_{hk}\, dx_h\, dx_k$ eine in den Differentialen $dx$ quadratische Form bezeichnet, welche durch die nämliche orthogonale Substitution in eine Summe quadratischer Glieder übergeht, durch welche $\Sigma a_{hk}\, dx_h\, dx_k$ in eine solche übergeführt wird. Eine derartige, wesentlich positive, quadratische Form ist:

$$\varepsilon^2 = \Sigma(a_{h1}\, dx_1 + a_{h2}\, dx_2 + a_{h3}\, dx_3)^2.$$

Betrachtet man $dx_1$, $dx_2$, $dx_3$ als die unendlich kleinen Coordinaten eines dem Punkte $M$ unendlich nahe benachbarten Punktes $M'$ und $\varepsilon$ als eine

unendlich kleine Constante, so stellt die vorstehende Gleichung die Gleichung eines Ellipsoides dar, welches mit dem Elasticitätsellipsoid im Punkte $M$ coaxial ist.

Die Gleichungen

$$J_1 = 0, \quad J_2 = 0, \quad J_3 = 0$$

lassen sich daher auch als die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Eintreten des Umstandes auffassen, dass in jedem Punkte $M$ des Raumes die Hauptaxen sowohl des erwähnten Ellipsoides, als auch des Elasticitätsellipsoides in die Richtungen der Durchschnittslinien eines Systems orthogonaler Flächen fallen. Die Gleichungen der drei Flächenschaaren dieses Systems ergeben sich alsdann durch Integration der drei *integrablen* Differentialgleichungen

$$\xi_i dx_1 + \eta_i dx_2 + \zeta_i dx_3 = 0.$$

4.

Eine besondere Betrachtung verdient der Fall, dass die quadratische Form $\Sigma a_{hk} dx_h dx_k$ in der Gestalt

$$\Sigma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_h \partial x_k} dx_h dx_k$$

vorausgesetzt wird. Unter dieser Voraussetzung verschwinden die sämmtlichen Grössen $\alpha_{hk}$ und mit ihnen die beiden Invarianten $J_1$ und $J_2$. Zur Coincidenz der Richtungen der Hauptaxen des Ellipsoids

$$\varepsilon^2 = \Sigma \left( d \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} \right)^2$$

mit den Richtungen der Durchschnittslinien eines orthogonalen Flächensystems in jedem Raumpunkt ist daher die *eine* Gleichung

$$J_3 = 0$$

hinreichend und nothwendig. Dieselbe stellt eine in Beziehung auf die Differentialquotienten der höchsten Ordnung lineare partielle Differentialgleichung *dritter* Ordnung für die Function $\varphi$ dar. In geordneter Form wird diese partielle Differentialgleichung

$$0 = \Sigma A_{hik} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_h \partial x_i \partial x_k}.$$

Die Coefficienten $A_{hik}$ sind aus der Entwickelung der Determinante

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11} x_1 + \varphi_{12} x_2 + \varphi_{13} x_3 & x_1 & b_{11} x_1 + b_{12} x_2 + b_{13} x_3 \\ \varphi_{21} x_1 + \varphi_{22} x_2 + \varphi_{23} x_3 & x_2 & b_{21} x_1 + b_{22} x_2 + b_{23} x_3 \\ \varphi_{31} x_1 + \varphi_{32} x_2 + \varphi_{33} x_3 & x_3 & b_{31} x_1 + b_{32} x_2 + b_{33} x_3 \end{vmatrix}$$

nach den Producten $x_h x_i x_k$ zu entnehmen, in welcher der Kürze wegen die Differentialquotienten der Function $\varphi$ durch angefügte Indices bezeichnet sind.

Diese Determinante und ihre Entwickelung ist eine, aus der Lehre von der Zerlegung der Discriminante der cubischen Gleichung $\varDelta = 0$ in eine Summe von Quadraten, wohlbekannte. Die Angabe der zehn Coefficienten, welche die dritten Differentialquotienten der Function $\varphi$ in der zu bildenden partiellen Differentialgleichung $J_3 = 0$ behaften, kann daher an dieser Stelle unterbleiben. Diese Coefficienten verschwinden gleichzeitig, wenn unter den Wurzeln der entsprechenden Gleichung $\varDelta = 0$ zwei gleiche auftreten.

Der besondere Fall, dass für alle Punkte des Raumes zwei dieser Wurzeln zusammenfallen, welcher eintritt, wenn die Function $\varphi$ zwei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung Genüge leistet, durch deren Erfüllung auch die Gleichung $J_3 = 0$ erfüllt wird, möge von den ferneren Betrachtungen ausgeschlossen sein.

Die partielle Differentialgleichung dritter Ordnung, in welche unter den genannten Voraussetzungen die Bedingung $J_3 = 0$ übergeht, möge in der Folge durch

$$(4.)\qquad \{\varphi\} = 0$$

bezeichnet sein.

Mit jedem besonderen Integral $\varphi$ dieser Gleichung hängt alsdann ein besonderes orthogonales Flächensystem zusammen, dessen Schaaren durch die Differentialgleichungen

$$\xi_i dx_1 + \eta_i dx_2 + \zeta_i dx_3 = 0 \qquad i = 1, 2, 3$$

bestimmt werden, welche unter der in Beziehung auf $\varphi$ gemachten Voraussetzung integrabel sind. Die endlichen Gleichungen desselben seien

$$(\varrho.)\qquad \varrho_i = f_i(x_1, x_2, x_3).$$

Dieses Flächensystem möge als das zum Integral $\varphi$ der Differentialgleichung $\{\varphi\} = 0$ gehörige bezeichnet werden*). Durch die Relationen $(\varrho.)$ sind die Grössen $x_1, x_2, x_3$ derart als Functionen von $\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3$ bestimmt, dass den Gleichungen

$$(5.)\quad \begin{cases} dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = H_1^2 d\varrho_1^2 + H_2^2 d\varrho_2^2 + H_3^2 d\varrho_3^2, \\ \Sigma\, dx_i\, d\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) = \tau_{11} H_1^2 d\varrho_1^2 + \tau_{22} H_2^2 d\varrho_2^2 + \tau_{33} H_3^2 d\varrho_3^2, \\ \Sigma\, d\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2 = \tau_{11}^2 H_1^2 d\varrho_1^2 + \tau_{22}^2 H_2^2 d\varrho_2^2 + \tau_{33}^2 H_3^2 d\varrho_3^2 \end{cases}$$

Genüge geleistet wird.

*) Das bekannte System confocaler Ellipsoide und Hyperboloide gehört, beiläufig bemerkt, zur Function $\varphi = \frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 - (ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2)$.

Führt man in dieselben anstatt der Variabeln $x_i$ neue Variable $y_i$ durch die *Legendre*schen Relationen

$$\psi = x_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} - \varphi,$$

$$y_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i},$$

$$x_i = \frac{\partial\psi}{\partial y_i},$$

ein, so erhält man die neuen Beziehungen:

$$dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2 = \tau_{11} H_1^2 d\varrho_1^2 + \tau_{22} H_2^2 d\varrho_2^2 + \tau_{33} H_3^2 d\varrho_3^2,$$

$$\Sigma dy_i d\left(\frac{\partial\psi}{\partial y_i}\right) = \tau_{11} H_1^2 d\varrho_1^2 + \tau_{22} H_2^2 d\varrho_2^2 + \tau_{33} H_3^2 d\varrho_3^2,$$

$$\Sigma\left(d\frac{\partial\psi}{\partial y_i}\right)^2 = H_1^2 d\varrho_1^2 + H_2^2 d\varrho_2^2 + H_3^2 d\varrho_3^2,$$

welche die nämliche Form haben wie die Gleichungen, aus deren Transformation sie entstanden sind.

Aus ihnen folgt, dass die Function $\psi$ der Variabeln $y_i$ ebenfalls der Differentialgleichung

$$|\psi| = 0$$

Genüge leistet, und dass die Differentialgleichung $|\varphi| = 0$ durch die *Legendre*sche Substitution in eine Differentialgleichung der nämlichen Form übergeführt wird.

Diese Bemerkung führt zu einem Reciprocitätssatz zwischen den orthogonalen Flächenschaaren, welche zur Function $\varphi$, und denjenigen, welche zur Function $\psi$ gehören, welcher sich in der folgenden Form aussprechen lässt:

Sind

$$\varrho_i = f_i(x_1, x_2, x_3)$$

die Gleichungen der Schaaren eines orthogonalen Flächensystems, welches zum Integral $\varphi$ der Differentialgleichung

$$|\varphi| = 0$$

gehört, und substituirt man in dieselben:

$$\psi = x_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} - \varphi,$$

$$x_i = \frac{\partial\psi}{\partial y_i},$$

so sind die Gleichungen

$$\varrho_i = f_i\left(\frac{\partial\psi}{\partial y_1}, \frac{\partial\psi}{\partial y_2}, \frac{\partial\psi}{\partial y_3}\right)$$

wiederum die Gleichungen eines orthogonalen Flächensystems, und zwar desjenigen, welches zur Function $\psi$ gehört.

Man kann auch aus den Gleichungen der Schaaren $\varrho_i = f(x_1, x_2, x_3)$ die Gleichungen der Schaaren eines neuen orthogonalen Flächensystems ableiten, welche einen willkürlichen Parameter mehr enthalten, als die ursprünglichen. Aus den Gleichungen (5.) folgt offenbar auch

$$\Sigma\left[d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}+c x_i\right)\right]^2 = \theta_1 H_1^2 d\varrho_1^2+\theta_2 H_2^2 d\varrho_2^2+\theta_3 H_3^2 d\varrho_3^2,$$

und hieraus durch die Substitutionen:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}+c x_i = z_i,$$

$$(6.) \qquad dz_1^2+dz_2^2+dz_3^2 = \theta_1 H_1^2 d\varrho_1^2+\theta_2 H_2^2 d\varrho_2^2+\theta_3 H_3^2 d\varrho_3^2.$$

Es gehen daher die Gleichungen der Flächenschaaren

$$\varrho_i = f_i(x_1, x_2, x_3)$$

durch die angegebenen Substitutionen in neue von der Form

$$\varrho_i = F_i(z_1, z_2, z_3)$$

über, welche in Folge der Gleichung (6.) wiederum die Schaaren eines orthogonalen Flächensystems darstellen.

Die beiden eben ausgesprochenen Sätze erlauben, jedem orthogonalen Flächensystem, für welches die Function $\varphi$, zu welcher dieses Flächensystem gehört, bekannt ist, neue orthogonale Flächensysteme zuzuordnen.

5.

Versucht man, in der Absicht, die Differentialgleichungen neuer orthogonaler Flächensysteme aufzustellen, der partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung $|\varphi| = 0$ durch particulare Integrale allgemeiner Natur zu genügen, so wird man zunächst zu der Frage geführt: unter welcher Bedingung genügt eine Function $\varphi(\sigma)$ des Arguments

$$\sigma = X_1+X_2+X_3,$$

in welchem $X_i$ nur Function von $x_i$, der in Rede stehenden Differentialgleichung.

Substituirt man die Function $\varphi(\sigma)$ in die Differentialgleichung $\{\varphi\} = 0$, oder bildet man einfacher die Invariante $J_3$ der quadratischen Form

$$\Sigma \frac{\partial^2 \varphi(\sigma)}{\partial x_h \partial x_k} dx_h dx_k,$$

so erhält man für die gesuchte Bedingung:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & X_1'' & X_1''' X_1' - 2\varkappa X_1''^2 \\ 1 & X_2'' & X_2''' X_2' - 2\varkappa X_2''^2 \\ 1 & X_3'' & X_3''' X_3' - 2\varkappa X_3''^2 \end{vmatrix} \cdot X_1' X_2' X_3',$$

in welcher

$$2\varkappa = \frac{\partial\left(\frac{\varphi'(\sigma)}{\varphi''(\sigma)}\right)}{\partial\sigma} + 2.$$

Diese Bedingung zerfällt in die folgenden drei

$$X_i''' X_i' = 2\varkappa [X_i''^2 + p X_i'' + q] \qquad i = 1,\ 2,\ 3,$$

wenn man das Eintreten des Umstandes, dass eine der Functionen $X_i$ einer Constanten gleich wird, verwirft.

Eine nähere Untersuchung dieser drei Bedingungsgleichungen zeigt, dass sie im Allgemeinen nur erfüllt sein können, wenn die Function $\varkappa$ des Arguments $\sigma$, und in Folge dessen $p$ und $q$, constante Grössen sind. Eine Ausnahme bildet nur der Fall, dass das Argument $\sigma$ von der Form

$$\sigma = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2$$

wäre, in welchem Falle diese Bedingungen oder die Gleichung $\{\varphi(\sigma)\} = 0$ für jede Function $\varphi$ erfüllt werden. Die cubische Gleichung, von welcher die Transformation der Form

$$\Sigma \frac{\partial^2 \varphi(\sigma)}{\partial x_h \partial x_k} dx_h dx_k$$

abhängt, hat alsdann zwei gleiche Wurzeln. Wird dieser Fall ausgeschlossen, so sind die Bedingungen für den Umstand, dass die Function $\varphi(X_1 + X_2 + X_3)$ der Differentialgleichung $\{\varphi\} = 0$ genügt, die folgenden

$$\frac{\partial\left(\frac{\varphi'(\sigma)}{\varphi''(\sigma)}\right)}{\partial\sigma} = 2(\varkappa - 1),$$

$$(7.) \qquad X_i''' X_i' = 2\varkappa . (X_i'' - a)(X_i'' - b) \qquad i = 1,\ 2,\ 3,$$

in welchen Bedingungen $\varkappa$, $a$, $b$ willkürliche Constanten darstellen. Die erste derselben erfordert, dass die Function $\varphi(\sigma)$ bis auf einen nicht in

Frage kommenden constanten Factor die Form habe

$$(8.)\qquad \varphi(\sigma) = \{A+2(\varkappa-1)[X_1+X_2+X_3]\}^{\left\{\frac{1}{2(\varkappa-1)}\right\}+1},$$

welche unter der Voraussetzung $\varkappa = 1$ in

$$\varphi(\sigma) = e^{B(X_1+X_2+X_3)}$$

übergeht. Unter dieser Voraussetzung werden die Bedingungen, denen die Functionen $X_i$ zu genügen haben, die nachstehenden

$$X_i''' X_i' = 2(X_i''-a)(X_i''-b)$$

und stimmen überein mit denjenigen, welche *Serret* aus der bekannten *Bouquet*schen Bedingungsgleichung abgeleitet hat, welche ausdrückt, dass die Flächenschaar

$$\lambda = X_1+X_2+X_3$$

einem orthogonalen System angehört. Die *Serret-Bouquet*sche Gleichung hat daher eine allgemeinere Bedeutung, als ihr bisher beigelegt wurde. Sie drückt auch die Bedingung für den Umstand aus, dass die Function $e^{B(X_1+X_2+X_3)}$ der partiellen Differentialgleichung $\{\varphi\} = 0$ Genüge leistet.

Geht man dazu über, die Differentialgleichungen des, der Gleichung $\{\varphi(\sigma)\} = 0$ zugehörigen orthogonalen Flächensystems aufzustellen, in welcher $\varphi(\sigma)$ durch (8.) definirt wird, so hat man zunächst die quadratische Form

$$\Sigma \frac{\partial^2 \varphi(\sigma)}{\partial x_h \partial x_k} dx_h dx_k = \Phi$$

durch die orthogonale Substitution

$$ds_i = \xi_i dx_i + \eta_i dy_i + \zeta_i dz_i = H_i d\varrho_i$$

in die Form

$$\varphi'(\sigma).(\tau_1 ds_1^2 + \tau_2 ds_2^2 + \tau_3 ds_3^2)$$

zu verwandeln. Man bemerkt sofort, dass diese quadratische Form die Gestalt hat, welche der *Jacobi*schen Behandlung des Hauptaxenproblems der Flächen zweiten Grades entspricht. Für die cubische Gleichung zur Bestimmung der Werthe von $\tau_i$ erhält man leicht:

$$\frac{X_1'^2}{\tau_i - X_1''} + \frac{X_2'^2}{\tau_i - X_2''} + \frac{X_3'^2}{\tau_i - X_3''} = A + 2(\varkappa-1)(X_1+X_2+X_3)$$

und für die Differentialgleichungen $\xi_i dx_1 + \eta_i dx_2 + \zeta_i dx_3 = 0$ des zugehörigen orthogonalen Flächensystems:

$$\frac{X_1' dx_1}{\tau_i - X_1''} + \frac{X_2' dx_2}{\tau_i - X_2''} + \frac{X_3' dx_3}{\tau_i - X_3''} = 0 \qquad i = 1, 2, 3.$$

Diese Differentialgleichungen sind unter der Voraussetzung des Bestehens der Gleichungen (7.), welche hier zur Geltung gelangen, neuerdings von *Darboux* integrirt worden, und daher sind die zur Function $\varphi(\sigma)$ gehörigen orthogonalen Flächensysteme völlig bekannte. (Comptes rendus 1877 pag. 382, Annales de l'école normale 1878.)

Die im vorigen Paragraphen aufgestellten Reciprocitätssätze, welche für die Function $\varphi(\sigma)$ offenbar unabhängig von der *Anzahl* der Variabeln $x_i$ gelten, erlauben den eleganten Untersuchungen von *Darboux* durch Hinzufügung neuer orthogonaler Systeme eine Erweiterung zu geben.

6.

Die Aufstellung der mehrfach untersuchten partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung, welche die Bedingung ausdrückt, dass eine Flächenschaar

$$\varphi = \lambda$$

einem orthogonalen Systeme angehört, lässt sich auf die Bildung der im Vorhergehenden besprochenen Invariantenformen $J$ zurückführen. Diese Zurückführung geschieht vermöge einer von der üblichen abweichenden Behandlung der Aufgabe: die Richtungen der Tangenten an die Krümmungslinien und die Hauptkrümmungen einer Fläche in einem gegebenen Punkte derselben zu bestimmen. ***Man bemerkt ohne Weiteres, dass die nämliche Behandlung auch anwendbar bleibt für die Lösung des verallgemeinerten Problems in einem Raume von n Dimensionen.***

Bezeichnen $\xi_1\eta_1\zeta_1$, $\xi_2\eta_2\zeta_2$, $\xi_3\eta_3\zeta_3$ die Richtungscosinus der Normalen und der Tangenten der ersten und zweiten Krümmungslinie im Punkte $x_1x_2x_3$ einer krummen Fläche, welche durch die Gleichung $\varphi=\lambda$ gegeben ist, ferner $H_1$ und $\omega$ die Grössen

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2}},$$

$$\omega = H_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial H_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\frac{\partial H_1}{\partial x_3}\right) = H_1\Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial H_1}{\partial x_i} = \frac{H_1}{r_1}$$

und schliesslich $r_2$ und $r_3$ die Hauptkrümmungsradien in demselben Punkte, und setzt man

$$\xi_i\,dx_1+\eta_i\,dx_2+\zeta_i\,dx_3 = ds_i,$$

so geht durch diese Substitutionen die, in den Differentialen $dx$ quadratische, Form

$$dx_1\, d\frac{\varphi_1}{(\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2)} + dx_2\, d\frac{\varphi_2}{(\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2)} + dx_3\, d\frac{\varphi_3}{(\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2)} = F,$$

beziehungsweise für $n$ Variable

$$\Sigma\, dx_i\, d\frac{\varphi_i}{\Sigma \varphi_i^2} = F$$

über in die folgende:

$$\omega\, ds_1^2 + \frac{H_1}{r_2} ds_2^2 + \frac{H_1}{r_3} ds_3^2,$$

beziehungsweise in

$$H_1 \Sigma \frac{ds_i^2}{r_i},$$

wie eine einfache Betrachtung der Gleichungen lehrt, welche die Cosinus $\xi_i \eta_i \zeta_i$ etc. bestimmen.

Setzt man

$$F = H_1 \Sigma a_{hk}\, dx_h\, dx_k, \qquad a_{hk} = a_{kh},$$

so ersieht man, dass die Hauptkrümmungen $\frac{1}{r_2}$ und $\frac{1}{r_3}$ Wurzeln der cubischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\tau & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22}-\tau & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\tau \end{vmatrix} = 0$$

sind, welcher Gleichung auch die dritte Wurzel

$$\frac{1}{r_1} = \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial H_1}{\partial x_i}$$

angehört, und dass sich die Cosinus $\xi_i \eta_i \zeta_i$ bestimmen lassen nach den Regeln, die bei der Behandlung des Hauptaxenproblems einer Fläche zweiten Grades statthaben.

Soll die Fläche $\varphi = \lambda$ einem orthogonalen Flächensysteme angehören, so müssen die $ds_i$ sich in der Form $H_i\, d\varrho_i$ darstellen lassen. Die für diese Darstellung hinreichenden und nothwendigen Bedingungen sind durch die Gleichungen

$$J_1 = 0, \quad J_2 = 0, \quad J_3 = 0,$$

welche für die Form $F$ zu entwickeln sind, gegeben.

Diese drei partiellen Differentialgleichungen reduciren sich im vorliegenden Falle auf eine einzige. Da nämlich die Bedingung

$$ds_1 = H_1\, d\varrho_1 = H_1\, d\varphi,$$

und also die zugehörige Integrabilitätsbedingung

$$\xi_1\left(\frac{\partial \eta_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_2}\right) + \eta_1\left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3}\right) + \zeta_1\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1}\right) = 0$$

erfüllt ist, so folgt aus den Formeln des §. 2 zwischen den hier zur Anwendung gelangenden Invarianten $J$ die Beziehung

$$0 = J_3 - 2J_2\frac{1}{r_1} + J_1\frac{1}{r_1^2}.$$

Mit Hülfe des bekannten Umstandes, dass die Summe

$$\xi_i\left(\frac{\partial\eta_i}{\partial x_3} - \frac{\partial\zeta_i}{\partial x_2}\right) + \eta_i\left(\frac{\partial\zeta_i}{\partial x_1} - \frac{\partial\xi_i}{\partial x_3}\right) + \zeta_i\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial x_2} - \frac{\partial\eta_i}{\partial x_1}\right)$$

für $i = 1$ denselben Werth ergiebt, wie für $i = 2$, ergiebt sich leicht die zweite Beziehung:

$$J_2 = \frac{1}{r_1}J_1.$$

In Folge dieser Gleichungen verschwinden gleichzeitig mit der Invariante $J_1$ auch die beiden anderen $J_2$ und $J_3$, und die einzige Bedingung für den Umstand, dass die Gleichung $\varphi = \lambda$ eine Flächenschaar angiebt, die einem orthogonalen Systeme angehört, ist durch die Bedingung

$$J_1 = 0$$

ausgedrückt, welche der quadratischen Form $F$, oder einem beliebigen Multiplum derselben, zu entnehmen ist.

Die für die Bestimmung der Hauptkrümmungen einer Fläche, deren Gleichung $\varphi = 0$, hier gewählte Behandlungsweise führt auf eine bemerkenswerthe Darstellung der quadratischen Gleichung, aus welcher diese Hauptkrümmungen hervorgehen.

Bezeichnen $\tau_2$ und $\tau_3$ die mit $H_1$ multiplicirten Werthe dieser Hauptkrümmungen, so genügen dieselben der quadratischen Gleichung

$$\frac{\varphi_1^2}{\tau - X_1} + \frac{\varphi_2^2}{\tau - X_2} + \frac{\varphi_3^2}{\tau - X_3} = 0,$$

wenn

$$X_k = 2\varphi_{hi}\frac{\varphi_k^2}{\varphi_h\varphi_i} - \frac{\varphi_k}{\varphi_h\varphi_i}(\varphi_{12}\varphi_3 + \varphi_{31}\varphi_2 + \varphi_{23}\varphi_1) + \varphi_{kk}$$

für jede positive Permutation $hik$ der Zahlen 1 2 3 gesetzt wird.

Berlin, April 1880.

---

# Bemerkungen zu dem Aufsatze des Herrn *Voigt* „Theorie des leuchtenden Punktes.“

(Von Herrn *G. Kirchhoff.*)

In meiner „Mechanik“ (Vorlesung 23, §. 4) habe ich die Bewegung einer compressibeln Flüssigkeit behandelt, die durch unendlich kleine Bewegungen einer in dieser befindlichen, starren Kugel hervorgerufen wird. Dieser Aufgabe sehr ähnlich ist die Aufgabe, die Herr *Voigt* in seiner „Theorie des leuchtenden Punktes“ überschriebenen Abhandlung gelöst hat; die Methode, die ich dort benutzt habe, ist auch hier anwendbar und führt viel schneller zum Ziele, als der Weg, den Herr *Voigt* eingeschlagen hat.

Herr *Voigt* denkt sich ein festes, isotropes, elastisches Mittel, das nach allen Richtungen sich in die Unendlichkeit erstreckt und eine starre Kugel umgiebt, an deren Oberfläche es derart haftet, dass keine relativen Verschiebungen hier stattfinden; er untersucht dann die Bewegung des Mittels unter der Voraussetzung, dass die Kugel gegebene, unendlich kleine Schwingungen macht; er führt die Rechnung für die beiden Fälle durch, dass die Kugel entweder um einen ihrer Durchmesser sich dreht oder, ohne sich zu drehen, in gerader Linie hin und hergeht; auf diese beiden Fälle lässt jeder andere sich reduciren.

Es seien $u$, $v$, $w$ die Componenten der Verrückung zur Zeit $t$ eines materiellen Punktes des elastischen Mittels, der beim Gleichgewichtszustande die Coordinaten $x$, $y$, $z$ hat; dann ist, wie *Clebsch* im 61. Bande dieses Journals gezeigt hat,

$$u = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z},$$

$$v = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x},$$

$$w = \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y},$$

wo $P$ eine Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = a^2 \Delta P$$

ist und $U, V, W$ Lösungen der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = b^2 \Delta \varphi$$

sind, wenn

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2},$$

$a$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit longitudinaler Wellen, $b$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit transversaler Wellen ist.

Man kommt auf den ersten der beiden von Herrn *Voigt* behandelten Fälle, wenn man diese Gleichungen in die folgenden specialisirt:

$$u = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial W}{\partial x}, \quad w = 0,$$

$$W = \frac{1}{r} F(r - bt),$$

wo

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ist und $F$ eine unbestimmte Function des zugesetzten Arguments bedeutet. Bei der durch diese Gleichungen dargestellten Bewegung behalten die Theilchen, die beim Gleichgewichtszustande auf einer mit dem beliebigen Radius $r$ beschriebenen Kugelfläche liegen, stets ihre relative Lage bei, während diese Kugelfläche sich so um die $z$-Axe dreht, dass ihr Drehungswinkel zur Zeit $t$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r}$$

ist. Ist nun in dem elastischen Mittel eine starre Kugel vorhanden, deren Oberfläche die Gleichung $r = R$ hat, und die um die $z$-Axe so sich dreht, dass $f(t)$ ihr Drehungswinkel zur Zeit $t$ ist, so muss für $r = R$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} = f(t)$$

oder, da

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -b \frac{\partial F}{\partial r}$$

ist,

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{b}{r} F = -b r^2 f(t)$$

sein. Hieraus folgt, wenn über die Constante der Integration auf gewisse Weise verfügt wird,

$$F(R-bt) = -bR^2 e^{-\frac{bt}{R}} \int_0^t dt\, e^{\frac{bt}{R}} f(t).$$

Setzt man hier $t+\frac{R-r}{b}$ an Stelle von $t$ und dividirt durch $r$, so ergiebt sich

$$W = -\frac{bR^2}{r} e^{-\frac{bt+R-r}{R}} \int_0^{t+\frac{R-r}{b}} dt\, e^{\frac{bt}{R}} f(t).$$

Nimmt man an, dass $f(t)$ verschwindet, wenn $t<0$ ist, so verschwinden für $t=0$ und $r>R$ hiernach $W$ und $\frac{\partial W}{\partial t}$, also auch $u$, $v$, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$. Der für $W$ aufgestellte Ausdruck setzt also voraus, dass alle Theilchen des elastischen Mittels zur Zeit $t=0$ in ihren Gleichgewichtslagen ruhen. Aus diesem Ausdruck folgt unmittelbar (abgesehen von der Verschiedenheit der Bezeichnung) für den Drehungswinkel $\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}$ der von Herrn *Voigt* in seiner Gleichung (9.) angegebene Werth.

Etwas verwickelter ist die Rechnung für den zweiten der von Herrn *Voigt* behandelten Fälle. Für ihn hat man zu setzen

$$P=\frac{\partial Q}{\partial z},\quad U=\frac{\partial S}{\partial y},\quad V=-\frac{\partial S}{\partial x},\quad W=0,$$

$$Q=\frac{1}{r}F(r-at),\quad S=\frac{1}{r}G(r-bt),$$

und die Functionen $F$ und $G$ passend zu bestimmen. Bei dieser Annahme ist

$$u=\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial z}=\frac{xz}{r^2}\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial r}+\frac{\partial^2 S}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r}\right),$$

$$v=\frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 S}{\partial y\partial z}=\frac{yz}{r^2}\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial r}+\frac{\partial^2 S}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r}\right),$$

$$w=\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}=\frac{z^2}{r^2}\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial r}+\frac{\partial^2 S}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial r}-\frac{\partial^2 S}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r}.$$

Soll nun für $r=R$

$$u=0,\quad v=0,\quad w=f(t)$$

sein, so wird dem genügt, wenn für diesen Werth von $r$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial r}+\frac{\partial^2 S}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial r}-\frac{\partial^2 S}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r} = f(t),$$

d. h.

$$\frac{3}{r^3}F-\frac{3}{r^2}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}+\frac{3}{r^3}G-\frac{3}{r^2}\frac{\partial G}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} = 0$$

$$-\frac{1}{r^3}F+\frac{1}{r^2}\frac{\partial F}{\partial r}\qquad -\frac{1}{r^3}G+\frac{1}{r^2}\frac{\partial G}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} = f(t)$$

ist. Erwägt man, dass aus diesen Gleichungen folgt

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}-\frac{2}{r}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = 3f(t),$$

und führt man statt der Differentialquotienten nach $r$ diejenigen nach $t$ ein, so findet man zur Bestimmung der Functionen $F(R-at)$ und $G(R-bt)$ die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}-\frac{2}{b^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = 3Rf(t),$$

$$3F+\frac{3R}{a}\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{R^2}{a^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}+3G+\frac{3R}{b}\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{R^2}{b^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = 0.$$

Die erste von diesen giebt, wenn man über die Constanten der Integration passend verfügt,

$$F(R-at) = 2\frac{a^2}{b^2}G(R-bt)+3a^2R\int_0^t dt\int_0^t dt f(t),$$

und die zweite wird in Folge hiervon

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}+\frac{2a+b}{R}\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{2a^2+b^2}{R^2}G = b^2Rg(t),$$

wo

$$g(t) = f(t)+\frac{3a}{R}\int_0^t dt f(t)+\frac{3a^2}{R^2}\int_0^t dt\int_0^t dt f(t).$$

Sie wird erfüllt durch

$$G(R-bt) = \frac{b^2R}{\lambda_2-\lambda_1}\left\{e^{\lambda_1 t}\int_0^t dt\, g(t)\, e^{-\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}\int_0^t dt\, g(t)\, e^{-\lambda_2 t}\right\},$$

wo $\lambda_1$ und $\lambda_2$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\lambda^2+\frac{2a+b}{R}\lambda+\frac{2a^2+b^2}{R^2} = 0$$

bedeuten. Hiermit sind $G(R-bt)$ und $F(R-at)$ bestimmt; setzt man in ihren Ausdrücken $t+\frac{R-r}{b}$ und $t+\frac{R-r}{a}$ an Stelle von $t$, so findet man $G(r-bt)$ und $F(r-at)$, mithin auch $Q$ und $S$. Nimmt man an, dass $f(t)$ für alle negativen Werthe von $t$ verschwindet, so verschwinden für $t<0$ und $r>R$ die Grössen $Q$, $S$, $\frac{\partial Q}{\partial t}$, $\frac{\partial S}{\partial t}$, also auch $u$, $v$, $w$, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$;

die aufgestellten Formeln gelten daher für den Fall, dass das elastische Mittel bis zum Augenblicke $t = 0$ sich in Ruhe befindet.

Herr *Voigt* hat seine Betrachtungen auf den Fall beschränkt, dass das Mittel incompressibel, also $a$ unendlich gross ist. Unter dieser Voraussetzung werden die beiden Differentialgleichungen, die zur Bestimmung von $F(R-at)$ und $G(R-bt)$ dienen,

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -\tfrac{3}{2} b^2 R f(t),$$

$$3F + 3G + \frac{3R}{b}\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{R^2}{b^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = 0;$$

daraus findet man

$$S = -\tfrac{3}{2}\frac{b^2 R}{r}\int_0^{t+\frac{R-r}{b}} dt \int_0^t dt f(t),$$

$$Q = \tfrac{3}{2}\frac{b^2 R}{r}\left\{\int_0^t dt \int_0^t dt f(t) + \frac{R}{b}\int_0^t dt f(t) + \tfrac{1}{3}\frac{R^2}{b^2} f(t)\right\},$$

und hieraus folgen dieselben Werthe der Verrückungen, die Herr *Voigt* in den Gleichungen (26.) seiner Abhandlung angegeben hat.

Berlin, im April 1880.

---

# Ueber einen fundamentalen Satz aus der kinematischen Geometrie des Raumes.

(Von Herrn *Geiser* in Zürich.)

---

In dem kürzlich erschienenen Buche des Herrn *Mannheim* über darstellende Geometrie *) stellt der Verfasser in übersichtlicher Weise die hauptsächlichsten der schönen Resultate zusammen, auf welche ihn seine langjährigen, so erfolgreichen Studien über die Bewegung starrer Systeme im Raume geführt haben. Er behandelt auf Seite 262 derselben die Ortsveränderungen einer Figur, die an vier Bedingungen gebunden sind, und giebt den Satz:

„*Lorsqu'une figure de forme invariable se déplace de manière que quatre de ses points restent sur quatre surfaces données, pour une position quelconque de cette figure, les normales aux surfaces trajectoires de tous ses points rencontrent deux mêmes droites.*"

Dabei findet sich als Anmerkung: „Voir Journal de Mathématiques de *Liouville,* 2ᵉ série t. XI, 1866 où j'ai énoncé pour la première fois ce théorème." Auch in anderen, neueren Schriften, welche die kinematische Geometrie behandeln, wird der citirte Satz mit seinen zahlreichen Consequenzen auf die nämliche Quelle zurückgeführt, so dass es vielleicht nicht unangemessen erscheint, daran zu erinnern, dass derselbe schon früher ausgesprochen worden ist. In der That trug *Steiner* am 26. April 1855 der Berliner Akademie einen Aufsatz des Prof. *Schönemann* über *die Construction von Normalen und Normalebenen gewisser krummer Flächen und Linien* vor, welcher folgendermaassen beginnt **):

„Wenn ein fester Körper sich mit vier unveränderlichen Punkten auf vier gegebenen Oberflächen bewegt, so muss sich im Allgemeinen jeder

---

*) Cours de Géométrie descriptive, comprenant les Éléments de la Géométrie cinématique, par *A. Mannheim,* professeur à l'École polytechnique. Paris, Gauthier-Villars, 1880.

**) Berliner Monatsberichte, Jahrgang 1855, pag. 255.

Punkt desselben auf einer bestimmten Oberfläche bewegen. Es entsteht nun die Aufgabe, die Normale der Oberfläche für einen bestimmten Punkt des Körpers durch Construction zu finden.“

1. „Bezeichnen wir die vier Punkte des Körpers mit $a$, $b$, $c$, $d$ und die vier Oberflächen, auf welchen er sich mit diesen vier Punkten bewegen soll, mit $A$, $B$, $C$, $D$, ferner die Normalen, die man auf $A$, $B$, $C$, $D$ in den Punkten $a$, $b$, $c$, $d$ errichten kann, mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ und irgend einen Punkt des Körpers mit $p$, so ist die Normale der Fläche $P$, auf welcher sich $p$ bewegen muss, zu bestimmen. Um dies zu thun, lege man durch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ die beiden geraden Linien, welche alle vier schneiden und die bekanntlich beide reell oder beide imaginär sein können; diese beiden sollen ***Richtlinien*** heissen. Nun lege man durch den Punkt $p$ und durch die beiden Richtlinien eine gerade Linie, so ist diese die gesuchte Normale der Fläche $P$.“

Man erkennt in dieser Aussage genau den Satz des Herrn ***Mannheim*** und überzeugt sich durch Einsichtnahme der Originalarbeit leicht davon, welche wichtige Consequenzen ***Schönemann*** aus diesem Fundamentaltheorem zu ziehen gewusst hat.

---

Da die ***Schönemann***sche Arbeit nur Resultate enthält, Herr ***Mannheim*** aber in seinen Abhandlungen wesentlich geometrische Methoden anwendet, so will ich, um auch meinerseits einen Beitrag zu den Erörterungen über den genannten Satz zu geben, hier einen einfachen analytischen Beweis desselben anfügen *).

Der starre Körper werde das eine Mal auf ein mit ihm fest verbundenes rechtwinkliges Coordinatensystem $X$, $Y$, $Z$, das andere Mal auf ein im Raume absolutes, ebenfalls rechtwinkliges System $\Xi$, $H$, $Z$ bezogen. Seien im ersten System die Coordinaten eines Körperpunktes $x$, $y$, $z$, im zweiten $\xi$, $\eta$, $\zeta$, so bestehen die Relationen:

$$(1.)\qquad \begin{cases} \xi = ax+by+cz+f, \\ \eta = a'x+b'y+c'z+f', \\ \zeta = a''x+b''y+c''z+f'', \end{cases}$$

---

*) Man vergleiche damit: ***Ribaucour***, Propriétés relatives aux déplacements d'un corps, assujetti à quatre conditions. [Comptes rendus des séances de l'académie des sciences, vol. 76 pag. 1347 (2. juin 1873)].

wo

$$(2.)\quad \begin{cases} a^2+b^2+c^2 = 1, \\ a'^2+b'^2+c'^2 = 1, \\ a''^2+b''^2+c''^2 = 1 \end{cases}$$

und

$$(3.)\quad \begin{cases} a'a''+b'b''+c'c'' = 0, \\ a''a+b''b+c''c = 0, \\ aa'+bb'+cc' = 0 \end{cases}$$

ist.

Wenn nun der Körper derart sich bewegt, dass jeder Punkt desselben auf einer ihm zugehörigen Oberfläche fortschreiten kann, so wird das zu einer Lage $\xi$, $\eta$, $\zeta$ des Punktes $x$, $y$, $z$ gehörige Flächenelement durch zwei unendlich benachbarte, von einander unabhängige Positionen des nämlichen Punktes: $\xi+d\xi$, $\eta+d\eta$, $\zeta+d\zeta$; $\xi+\delta\xi$, $\eta+\delta\eta$, $\zeta+\delta\zeta$ bestimmt sein, wobei sich ergiebt:

$$(4^d.)\quad \begin{cases} d\xi = x\,da+y\,db+z\,dc+df, \\ d\eta = x\,da'+y\,db'+z\,dc'+df', \\ d\zeta = x\,da''+y\,db''+z\,dc''+df'', \end{cases}$$

$$(4^\delta.)\quad \begin{cases} \delta\xi = x\,\delta a+y\,\delta b+z\,\delta c+\delta f, \\ \delta\eta = x\,\delta a'+y\,\delta b'+z\,\delta c'+\delta f', \\ \delta\zeta = x\,\delta a''+y\,\delta b''+z\,\delta c''+\delta f''. \end{cases}$$

Dazu kommen wegen (2.) und (3.)

$$(5.)\quad \begin{cases} ada+bdb+cdc = 0, \\ a'da'+b'db'+c'dc' = 0, \\ a''da''+b''db''+c''dc'' = 0, \end{cases}$$

$$(6.)\quad \begin{cases} a''da'+b''db'+c''dc' = -(a'da''+b'db''+c'dc''), \\ ada''+bdb''+cdc'' = -(a''da+b''db+c''dc), \\ a'da+b'db+c'dc = -(ada'+bdb'+cdc'). \end{cases}$$

Die Grössen, welche in (6.) jeweilen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens stehen, sollen $dp$, $dq$, $dr$ heissen. Wenn, was erlaubt ist, in den Gleichungen (5.) und (6.) das Zeichen $d$ überall durch $\delta$ ersetzt wird, so sind auch die Grössen $\delta p$, $\delta q$, $\delta r$ definirt.

Das durch die Punkte $\xi$, $\eta$, $\zeta$; $\xi+d\xi$, $\eta+d\eta$, $\zeta+d\zeta$; $\xi+\delta\xi$, $\eta+\delta\eta$, $\zeta+\delta\zeta$ gelegte Flächenelement ist parallel zu dem durch 0, 0, 0; $d\xi$, $d\eta$,

$d\zeta;\ \delta\xi,\ \delta\eta,\ \delta\zeta$ bestimmten; die durch $\xi,\ \eta,\ \zeta$ zu demselben gelegte Normale hat also zu Gleichungen:

(7.) $\quad \Xi = \xi+\varrho(d\eta\delta\zeta-d\zeta\delta\eta),\quad H = \eta+\varrho(d\zeta\delta\xi-d\xi\delta\zeta),\quad Z = \zeta+\varrho(d\xi\delta\eta-d\eta\delta\xi).$

Vermittelst der Gleichungen (4.) sind $d\xi,\ d\eta,\ d\zeta;\ \delta\xi,\ \delta\eta,\ \delta\zeta$ als lineare Functionen von $x,\ y,\ z$ ausgedrückt; aber mit Hülfe der Auflösung von (1.) nach $x,\ y,\ z$ und nachherige Substitution in (4.) stellen sie sich auch als lineare Functionen von $\xi,\ \eta,\ \zeta$ dar. Es ist unter Berücksichtigung von (5.) und (6.)

$$(8.)\quad \begin{cases} d\xi = dr.\eta-dq.\zeta+(f''dq-f'dr+df), \\ d\eta = dp.\zeta-dr.\xi+\ (fdr-f''dp+df'), \\ d\zeta = dq.\xi-dp.\eta+(f'dp-\ fdq+df''), \end{cases}$$

wo man nur $d$ mit $\delta$ zu vertauschen hat, um $\delta\xi,\ \delta\eta,\ \delta\zeta$ zu erhalten.

Die Gleichungen (7.) stellen alle zu den von sämmtlichen Körperpunkten beschriebenen Oberflächenelementen gehörigen Normalen dar, wenn die $x,\ y,\ z$, oder was damit gleichbedeutend ist, die $\xi,\ \eta,\ \zeta$ alle möglichen Werthe annehmen. Trotz der dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit der Werthsysteme von $\xi,\ \eta,\ \zeta$ sollen nun nach dem *Schönemann*schen Satz die sämmtlichen Normalen nur eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit bilden, und zwar eine solche, die man nach Herrn *Kummer* *) ein Strahlensystem erster Ordnung und erster Klasse nennt.

Um zu diesem Resultate zu gelangen, erinnere man sich **), dass die Gleichungen

$$(9.)\quad \Xi = \xi+\sigma\xi',\quad H = \eta+\sigma\eta',\quad Z = \zeta+\sigma\zeta'$$

bei unbeschränkter Variabilität von $\xi,\ \eta,\ \zeta;\ \xi',\ \eta',\ \zeta'$ die vierfache Mannigfaltigkeit aller Geraden des Raumes darstellen, dass aber aus derselben sofort ein Strahlensystem erster Ordnung und erster Klasse ausgeschieden wird, wenn man zwischen den $\xi',\ \eta',\ \zeta'$ zwei lineare homogene Gleichungen

$$(10.)\quad p_1\xi'+q_1\eta'+r_1\zeta' = 0,\quad p_2\xi'+q_2\eta'+r_2\zeta' = 0$$

statuirt, wo

$$(11.)\quad \begin{cases} p_1 = \gamma_1\eta-\beta_1\zeta+\lambda_1,\quad q_1 = \alpha_1\zeta-\gamma_1\xi+\mu_1,\quad r_1 = \beta_1\xi-\alpha_1\eta+\nu_1, \\ p_2 = \gamma_2\eta-\beta_2\zeta+\lambda_2,\quad q_2 = \alpha_2\zeta-\gamma_2\xi+\mu_2,\quad r_2 = \beta_2\xi-\alpha_2\eta+\nu_2 \end{cases}$$

---

*) Abhandlungen der Berliner Akademie, Jahrgang 1866 pag. 14.

**) *Plücker*, Neue Geometrie des Raumes, Leipzig, B. G. Teubner 1868 pag. 62 u. folg. Die hier benutzten Formeln sind übrigens leicht direkt zu verifiziren.

ist und die $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ willkürliche Constanten bedeuten. Wegen (10.) lassen sich die Gleichungen (9.) schreiben:

$$(12.)\quad \Xi = \xi+\varrho(q_1 r_2 - r_1 q_2),\quad H = \eta+\varrho(r_1 p_2 - p_1 r_2),\quad Z = \zeta+\varrho(p_1 q_2 - q_1 p_2);$$

und so hat man nun die Gleichungen eines Strahlsystems, die in die Gleichungen (7.) übergehen, wenn man die nachfolgenden Substitutionen macht:

$$(13.)\quad \frac{p_1,\ q_1,\ r_1;\ \alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1;\qquad \lambda_1,\qquad\qquad \mu_1,\qquad\qquad \nu_1}{d\xi,\ d\eta,\ d\zeta;\ dp,\ dq,\ dr;\ f''dq-f'dr+df,\ fdr-f''dp+df',\ f'dp-fdq+df''}$$

und diejenigen hinzufügt, welche man erhält, indem man oben den Index 1 durch 2, unten das Zeichen $d$ durch $\delta$ ersetzt. Die beiden Richtlinien werden gefunden als zwei gemeinschaftliche Erzeugende der drei Hyperboloide, deren Gleichungen aus

$$(14.)\quad q_1 r_2 - r_1 q_2 = 0,\quad r_1 p_2 - p_1 r_2 = 0,\quad p_1 q_2 - q_1 p_2 = 0$$

vermittelst der Substitutionen (13.) hervorgehen.

Zürich, den 15. April 1880.

---

# Ueber die Construction von Normalen und Normalebenen gewisser krummer Flächen und Linien *).

(Wieder abgedruckt aus den Monatsberichten der Akademie der Wissenschaften zu Berlin für das Jahr 1855.)

(Von Herrn Prof. *Schönemann.*)

---

Wenn ein fester Körper sich mit vier unveränderlichen Punkten auf vier gegebenen Oberflächen bewegt, so muss sich im Allgemeinen jeder Punkt desselben auf einer bestimmten Oberfläche bewegen. Es entsteht nun die Aufgabe, die Normale der Oberfläche für einen bestimmten Punkt des Körpers durch Construction zu finden.

1. Bezeichnen wir die vier Punkte des Körpers mit $a, b, c, d$ und die vier Oberflächen, auf welchen er sich mit diesen vier Punkten bewegen soll, mit $A, B, C, D$, ferner die Normalen, die man auf $A, B, C, D$ in den Punkten $a, b, c, d$ errichten kann, mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und irgend einen Punkt des Körpers mit $p$, so ist die Normale der Fläche $P$, auf welcher sich $p$ bewegen muss, zu bestimmen. Um dies zu thun, lege man durch $\alpha, \beta, \gamma$ und $\delta$ die beiden geraden Linien, welche alle vier schneiden, und die bekanntlich beide reell oder beide imaginär sein können; diese beiden sollen ***Richtlinien*** heissen. Nun lege man durch den Punkt $p$ und durch die beiden Richtlinien eine gerade Linie, so ist diese die gesuchte Normale der Fläche $P$. Sollten die Richtlinien imaginär sein, so wird nachher gezeigt werden, wie man die Normale durch reelle Construction finden könne. Sind die beiden Richtlinien reell, und liegt der Punkt $p$ auf einer derselben, so wird jede Verbindungslinie von $p$ mit einem Punkte der anderen Richtlinie eine Normale der Fläche $P$ vorstellen. Diese Fläche $P$ hat für solche Punkte $p$ immer eine Kante.

---

*) Die vorstehende Arbeit des Herrn *Geiser* gab die Veranlassung, die *Schönemann*sche Arbeit, die nicht genügend bekannt zu sein scheint, wieder abzudrucken.

2. Jede unendlich kleine Bewegung des Körpers lässt sich durch zwei Drehungen um die beiden Richtlinien darstellen.

3. Fallen die beiden Richtlinien in *eine* Linie zusammen, so reducirt sich die Bewegung des Körpers auf eine Drehung um diese Linie; d. h. die Flächen $P$ sämmtlicher Punkte $p$ des Körpers haben für diese Lage eine Kante; liegen Punkte des Körpers auf der gemeinschaftlichen Richtlinie, so haben die Flächen $P$ für diese Punkte eine Spitze. Der hierbei besprochene Fall tritt auch ein, wenn drei der Normalen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zu der einen Schaar von Geraden eines einfachen Hyperboloids gehören und die vierte zur andern Schaar.

4. Gehören die vier Normalen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zu *einer* Schaar eines einfachen Hyperboloids, so geht die ganze zweite Schaar durch $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Die Normale des Punktes $p$ ist mithin nur dann bestimmt, wenn $p$ auf dem Hyperboloid selbst liegt. Ist dies nicht der Fall, so kann der Ort des Punktes $p$ nicht mehr auf eine Oberfläche beschränkt sein, und der Begriff der Normale wird fortfallen.

5. Liegen von den vier Normalen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zwei in einer Ebene, etwa $\alpha$ und $\beta$ in der Ebene $(\alpha\beta)$, so sind die beiden Richtlinien immer reell. Die eine derselben geht nämlich durch die Schnittpunkte von $\gamma$ und $\delta$ mit der Ebene $(\alpha\beta)$ und die andere durch den Schnittpunkt von $\alpha$ mit $\beta$ und durch die beiden Linien $\gamma$ und $\delta$.

*Zusätze.* *a*) Bewegt sich eine gerade Linie mit drei Punkten $a, b, c$ auf drei Oberflächen $A, B, C$, so wird jeder Punkt $p$ der Linie sich auf einer Fläche bewegen, deren Normale man erhält, wenn man durch den Punkt $p$ diejenige Linie des durch $\alpha, \beta$ und $\gamma$ bestimmten Hyperboloids legt, welche mit diesen zu derselben Schaar gehört.

Hat man vier gerade Linien $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, welche von einer fünften geraden Linie geschnitten werden, und zieht durch einen Punkt $p$ der fünften Linie vier gerade Linien, welche auf den Hyperboloiden liegen, die durch je drei der vier Linien $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bestimmt sind, und zur Schaar dieser Linien gehören, so liegen diese vier Linien in *einer* Ebene.

Bewegt sich eine gerade Linie mit vier Punkten auf vier Oberflächen, so muss jeder Punkt derselben sich auf einer gewissen Curve bewegen. Nennt man nämlich die vier Punkte der Linie $a, b, c, d$ und die Oberflächen, auf welchen sich dieselben bewegen, $A, B, C, D$, ferner die Normalen, welche man auf den Flächen $A, B, C, D$ in den Punkten $a, b,$

*c*, *d* errichten kann, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, so wird man die Normalebene des Bahnelements jedes Punktes *p* der bewegten Linie erhalten, wenn man ihn mit der zweiten Richtlinie von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und $\delta$ verbindet.

*b*) Bewegt sich ein Körper mit zwei Punkten auf zwei festen Curven, so muss sich jeder Punkt desselben auf einer Oberfläche bewegen. Die Richtlinien werden hier gebildet durch die Verbindungslinie der beiden Curvenpunkte und durch die Kante, in welcher sich die beiden Normalebenen auf den beiden Curven schneiden.

6. Schneiden sich drei der Normalen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ in einem Punkte, etwa $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ im Punkte $(\alpha\beta\gamma)$, so haben die Flächen *P* aller Punkte *p*, die auf der Ebene liegen, welche durch den Punkt $(\alpha\beta\gamma)$ und durch $\delta$ geht, eine Kante, welche senkrecht auf dieser Ebene steht. Die Fläche *P* des Punktes $(\alpha\beta\gamma)$ selbst hat eine Spitze. Die Normalen der Flächen aller anderen Punkte sind nach diesem Schnittpunkte gerichtet.

7. Schneiden sich sämmtliche Normalen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ in einem Punkte, so sind die Normalen aller Flächen nach diesem Punkte gerichtet, und die Fläche *P* dieses Punktes hat in dieser Lage eine Spitze.

8. Bewegt sich ein Körper mit fünf Punkten *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, die nicht in gerader Linie liegen, auf fünf Oberflächen *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, so ist im Allgemeinen jeder Punkt des Körpers gezwungen, sich auf einer bestimmten Curve zu bewegen. Errichtet man nun auf *A*, *B*, *C*, *D*, *E* in den Punkten *a*, *b*, *c*, *d*, *e* die Normalen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, so treten jetzt fünf Paare von Richtlinien auf, die zu $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha\beta\gamma\varepsilon$, $\alpha\beta\delta\varepsilon$, $\alpha\gamma\delta\varepsilon$ und $\beta\gamma\delta\varepsilon$ gehören. Zieht man durch einen Punkt *p* des Körpers und durch jedes der fünf Paare von Richtlinien eine Transversale, so liegen alle fünf Transversalen in *einer* Ebene. Das Bahnelement des Punktes steht auf dieser Ebene senkrecht.

9. Die kürzesten Verbindungslinien jedes der fünf Paare von Richtlinien werden von einer und derselben geraden Linie unter rechten Winkeln geschnitten.

Hierdurch ist es möglich, die kürzeste Verbindungslinie der Richtlinien von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ selbst für den Fall durch reelle Construction zu finden, wenn die Richtlinien imaginär sind. Man ziehe nämlich durch eine der vier Normalen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, etwa durch $\alpha$, eine fünfte Linie $\varepsilon$, construire für $\alpha\beta\gamma\varepsilon$ und für $\alpha\beta\delta\varepsilon$ die beiden Paare reeller Richtlinien (vergl. No. 5) und bestimme zu jedem Paare dieser reellen Richtlinien die Linie der

kleinsten Entfernung, führe dieselbe Construction noch für eine zweite Linie $\varepsilon_1$ aus, die ebenfalls eine von den vier Normalen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ schneidet, und suche nun zwischen den beiden eben bestimmten Linien der kleinsten Entfernung wiederum die Linie der kleinsten Entfernung, so ist dies die gesuchte kürzeste Verbindungslinie der Richtlinien von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$. Auf ähnliche Weise kann man für den Fall, dass die beiden Richtlinien von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ imaginär sind, die Normale der Fläche $P$ eines Punktes $p$ durch reelle Construction finden. Fügt man nämlich zu $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, wie vorher, noch ein $\varepsilon$ hinzu, welches $\alpha$ schneidet, und zu $\varepsilon$ noch einen Punkt $e$ des Körpers und eine Oberfläche $E$, auf der sich $e$ bewegen muss, so kann sich der in Betracht gezogene Punkt $p$ des Körpers nur noch auf einer Curve bewegen, deren Normalebene man durch reelle Construction erhält, da die Richtlinien von $\varepsilon$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und $\varepsilon$, $\alpha$, $\beta$, $\delta$ reell sind. Construirt man nun für ein anderes $\varepsilon_1$, welches ebenfalls $\alpha$ schneidet, die Normalebene des Bahnelements von $p$, so ist der Durchschnitt der beiden construirten Normalebenen die gesuchte Normale der Bahnfläche des Punktes $p$.

10. ***Besondere Fälle:*** ***a***) Fallen die beiden Richtlinien von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ in ***eine*** zusammen (vergl. No. 3) und $\varepsilon$ geht nicht durch die gemeinschaftliche Richtlinie, so haben die Bahncurven sämmtlicher Punkte $p$ des Körpers eine Spitze. ***b***) Fallen alle fünf Normalen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ in ***eine*** Schaar eines Hyperboloids, so bewegt sich der Punkt $p$, je nachdem er in das Hyperboloid fällt oder nicht, entweder auf einer Fläche oder in einem körperlichen Raume. ***c***) Liegen die fünf Punkte $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ in gerader Linie, so ist diese Linie im Allgemeinen fest und bildet mithin eine feste Drehungsaxe des Körpers. ***d***) Schneiden sich von den fünf Normalen drei, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, in einem Punkte $q$, so hat der Körper eine augenblickliche Drehungsaxe und zwar die Schnittlinie der Ebenen $(q\delta)$ und $(q\varepsilon)$, d. h. die Bahnelemente sämmtlicher Punkte des Körpers stehen auf dieser Linie senkrecht.

11. Ist ein Körper bloss der Bedingung unterworfen, sich mit drei Punkten auf drei Oberflächen zu bewegen, so wird sich im Allgemeinen jeder Punkt desselben innerhalb eines bestimmten körperlichen Raumes bewegen, und es kommt darauf an, zu bestimmen, wann der Punkt auf die Oberfläche dieses Raumes tritt, ferner, wann diese Oberfläche eine Kante und wann eine Spitze hat. Nennen wir diese drei Oberflächen, wie oben, $A$, $B$, $C$, die Punkte des Körpers, mit welchen er sich auf jenen bewegt,

*a, b, c* und die Normalen, welche in *a, b, c* auf *A, B, C* errichtet werden können, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, so geht durch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ stets ein Hyperboloid; fällt nun der betrachtete Punkt *p* des Körpers in die Fläche des Hyperboloids, so befindet er sich auf der Oberfläche des Raumes, in dem er sich bewegt, und die Normale dieser Oberfläche wird angegeben durch *die* Gerade des Hyperboloids, welche durch den Punkt *p* geht und zur Schaar von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ gehört. Die Punkte *a, b, c* bewegen sich auf ihren Flächen *A, B, C* ebenfalls auf geschlossenen Flächenräumen und treten auf die Grenzcurven nur in dem Falle, wenn zwei der drei Normalen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sich schneiden, und sie selbst in die Ebene der beiden Normalen fallen. Die Construction der Normalen selbst lässt sich dann leicht vollziehen.

Schneiden sich von den Normalen $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ zwei in einem Punkte, so muss der Punkt *p* auf der Verbindungsebene dieses Schnittpunktes mit der dritten Normale liegen, wenn er sich auf der Oberfläche des Raumes, in dem er sich bewegt, befinden soll. Liegt der Punkt *p* in dem Schnittpunkte selber, so hat die Oberfläche an dieser Stelle eine Kante.

Schneiden sich alle drei Normalen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ in einem Punkte, so sind alle Punkte *p* des Körpers auf ihre Oberfläche getreten, auf welche sich überhaupt in diesem Falle der körperliche Raum reducirt, und man erhält die Normale der Oberfläche jedes Punktes, indem man denselben mit dem Schnittpunkte der drei Normalen verbindet. Liegt der Punkt *p* in dem Schnittpunkte der drei Normalen, so hat seine Oberfläche an dieser Stelle eine Spitze.

12. Bewegt sich der Körper mit zwei Punkten *a* und *b* nur auf zwei Oberflächen *A* und *B*, so ist im Allgemeinen der Raum, innerhalb dessen sich ein Punkt *p* des Körpers bewegen kann, ebenfalls ein beschränkter. Soll der Punkt *p* auf die Oberfläche dieses Raumes treten, so müssen die Normalen $\alpha$ und $\beta$ in *einer* Ebene und der Punkt *p* in derselben Ebene liegen. Die Normale dieser Oberfläche ist nach dem Schnittpunkte der Normalen $\alpha$ und $\beta$ gerichtet. Liegt der Punkt *p* im Schnittpunkte der Normalen $\alpha$ und $\beta$ selbst, so hat die Fläche an dieser Stelle eine Kante.

---

# Ueber das ponderomotorische Elementargesetz *).

(Von Herrn *D. J. Korteweg* zu Breda in Holland.)

---

## Einleitung.

Obwohl die Gesetze der ponderomotorischen und elektromotorischen Wirkungen zwischen beiderseits geschlossenen Stromringen, so wie sie in den *F. Neumann*schen Potentialformeln ihren einfachsten Ausdruck finden, als experimentell bewiesen betrachtet werden können, bleiben über die beiden elektrodynamischen Elementargesetze, das ponderomotorische und das elektromotorische, immer noch verschiedene, einander ausschliessende, Voraussetzungen möglich, die, was die Erklärung der bis jetzt wahrgenommenen Thatsachen betrifft, als gleichberechtigt angesehen werden können. Aufgabe der vorliegenden Arbeit ist es nun, für das ponderomotorische Gesetz zu untersuchen, wie weit sich diese Unbestimmtheit erstreckt, das heisst, eine allgemeine, mit unbestimmten Functionen behaftete Theorie aufzustellen, die sich keine anderen Voraussetzungen erlaubt als solche, die experimentell geprüft oder wegen ihrer inneren Wahrscheinlichkeit in allen bis heute aufgestellten Theorien angenommen worden sind. Durch Hinzufügung zweckmässiger Hypothesen wird diese allgemeine Theorie dann nach Belieben in jede der specielleren Theorien übergehen können.

Die Aufstellung einer solchen Theorie ist zwar von *Stefan* **) und später von *Maxwell* ***) versucht worden, dabei ist aber auf mögliche Kräftepaar-

---

*) Vorliegender Aufsatz ist eine Umarbeitung einer in die Abh. d. Kön. Niederl. Akademie (1879) aufgenommenen Schrift. Bei dem Versuche, der mathematischen Darstellung eine gedrängtere und mehr symmetrische Gestalt zu geben, sind mir die der ursprünglichen Abhandlung hinzugefügten Bemerkungen des Herrn Prof. *van der Waals* sehr nützlich gewesen.

**) Wiener Berichte Bd. 59, 1869.

***) *Maxwell*, Treatise on Electricity and Magnetism, T. II. S. 159, 1873.

wirkungen zwischen Stromelementen keine Rücksicht genommen. Seit der Aufstellung der Potentialtheorie von *Helmholtz*, wobei solche Kräftepaarwirkungen auftreten, ist mehrmals*) auf diese Lücke in der verdienstvollen Arbeit *Stefans* hingewiesen worden; so viel uns bekannt, ist aber *Margules* **) der einzige, der es versucht hat, sie auszufüllen. Leider hat dieser aber dabei, wie wir zeigen werden, eine der möglichen Kräftepaarwirkungen übersehen.

Weil wir bei unserer Untersuchung die Theorie *Grassmanns*, der sich in letzterer Zeit *Clausius* angeschlossen hat, nicht unberücksichtigt lassen wollen, so müssen wir das Princip der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung vorläufig ausser Anwendung lassen. Ebenso macht es die Potentialtheorie wünschenswerth, von vornherein den Unterschied zwischen Stromelementen oder überhaupt zwischen offenen Stromringen mit und ohne Stromenden in's Auge zu fassen. Es wäre dieses nur dann entbehrlich, wenn man einen zwingenden Grund dafür hätte, anzunehmen, dass Elektricität, die plötzlich in den Zustand der Ruhe versetzt wird oder plötzlich sich zu bewegen anfängt, dadurch keine ponderomotorische Wirkungen hervorbrächte. Dieses ist aber so wenig der Fall, dass auch die elektrischen Grundgesetze von *Weber* und *Clausius* für diesen Fall Kraftwirkungen angeben. Es könnte also ein Stromelement verschiedene Wirkungen ausüben, je nachdem die elektrische Materie entweder an seinen Enden den Zustand der Ruhe annimmt oder ihre Bewegung darüber hin fortsetzt. Ersteres nennen wir im Folgenden ein vollständiges, letzteres ein unvollständiges Element. Jeder geschlossene Stromring kann nach Belieben als eine Summe vollständiger Elemente, deren Stromenden sich gegenseitig aufheben, oder als eine Summe unvollständiger Elemente betrachtet werden; dagegen wird ein beweglicher Theil eines geschlossenen Stromringes nur als eine Summe unvollständiger Elemente aufgefasst werden können, weil sonst Stromenden auftreten würden, die ein solcher Stromtheil nicht besitzt.

Für vollständige und unvollständige Elemente gehen wir anfänglich von den folgenden Voraussetzungen aus:

*Voraussetzung (A). Die ponderomotorischen Wirkungen zwischen zwei Stromelementen $ds_1$ und $ds_2$ sind proportional $\iota_1 \iota_2 ds_1 ds_2$, wo $\iota_1$ und $\iota_2$ die in*

---

*) z. B. *Wiedemann*, Galvanismus, Bd. II, Abth. I, § 54, 1873.

**) Wiener Berichte, October 1878.

***ihnen vorhandenen Stromstärken andeuten. Bei Aenderung der Stromrichtung in einem der beiden Elemente schlagen sie also in ihr Gegentheil um.***

*Voraussetzung* (*B*). ***Zwischen den Spiegelbildern der Elemente sind die Spiegelbilder der ponderomotorischen Kräfte und Kräftepaare wirksam.***

*Voraussetzung* (*C*). ***Die Wirkungen der Stromelemente sind durch die ihrer sogenannten Componenten ersetzbar.***

Diese Voraussetzungen genügen zur vorläufigen Aufstellung einer allgemeinen ponderomotorischen Theorie.

### §. 1. Das ponderomotorische Elementargesetz.

Mittelst der dritten Voraussetzung (*C*) kann man bekanntlich die Untersuchung der zwischen zwei Stromelementen wirkenden Kräfte und Kräftepaare auf viererlei Fundamentalstellungen dieser Elemente zurückführen.

In der *ersten* Stellung sind beide Elemente in Hinsicht ihrer Verbindungslinie longitudinal gestellt. Ihre Stromrichtungen seien entgegengesetzt. Durch die Voraussetzungen (*A*) und (*B*) werden alle Kraft- oder Kräftepaarwirkungen ausgeschlossen mit Ausnahme einer, für positive Werthe von *B* anziehend gedachten, Kraft

$$B \iota_1 \iota_2 ds_1 ds_2$$

in der Verbindungslinie. Dabei ist *B* eine vorläufig ganz unbekannte Function der Entfernung der Elemente.

In der *zweiten* Fundamentalstellung stehen beide Elemente transversal zur Verbindungslinie. Sie seien einander parallel mit gleichen Stromrichtungen. Eine, für positive Werthe von *C* anziehend gedachte, Kraftwirkung:

$$C \iota_1 \iota_2 ds_1 ds_2$$

ist die einzig mögliche, d. h. mit den Voraussetzungen (*A*) und (*B*) vereinbare.

In der *dritten* Stellung sind beide transversal zur Verbindungslinie und senkrecht gegen einander gerichtet. Jede Kraftwirkung ist ausgeschlossen. Mit den Voraussetzungen vollkommen vereinbar ist aber eine Kräftepaarwirkung

$$D \iota_1 \iota_2 ds_1 ds_2,$$

deren Ebene senkrecht auf der Verbindungslinie steht. Wir stellen uns vor, sie versuche, für positive Werthe von *D*, die beiden Elemente auf die Weise einander parallel zu stellen, dass der Drehungswinkel $90^0$ beträgt.

Die *vierte* Stellung ist die an Kräftepaar- und Kraftwirkungen reichste. Das eine Element ist longitudinal, das andere transversal gestellt. Denken wir uns den Strom im longitudinalen Elemente nach dem transversalen Elemente hin gerichtet, so kann auf das transversale Element eine Kraft

$$E \iota_1 \iota_2 ds_1 ds_2,$$

für positive Werthe von $E$ in der Richtung des Stromes, wirksam sein, während zugleich ein Kräftepaar

$$F \iota_1 \iota_2 ds_1 ds_2$$

dieses Element, für positive Werthe von $F$, dem longitudinalen parallel zu stellen versucht, so dass der Drehungswinkel wieder $90^0$ beträgt.

Ebenso kann auf das longitudinale Element eine Kraft

$$G \iota_1 \iota_2 ds_1 ds_2$$

wirksam sein, die, für positive Werthe von $G$, der Richtung des Stromes im transversalen Elemente entgegengesetzt gerichtet sei, und daneben ein Kräftepaar

$$H \iota_1 \iota_2 ds_1 ds_2,$$

das, für positive Werthe von $H$ und $F$, die gleiche Umdrehungsrichtung angebe, wie das vorige Kräftepaar.

Das Prinzip der gleichen Wirkung und Gegenwirkung würde zwischen diesen verschiedenen Functionen der Entfernung $r$ die Beziehungen bedingen:

$$(1.) \quad E = G,$$

$$(2.) \quad H+F = Gr = Er.$$

Nach der *Ampère*schen Theorie hätte man offenbar:

$$(3.) \quad B = \frac{A^2}{r^2}; \quad C = \frac{2A^2}{r^2}; \quad D = E = F = G = H = 0.$$

Mittelst der so eingeführten Functionen (deren Werth verschieden sein kann, je nachdem es sich um vollständige oder unvollständige Elemente handelt, was wir aber vorläufig unentschieden lassen können) kann jetzt die ponderomotorische Wirkung zwischen zwei willkürlich gestellten Stromelementen angegeben werden. Zur Bestimmung der gegenseitigen Lage benutzen wir die Winkel $\theta_1$, $\theta_2$ und $\varepsilon$ ($\angle 180^0$) resp. zwischen den Richtungen $(ds_1, r_{1.2})$, $(ds_2, r_{2.1})$ und $(ds_1, ds_2)$, wo $r_{1.2}$ die Richtung von $ds_1$ nach $ds_2$, $r_{2.1}$ die entgegengesetzte bezeichnet. Es sei weiter $\eta$ der Winkel zwischen den Normalen der Ebenen $(ds_1, r_{1.2})$ und $(ds_2, r_{2.1})$. Diese Normalen werden dabei so gerichtet, dass von ihnen aus die Drehungen $\theta_1$ und $\theta_2$, resp. von

$ds_1$ nach $r_{1.2}$ und von $ds_2$ nach $r_{2.1}$ gerechnet, im positiven Sinne, dass heisst entgegengesetzt dem Sinne, worin sich die Zeiger einer Uhr bewegen, gesehen werden. Es sei dann $\eta$ derjenige Winkel, um welchen die Normale $(ds_1, r_{1.2})$, von $ds_2$ aus gesehen, im positiven Sinne gedreht werden muss, um sie der Normale $(ds_2, r_{2.1})$ gleichgerichtet zu stellen, so dass also Winkel $\eta$ von mehr als $180^0$ vorkommen können.

Zwischen den so definirten Winkeln besteht immer die Beziehung

$$\cos\varepsilon = -\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\eta.$$

Ausserdem hat man bekanntlich:

$$\cos\theta_1 = -\frac{dr}{ds_1}; \quad \cos\theta_2 = -\frac{dr}{ds_2}; \quad \cos\varepsilon = -r\frac{d^2r}{ds_1\,ds_2} - \frac{dr}{ds_1}\cdot\frac{dr}{ds_2}.$$

In das erste Stromelement legen wir jetzt den Anfangspunkt eines positiven rechtwinkligen Axensystemes, dessen $X$-Axe mit $r_{1.2}$ zusammenfällt, dessen $XY$-Ebene dieses erste Element enthält, und von dessen $Z$-Axe aus die Drehung $\theta_1 = (ds_1, r_{1.2})$ positiv gesehen wird. Beide Stromelemente zerlegen wir dann in ihre den Coordinatenaxen parallele Componenten, bestimmen und summiren die durch die Componenten des zweiten Elementes auf die des ersten ausgeübten Kraft- und Kräftepaarwirkungen und finden so für die das erste Element angreifenden Kräfte:

$$(4.)\quad \begin{cases} X = (B\cos\theta_1\cos\theta_2 - C\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\eta)\,\iota_1\iota_2\,ds_1\,ds_2, \\ Y = (-E\sin\theta_1\cos\theta_2 - G\cos\theta_1\sin\theta_2\cos\eta)\,\iota_1\iota_2\,ds_1\,ds_2, \\ Z = (-G\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\eta)\,\iota_1\iota_2\,ds_1\,ds_2, \end{cases}$$

für die Kräftepaare:

$$\begin{aligned} (X) &= (-D\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\eta)\,\iota_1\iota_2\,ds_1\,ds_2, \\ (Y) &= (H\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\eta)\,\iota_1\iota_2\,ds_1\,ds_2, \\ (Z) &= (-H\cos\theta_1\sin\theta_2\cos\eta - F\sin\theta_1\cos\theta_2)\,\iota_1\iota_2\,ds_1\,ds_2. \end{aligned}$$

Diese Kräfte können wir aber als die Componenten der folgenden drei, resp. mit $ds_1$, $ds_2$ und $r_{1.2}$ parallelen Kräfte betrachten:

$$(5.)\quad \begin{cases} S_1 = (\;\;E\cos\theta_2)\,\iota_1\iota_2\,ds_1\,ds_2 \text{ (gleichger. mit } ds_1), \\ S_2 = (-G\cos\theta_1)\,\iota_1\iota_2\,ds_1\,ds_2 \text{ (\quad - \quad - } ds_2), \\ R = [(B-E-G)\cos\theta_1\cos\theta_2 - C\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\eta]\,\iota_1\iota_2\,ds_1\,ds_2 \\ \;\;\; = [(B-E-G+C)\cos\theta_1\cos\theta_2 + C\cos\varepsilon]\,\iota_1\iota_2\,ds_1\,ds_2 \text{ (gleichger. mit } r_{1.2}). \end{cases}$$

Ebenso können wir die Kräftepaare auffassen als die Componenten der drei Kräftepaare:

$$(6.)\quad \begin{cases} (M_1) = (-F\sin\theta_1\cos\theta_2)\,\iota_1\iota_2\,ds_1\,ds_2, \\ (M_2) = (-H\cos\theta_1\sin\theta_2)\,\iota_1\iota_2\,ds_1\,ds_2, \\ (L) \;\;= (-D\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\eta)\,\iota_1\iota_2\,ds_1\,ds_2, \end{cases}$$

deren Axen resp. mit den früher genau definirten Normalen auf den Ebenen $(ds_1, r_{1.2})$ und $(ds_2, r_{2.1})$ und mit $r_{1.2}$ zusammenfallen.

Mit Hülfe der so gewählten Kräfte und Kräftepaare ist es jetzt ziemlich leicht, die ponderomotorische Wirkung zu finden eines willkürlich gerichteten, im Punkte $x_2$, $y_2$, $z_2$ befindlichen Elementes $ds_2$ auf ein im Punkte $x_1$, $y_1$, $z_1$ befindliches Element $ds_1$. Betrachten wir zu diesem Zwecke nach einander die verschiedenen, den Coordinatenaxen parallelen Componenten, so muss man *erstens* zur Berechnung der Wirkung von $dx_2$ auf $dx_1$ in den Formeln (5.) und (6.) substituiren:

$$\cos\theta_1 = -\cos\theta_2 = \frac{x_2-x_1}{r};\quad \varepsilon = 0^0;\quad \eta = 180^0;\quad \sin\theta_1 = \sin\theta_2 = \frac{p}{r},$$

wo

$$p = +\sqrt{r^2-(x_1-x_2)^2}.$$

Man findet:

$$S_1 = \left(-E\cdot\frac{x_2-x_1}{r}\right)\iota_1\iota_2\,dx_1\,dx_2,$$

$$S_2 = \left(-G\cdot\frac{x_2-x_1}{r}\right)\iota_1\iota_2\,dx_1\,dx_2,$$

$$R = \left[-(B-E-G+C)\cdot\frac{(x_2-x_1)^2}{r^2}+C\right]\iota_1\iota_2\,dx_1\,dx_2,$$

$$(M_1) = \left(F\cdot\frac{p(x_2-x_1)}{r^2}\right)\iota_1\iota_2\,dx_1\,dx_2,$$

$$(M_2) = \left(-H\cdot\frac{p(x_2-x_1)}{r^2}\right)\iota_1\iota_2\,dx_1\,dx_2,$$

$$(L) = 0.$$

Aus der geometrischen Figur wird dann aber deutlich, dass:

$$X = S_1+S_2+R\cdot\frac{x_2-x_1}{r} = \left[(-E-G+C)\frac{x_2-x_1}{r}-(B-E-G+C)\frac{(x_2-x_1)^3}{r^3}\right]\iota_1\iota_2\,dx_1\,dx_2,$$

$$Y = R\cdot\frac{y_2-y_1}{r} = \left[C\cdot\frac{y_2-y_1}{r}-(B-E-G+C)\cdot\frac{(x_2-x_1)^2(y_2-y_1)}{r^3}\right]\iota_1\iota_2\,dx_1\,dx_2,$$

$$Z = R\cdot\frac{z_2-z_1}{r} = \left[C\cdot\frac{z_2-z_1}{r}-(B-E-G+C)\cdot\frac{(x_2-x_1)^2(z_2-z_1)}{r^3}\right]\iota_1\iota_2\,dx_1\,dx_2,$$

$$(X) = 0,$$

$$(Y) = -(M_1)\frac{z_2-z_1}{p} + (M_2)\frac{z_2-z_1}{p} = \left[-(H+F)\cdot\frac{(x_2-x_1)(z_2-z_1)}{r^2}\right]\iota_1\iota_2\,dx_1\,dx_2,$$

$$(Z) = \quad (M_1)\frac{y_2-y_1}{p} - (M_2)\frac{y_2-y_1}{p} = \left[(H+F)\cdot\frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{r^2}\right]\iota_1\iota_2\,dx_1\,dx_2.$$

Zur Berechnung *zweitens* der Wirkung von $dy_2$ auf $dx_1$ muss in (5.) und (6.) substituirt werden:

$$\cos\theta_1 = \frac{x_2-x_1}{r};\quad \sin\theta_1 = \frac{p}{r};\quad \cos\theta_2 = -\frac{y_2-y_1}{r};\quad \sin\theta_2 = \frac{q}{r};\quad \varepsilon = 90^0,$$

wo

$$q = \sqrt{r^2-(y_2-y_1)^2}.$$

Es handelt sich dann noch um die Bestimmung des Ausdrucks $\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\eta$. Dazu betrachten wir eine dreiseitige Pyramide, deren Spitze sich im Anfangspunkt der Coordinaten befindet, indem die dort zusammenstossenden Kanten alle der Längeneinheit gleich und resp. den beiden Stromelementen $dx_1$ und $dy_1$ und ihrer Verbindungslinie $r_{1.2}$ gleichgerichtet sind. Nennen wir den körperlichen Inhalt dieser Pyramide *positiv* oder *negativ*, je nachdem, von der mit $r_{1.2}$ gleichgerichteten Kante aus gesehen, die Drehung $(dx_1, dy_2) = 90^0$ positiv oder negativ erscheint, so darf man diesen körperlichen Inhalt einerseits dem Producte $-\frac{1}{6}\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\eta$ gleichsetzen, andererseits aber kann man auch die $XY$-Ebene als Grundfläche der Pyramide auffassen. Ihre Höhe ist dann offenbar $\frac{z_2-z_1}{r}$, also ihr Inhalt $\frac{1}{6}\cdot\frac{z_2-z_1}{r}$. Man hat also:

$$\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\eta = -\frac{z_2-z_1}{r},$$

und es ergiebt sich jetzt aus den Formeln (5.) und (6.):

$$S_1 = \left(-E\cdot\frac{y_2-y_1}{r}\right)\iota_1\iota_2\,dx_1\,dy_2,$$

$$S_2 = \left(-G\cdot\frac{x_2-x_1}{r}\right)\iota_1\iota_2\,dx_1\,dy_2,$$

$$R = \left[-(B-E-G+C)\cdot\frac{(y_2-y_1)(x_2-x_1)}{r^2}\right]\iota_1\iota_2\,dx_1\,dy_2,$$

$$(M_1) = \left(F\cdot\frac{p(y_2-y_1)}{r^2}\right)\iota_1\iota_2\,dx_1\,dy_2,$$

$$(M_2) = \left(-H\cdot\frac{q(x_2-x_1)}{r^2}\right)\iota_1\iota_2\,dx_1\,dy_2,$$

$$(L) = \left(D\cdot\frac{z_2-z_1}{r}\right)\iota_1\iota_2\,dx_1\,dy_2.$$

Aus der geometrischen Figur folgt aber:

$$X = S_1 + R\cdot\frac{x_2-x_1}{r} = \left[-E\cdot\frac{y_2-y_1}{r} - (B-E-G+C)\frac{(y_2-y_1)(x_2-x_1)^2}{r^3}\right]\iota_1\iota_2\,dx_1\,dy_2,$$

$$Y = S_2 + R\cdot\frac{y_2-y_1}{r} = \left[-G\cdot\frac{x_2-x_1}{r} - (B-E-G+C)\frac{(y_2-y_1)^2(x_2-x_1)}{r^3}\right]\iota_1\iota_2\,dx_1\,dy_2,$$

$$Z = R\cdot\frac{z_2-z_1}{r} = \left[-(B-E-G+C)\frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)(z_2-z_1)}{r^3}\right]\iota_1\iota_2\,dx_1\,dy_2,$$

$$(X) = -(M_2)\frac{z_2-z_1}{q} + (L)\frac{x_2-x_1}{r} = \left[(D+H)\frac{(x_2-x_1)(z_2-z_1)}{r^2}\right]\iota_1\iota_2\,dx_1\,dy_2,$$

$$(Y) = -(M_1)\frac{z_2-z_1}{p} + (L)\frac{y_2-y_1}{r} = \left[(D-F)\frac{(y_2-y_1)(z_2-z_1)}{r^2}\right]\iota_1\iota_2\,dx_1\,dy_2,$$

$$(Z) = (M_1)\frac{y_2-y_1}{p} + (M_2)\frac{x_2-x_1}{q} + (L)\frac{z_2-z_1}{r}$$

$$= \left[F\cdot\frac{(y_2-y_1)^2}{r^2} - H\frac{(x_2-x_1)^2}{r^2} + D\frac{(z_2-z_1)^2}{r^2}\right]\iota_1\iota_2\,dx_1\,dy_2.$$

Durch Vertauschung der $Y$- und $Z$-Axe findet man *drittens* aus diesen Formeln die ponderomotorische Wirkung der Componente $dz_2$ auf $dx_1$. Die Zeichen der Kräftepaare müssen dabei aber umgekehrt werden, weil sich sonst das positive Axensystem in ein negatives verwandeln würde. Man erhält:

$$X = \left[-E\cdot\frac{z_2-z_1}{r} - (B-E-G+C)\frac{(z_2-z_1)(x_2-x_1)^2}{r^3}\right]\iota_1\iota_2\,dx_1\,dz_2,$$

$$Z = \left[-G\cdot\frac{x_2-x_1}{r} - (B-E-G+C)\frac{(z_2-z_1)^2(x_2-x_1)}{r^3}\right]\iota_1\iota_2\,dx_1\,dz_2,$$

$$Y = \left[-(B-E-G+C)\frac{(x_2-x_1)(z_2-z_1)(y_2-y_1)}{r^3}\right]\iota_1\iota_2\,dx_1\,dz_2,$$

$$(X) = \left[-(D+H)\frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{r^2}\right]\iota_1\iota_2\,dx_1\,dz_2,$$

$$(Z) = \left[-(D-F)\frac{(z_2-z_1)(y_2-y_1)}{r^2}\right]\iota_1\iota_2\,dx_1\,dz_2,$$

$$(Y) = \left[-F\frac{(z_2-z_1)^2}{r^2} + H\cdot\frac{(x_2-x_1)^2}{r^2} - D\cdot\frac{(y_2-y_1)^2}{r^2}\right]\iota_1\iota_2\,dx_1\,dz_2.$$

Die Wirkung von $ds_2$ auf $dx_1$ wird jetzt endlich gefunden durch Summirung der berechneten Wirkungen der Componenten. Beachtet man dabei, dass

$$(7.)\qquad (x_2-x_1)\,dx_2 + (y_2-y_1)\,dy_2 + (z_2-z_1)\,dz_2 = r\cdot\frac{dr}{ds_2}\cdot ds_2,$$

so erhält man:

$$(8.)\begin{cases} X=\Big[-E\cdot\frac{dr}{ds_2}-\frac{B-E-G+C}{r^2}(x_2-x_1)^2\cdot\frac{dr}{ds_2}+\frac{C-G}{r}\cdot(x_2-x_1)\frac{dx_2}{ds_2}\Big]\iota_1\iota_2\,dx_1\,ds_2,\\ Y=\Big[-\frac{B-E-G+C}{r^2}(x_2-x_1)(y_2-y_1)\frac{dr}{ds_2}+\frac{C}{r}(y_2-y_1)\frac{dx_2}{ds_2}\\ \qquad\qquad-\frac{G}{r}(x_2-x_1)\frac{dy_2}{ds_2}\Big]\iota_1\iota_2\,dx_1\,ds_2,\\ Z=\Big[-\frac{B-E-G+C}{r^2}(x_2-x_1)(z_2-z_1)\frac{dr}{ds_2}+\frac{C}{r}(z_2-z_1)\frac{dx_2}{ds_2}\\ \qquad\qquad-\frac{G}{r}(x_2-x_1)\frac{dz_2}{ds_2}\Big]\iota_1\iota_2\,dx_1\,ds_2,\\ (X)=\Big[-\frac{D+H}{r^2}(x_2-x_1)\Big\{(y_2-y_1)\frac{dz_2}{ds_2}-(z_2-z_1)\frac{dy_2}{ds_2}\Big\}\Big]\iota_1\iota_2\,dx_1\,ds_2,\\ (Y)=\Big[-\frac{F}{r}(z_2-z_1)\frac{dr}{ds_2}-\frac{H}{r^2}(x_2-x_1)\Big\{(z_2-z_1)\frac{dx_2}{ds_2}-(x_2-x_1)\frac{dz_2}{ds_2}\Big\}\\ \qquad\qquad-\frac{D}{r^2}(y_2-y_1).\Big\{(y_2-y_1)\frac{dz_2}{ds_2}-(z_2-z_1)\frac{dy_2}{ds_2}\Big\}\Big]\iota_1\iota_2\,dx_1\,ds_2,\\ (Z)=\Big[\frac{F}{r}(y_2-y_1)\frac{dr}{ds_2}-\frac{H}{r^2}(x_2-x_1)\Big\{(x_2-x_1)\frac{dy_2}{ds_2}-(y_2-y_1)\frac{dx_2}{ds_2}\Big\}\\ \qquad\qquad-\frac{D}{r^2}(z_2-z_1).\Big\{(y_2-y_1)\frac{dz_2}{ds_2}-(z_2-z_1)\frac{dy_2}{ds_2}\Big\}\Big]\iota_1\iota_2\,dx_1\,ds_2. \end{cases}$$

Durch Vertauschung der Coordinaten ergeben sich daraus unmittelbar die Wirkungen auf $dy_1$ und $dz_1$ und also auch durch Summirung die totale Wirkung auf $ds_1$. Beachtet man, dass

$$(9.)\qquad (x_2-x_1)\,dx_1+(y_2-y_1)\,dy_1+(z_2-z_1)\,dz_1 \;=\; -r\frac{dr}{ds_1}\cdot ds_1,$$

dass weiter

$$(10.)\quad dx_1.dx_2+dy_1.dy_2+dz_1.dz_2=\cos\varepsilon.ds_1.ds_2=\Big(-\frac{dr}{ds_1}\cdot\frac{dr}{ds_2}-r\frac{d^2r}{ds_1\,ds_2}\Big)ds_1ds_2$$

ist, wo $\varepsilon$ jetzt wieder den Winkel darstellt, den $ds_1$ mit $ds_2$ bildet, so findet man für die Summe der $X$-Componenten der auf $dx_1$, $dy_1$ und $dz_1$ wirksamen Kräfte:

$$(11.)\quad\begin{cases} X \;=\; \Big[-E\cdot\frac{dr}{ds_2}\cdot\frac{dx_1}{ds_1}+\frac{B-E-G}{r}(x_2-x_1)\frac{dr}{ds_1}\cdot\frac{dr}{ds_2}-C(x_2-x_1)\frac{d^2r}{ds_1\,ds_2}\\ \qquad\qquad+G\cdot\frac{dr}{ds_1}\cdot\frac{dx_2}{ds_2}\Big]\iota_1\iota_2\,ds_1\,ds_2. \end{cases}$$

Benutzt man noch die Relation:

$$(x_2-x_1)^2 \;=\; r^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2,$$

so ergiebt sich auf ganz ähnlichem Wege:

$$(12.)\quad \begin{cases} (X) = \Big[\dfrac{D+H}{r}\cdot\dfrac{dr}{ds_1}\Big\{(y_2-y_1)\dfrac{dz_2}{ds_2}-(z_2-z_1)\dfrac{dy_2}{ds_2}\Big\} \\ +\dfrac{D-F}{r}\cdot\dfrac{dr}{ds_2}\Big\{(y_2-y_1)\dfrac{dz_1}{ds_1}-(z_2-z_1)\dfrac{dy_1}{ds_1}\Big\}-D\Big(\dfrac{dy_2}{ds_2}\cdot\dfrac{dz_1}{ds_1}-\dfrac{dy_1}{ds_1}\cdot\dfrac{dz_2}{ds_2}\Big)\Big]\iota_1\iota_2\,ds_1\,ds_2. \end{cases}$$

Zweckmässig ist es, die am Elemente $ds_1$ wirkenden Kräfte $X, Y, Z$ mit sich selbst parallel nach dem Anfangspunkte der Coordinaten zu verschieben. Es muss dann selbstverständlich z. B. dem Kräftepaar $(X)$ noch das Kräftepaar:

$$(13.)\quad \begin{cases} Zy_1-Yz_1 = \Big[E\cdot\dfrac{dr}{ds_2}\Big(y_1\dfrac{dz_1}{ds_1}-z_1\dfrac{dy_1}{ds_1}\Big)-\dfrac{B-E-G}{r}\cdot\dfrac{dr}{ds_2}\cdot\dfrac{dr}{ds_1}(y_2z_1-z_2y_1) \\ +C\cdot\dfrac{d^2r}{ds_1\,ds_2}(y_2z_1-z_2y_1)-G\cdot\dfrac{dr}{ds_1}\Big(z_1\dfrac{dy_2}{ds_2}-y_1\dfrac{dz_2}{ds_2}\Big)\Big]\iota_1\iota_2\,ds_1\,ds_2 \end{cases}$$

hinzugefügt werden.

## §. 2. Ponderomotorische Wirkung zwischen beiderseits geschlossenen Strömen.

Diese Wirkung kann aus den Formeln (11.), (12.) und (13.) durch Integration nach $ds_1$ und $ds_2$ gefunden werden. Weil aber beiderseits die Integration über geschlossene Curven ausgedehnt gedacht werden muss, so vereinfachen sich die Ausdrücke, indem alle Glieder fortfallen, die in Hinsicht auf $s_1$ oder $s_2$ ein vollständiges Differential bilden. So findet man:

$$(14.)\quad \int_a^a\!\!\int_b^b X = \iota_1\iota_2\int_a^a\!\!\int_b^b\Big[\frac{B-E-G}{r}(x_2-x_1)\frac{dr}{ds_1}\cdot\frac{dr}{ds_2}-C(x_2-x_1)\frac{d^2r}{ds_1\,ds_2}\Big]ds_1\,ds_2,$$

$$(15.)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_a^a\!\!\int_b^b[(X)+Zy_1-Yz_1] = \iota_1\iota_2\int_a^a\!\!\int_b^b\Big[\frac{D+H-G}{r}\cdot\frac{dr}{ds_1}\cdot\Big(z_1\frac{dy_2}{ds_2}-y_1\frac{dz_2}{ds_2}\Big) \\ +\dfrac{D-F}{r}\cdot\dfrac{dr}{ds_2}\cdot\Big(y_2\dfrac{dz_1}{ds_1}-z_2\dfrac{dy_1}{ds_1}\Big)-D\Big(\dfrac{dy_2}{ds_2}\cdot\dfrac{dz_1}{ds_1}-\dfrac{dy_1}{ds_1}\cdot\dfrac{dz_2}{ds_2}\Big) \\ -\dfrac{B-E-G}{r}\cdot\dfrac{dr}{ds_2}\cdot\dfrac{dr}{ds_1}(y_2z_1-z_2y_1)+C\cdot\dfrac{d^2r}{ds_1\,ds_2}(y_2z_1-z_2y_1)\Big]ds_1\,ds_2. \end{cases}$$

Betrachten wir zunächst die resultirenden Kräfte, so kann der Ausdruck (14.) noch vereinfacht werden. Es ergiebt sich nämlich durch partielle Integration nach $ds_2$, dass:

$$\int_a^a\!\!\int_b^b C(x_2-x_1)\frac{d^2r}{ds_1\,ds_2}\,ds_1\,ds_2$$

$$= -\int_a^a\!\!\int_b^b\frac{dC}{dr}(x_2-x_1)\frac{dr}{ds_2}\cdot\frac{dr}{ds_1}\,ds_1\,ds_2-\int_a^a\!\!\int_b^b C\cdot\frac{dr}{ds_1}\cdot\frac{dx_2}{ds_2}\,ds_1\,ds_2,$$

wo das letzte Glied wieder bei der Integration nach $ds_1$ fortfällt. Es ist also:

$$(16.)\quad \int_a^a\int_b^b X = \iota_1\iota_2\int_a^a\int_b^b\left(\frac{B-E-G}{r}+\frac{dC}{dr}\right)(x_2-x_1)\frac{dr}{ds_1}\cdot\frac{dr}{ds_2}\cdot ds_1\, ds_2.$$

Nach dem *Ampère*schen Gesetze würde wegen (3.)

$$\frac{B-E-G}{r}+\frac{dC}{dr} = -\frac{3A^2}{r^2}$$

sein. Da dieses Gesetz aber bekanntlich für beiderseits geschlossene Ströme die ponderomotorische Wirkung richtig angiebt, so muss

$$\int_a^a\int_b^b\left(\frac{B-E-G}{r}+\frac{dC}{dr}+\frac{3A^2}{r^2}\right)(x_2-x_1)\frac{dr}{ds_1}\cdot\frac{dr}{ds_2}\cdot ds_1\, ds_2$$

identisch gleich Null sein für jede über zwei geschlossene Curven von beliebiger Gestalt und Lage ausgedehnte Integration. Dann muss aber die Relation

$$(\text{I.})\quad B-E-G+r\frac{dC}{dr}+\frac{3A^2}{r^2} = 0$$

stattfinden. Wäre nämlich

$$B-E-G+r\frac{dC}{dr}+\frac{3A^2}{r^2} = \psi(r)$$

eine für $r = r_1$ von Null verschiedene Function von $r$, so würde es möglich sein, zwei Grenzwerthe $a_1 > r_1 > a_2$ für $r$ anzugeben, zwischen welchen die Function das Vorzeichen nicht wechseln würde. Denken wir uns dann zwei mit gleichen Radien beschriebene Kreise, deren Mittelpunkte auf der $X$-Axe liegen, während ihre Ebenen senkrecht auf dieser Axe stehen, so können wir Radius und gegenseitige Entfernung $(x_2-x_1)$ der Mittelpunkte immer dergestalt wählen, dass für jedes beliebige Punktepaar dieser Kreise $a_1 > r > a_2$ wird; dann aber bekommen alle Elemente des Integrals das gleiche Vorzeichen, denn es ist

$$r^2\cdot\frac{dr}{ds_1}\cdot\frac{dr}{ds_2} = \cos\theta_1\cos\theta_2,$$

und die einfache Betrachtung der geometrischen Figur lehrt, dass $\cos\theta_1\cos\theta_2$, wenn die Umlaufsrichtung in beiden Kreisen übereinstimmt, ***negativ***, sonst ***positiv*** ist für ***jedes*** beliebige Punktepaar, dass also das betreffende Integral nicht Null sein kann.

Mit Hülfe der gefundenen Relation (I.) vereinfachen wir jetzt den Ausdruck (15.). Man findet:

$$\int_a^a \int_b^b [(X)+Zy_1-Yz_1] = \iota_1\iota_2 \int_a^a \int_b^b \frac{3A^2}{r^3}\cdot\frac{dr}{ds_2}\cdot\frac{dr}{ds_1}(y_2z_1-z_2y_1)\,ds_1\,ds_2$$
$$+\iota_1\iota_2\int_a^a\int_b^b\Big[\frac{dZ}{ds_1}\cdot\Big(z_1\frac{dy_2}{ds_2}-y_1\frac{dz_2}{ds_2}\Big)+\frac{d\varDelta}{ds_2}\Big(y_2\frac{dz_1}{ds_1}-z_2\frac{dy_1}{ds_1}\Big)$$
$$-D\Big(\frac{dy_2}{ds_2}\cdot\frac{dz_1}{ds_1}-\frac{dy_1}{ds_1}\cdot\frac{dz_2}{ds_2}\Big)+\frac{d^2\varGamma}{ds_1\,ds_2}(y_2z_1-z_2y_1)\Big]\,ds_1\,ds_2,$$

wo:

$$(17.)\qquad dZ = \frac{D+H-Gr}{r}\,dr;\quad d\varDelta = \frac{D-F}{r}\,dr;\quad d\varGamma = C\,dr$$

Durch partielle Integrationen nach $s_1$ und $s_2$ ergiebt sich dann aber:

$$(18.)\quad \begin{cases} \int_a^a\int_b^b[(X)+Zy_1-Yz_1] = \iota_1\iota_2\int_a^a\int_b^b \frac{3A^2}{r^3}\cdot\frac{dr}{ds_2}\cdot\frac{dr}{ds_1}(y_2z_1-z_2y_1)\,ds_1\,ds_2 \\ \qquad +\iota_1\iota_2\int_a^a\int_b^b(-Z-\varDelta-D+\varGamma)\Big(\frac{dy_2}{ds_2}\cdot\frac{dz_1}{ds_1}-\frac{dy_1}{ds_1}\cdot\frac{dz_2}{ds_2}\Big)\,ds_1\,ds_2. \end{cases}$$

Da auch hier das *Ampère*sche Gesetz nothwendig zu richtigen Resultaten führt, so muss wieder

$$\int_a^a\int_b^b\Big(-Z-\varDelta-D+\varGamma-\int\frac{2A^2}{r^2}dr\Big)\Big(\frac{dy_2}{ds_2}\cdot\frac{dz_1}{ds_1}-\frac{dz_2}{ds_2}\cdot\frac{dy_1}{ds_1}\Big)ds_1\,ds_2$$

identisch gleich Null sein, denn wegen (3.) ist für das *Ampère*sche Gesetz:

$$\varGamma = \int\frac{2A^2}{r^2}\,dr.$$

Diese Bedingung kann aber für beliebige geschlossene Curven nicht identisch erfüllt sein, wenn nicht

$$(19.)\qquad -Z-\varDelta-D+\varGamma-\int\frac{2A^2}{r^2}\,dr = \text{Const.};$$

denn wäre

$$\varphi(r) = -Z-\varDelta-D+\varGamma-\int\frac{2A^2}{r^2}\,dr$$

in der Nähe eines gewissen Werthes $r_1$ von $r$ nicht constant, sondern mit $r$ veränderlich, so könnten wieder zwei Grenzwerthe $a_1 > r_1 > a_2$ angenommen werden, zwischen welchen $\varphi$ nicht nur das gleiche Vorzeichen behält, sondern auch mit $r$ fortwährend ab- oder fortwährend zunimmt, also auch $\frac{d\varphi}{dr}$ das Vorzeichen nicht wechselt. Denken wir uns dann wieder zwei mit gleichen Radien beschriebene Kreise $k_1$ und $k_2$ resp. in der $XY$- und in der $XZ$-Ebene gelegen, deren Mittelpunkte die gleiche $x$-Coordinate

besitzen, während für jedes ihrer Punktepaare $a_1 > r > a_2$, so hat man für diese Kreise:

$$\frac{dz_1}{ds_1} = 0, \quad \frac{dy_2}{ds_2} = 0;$$

und es ist also das Integral nur noch vom Producte $\frac{dz_2}{ds_2} \cdot \frac{dy_1}{ds_1}$ abhängig. Betrachten wir dann einen willkürlichen Punkt $P$ des Kreises $k_2$ und verbinden diesen mit zwei gleichen Elementen $ds_1$ des Kreises $k_1$, deren $y$-Coordinaten übereinstimmen, so wird für diese beiden Elemente das betreffende Product verschiedene Vorzeichen, sonst aber gleichen Werth erhalten. Dabei wird, wie auch die Umlaufsrichtungen gewählt seien, zu der grössten der beiden Entfernungen immer das gleiche Vorzeichen gehören. Werden also die Elemente des Integrals paarweise mit einander verglichen, so besitzen die grösseren immer das gleiche Vorzeichen, und der Werth des Integrales kann also nicht Null sein, wenn nicht die Bedingung (19.) erfüllt ist. Aus dieser ergiebt sich aber durch Differentiation, wegen (17.):

$$\text{(II.)} \qquad 2D+H-Gr-F-Cr+r\frac{dD}{dr}+\frac{2A^2}{r} = 0.$$

Sind die Bedingungen (I.) und (II.) erfüllt, so findet man aus (16.) und (18.):

$$\text{(20.)} \qquad \int_a\int_b X = -\iota_1\iota_2\int_a\int_b \frac{3A^2}{r^3}(x_2-x_1)\frac{dr}{ds_1}\cdot\frac{dr}{ds_2}\cdot ds_1 ds_2,$$

$$\text{(21.)} \quad \begin{cases} \int_a\int_b [(X)+Zy_1-Yz_1] = \iota_1\iota_2\int_a\int_b \frac{3A^2}{r^3}\cdot(y_2z_1-y_1z_2)\frac{dr}{ds_1}\cdot\frac{dr}{ds_2}\cdot ds_1 ds_2 \\ \qquad -\iota_1\iota_2\int_a\int_b \frac{2A^2}{r}\left(\frac{dy_2}{ds_2}\cdot\frac{dz_1}{ds_1}-\frac{dz_2}{ds_2}\cdot\frac{dy_1}{ds_1}\right)\cdot ds_1 ds_2. \end{cases}$$

Weil in diesen Ausdrücken *) keine der unbekannten Functionen mehr vorkommt, erweisen sich die Bedingungen (I.) und (II.) als genügend,

---

*) Es sind diese Ausdrücke identisch mit den bekannten von *Beer* in seiner „Einleitung in die Elektrostatik u. s. w.“, Ausgabe von 1865, S. 259 und 260 angegebenen Formeln, wenn man darauf achtet, dass bei *Beer* $A^2 = \frac{1}{2}$. Man hat nämlich:

$$\iota_1\iota_2\int_a\int_b \frac{d\cdot\frac{A^2}{r}}{dx_1}\cos\varepsilon.ds_1 ds_2 = \iota_1\iota_2\int_a\int_b \frac{A^2}{r^3}\cdot\cos\varepsilon.(x_2-x_1)ds_1 ds_2$$

$$= -\iota_1\iota_2\int_a\int_b \frac{A^2}{r^3}(x_2-x_1)\frac{dr}{ds_1}\cdot\frac{dr}{ds_2}\cdot ds_1 ds_2 - \iota_1\iota_2\int_a\int_b \frac{A^2}{r^3}(x_2-x_1)\cdot\frac{d^2r}{ds_1 ds_2}\cdot ds_1 ds_2,$$

um die allgemeine Theorie für in sich geschlossene Ströme mit der ***Ampère***schen in vollkommene Uebereinstimmung zu bringen, und es können darum durch Experimente über die Wechselwirkung zwischen solchen Strömen keine weiteren Beziehungen zwischen den unbekannten Functionen abgeleitet werden. Weil geschlossene Ströme nach Belieben als eine Summe vollständiger oder unvollständiger Stromelemente aufgefasst werden können, müssen diese Bedingungen für beiderlei Stromelemente gültig sein.

### §. 3. Ponderomotorische Wirkung eines geschlossenen Stromes auf ein Stromelement.

Zur Berechnung dieser Wirkung verwenden wir die Formeln (11.) und (12.). Unter Anwendung der Bedingung (I.) findet man durch Inte-

---

oder bei partieller Integration nach $ds_1$ des letzten Integrales:

$$\iota_1\iota_2\int_a^a\int_b^b \frac{d\cdot\frac{A^2}{r}}{dx_1}\cdot\cos\varepsilon . ds_1\,ds_2 = -\iota_1\iota_2\int_a^a\int_b^b \frac{3A^2}{r^4}(x_2-x_1)\frac{dr}{ds_1}\cdot\frac{dr}{ds_2}\cdot ds_1\,ds_2,$$

weil das Glied

$$\iota_1\iota_2\int_a^a\int_b^b \frac{A^2}{r^2}\cdot\frac{dr}{ds_2}\cdot\frac{dx_1}{ds_1}\cdot ds_1\,ds_2$$

bei der Ausführung der Integration nach $ds_2$ fortfällt.

Weiter findet man auf ähnlichem Wege:

$$\iota_1\iota_2\int_a^a\int_b^b\left[\frac{d\cdot\frac{A^2}{r}}{dz_1}\cdot y_1-\frac{d\cdot\frac{A^2}{r}}{dy_1}\cdot z_1\right].\cos\varepsilon . ds_1\,ds_2+\iota_1\iota_2\int_a^a\int_b^b\frac{A^2}{r}\left(\frac{dy_1}{ds_1}\cdot\frac{dz_2}{ds_2}-\frac{dz_1}{ds_1}\cdot\frac{dy_2}{ds_2}\right)ds_1\,ds_2$$

$$=\iota_1\iota_2\int_a^a\int_b^b\frac{A^2}{r^4}(z_2y_1-y_2z_1).\cos\varepsilon . ds_1\,ds_2+\iota_1\iota_2\int_a^a\int_b^b\frac{A^2}{r}\left(\frac{dy_1}{ds_1}\cdot\frac{dz_2}{ds_2}-\frac{dz_1}{ds_1}\cdot\frac{dy_2}{ds_2}\right)ds_1\,ds_2$$

$$=\iota_1\iota_2\int_a^a\int_b^b\frac{A^2}{r^4}(y_2z_1-z_2y_1)\frac{dr}{ds_1}\cdot\frac{dr}{ds_2}\cdot ds_1\,ds_2+\iota_1\iota_2\int_a^a\int_b^b\frac{A^2}{r^2}(y_2z_1-z_2y_1)\frac{d^2r}{ds_1\,ds_2}\,ds_1\,ds_2$$

$$-\iota_1\iota_2\int_a^a\int_b^b\frac{A^2}{r}\left(\frac{dy_2}{ds_2}\cdot\frac{dz_1}{ds_1}-\frac{dz_2}{ds_2}\cdot\frac{dy_1}{ds_1}\right)\cdot ds_1\,ds_2$$

$$=\iota_1\iota_2\int_a^a\int_b^b\frac{3A^2}{r^4}(y_2z_1-z_2y_1)\cdot\frac{dr}{ds_1}\cdot\frac{dr}{ds_2}\cdot ds_1\,ds_2+\iota_1\iota_2\int_a^a\int_b^b\frac{d\cdot\frac{A^2}{r}}{ds_2}\left(y_2\frac{dz_1}{ds_1}-z_2\frac{dy_1}{ds_1}\right)ds_1\,ds_2$$

$$-\iota_1\iota_2\int_a^a\int_b^b\frac{A^2}{r}\left(\frac{dy_2}{ds_2}\cdot\frac{dz_1}{ds_1}-\frac{dz_2}{ds_2}\cdot\frac{dy_1}{ds_1}\right)ds_1\,ds_2$$

$$=\iota_1\iota_2\int_a^a\int_b^b\frac{3A^2}{r^4}(y_2z_1-y_1z_2)\cdot\frac{dr}{ds_1}\cdot\frac{dr}{ds_2}\cdot ds_1\,ds_2-\iota_1\iota_2\int_a^a\int_b^b\frac{2A^2}{r}\left(\frac{dy_2}{ds_2}\cdot\frac{dz_1}{ds_1}-\frac{dz_2}{ds_2}\cdot\frac{dy_1}{ds_1}\right)ds_1\,ds_2,$$

womit auch die Identität der Formeln für $\int_a^a\int_b^b(X)$ bewiesen ist.

gration nach $s_2$:

$$(22.)\quad \int^b_b X = \iota_1\iota_2 ds_1 \int^b_b \left[-\frac{3A^2}{r^3}(x_2-x_1)\frac{dr}{ds_1}\cdot\frac{dr}{ds_2}+(C+G)\cdot\frac{dr}{ds_1}\cdot\frac{dx_2}{ds_2}\right]ds_2,$$

$$(23.)\quad \begin{cases} \int^b_b (X) = \iota_1\iota_2 ds_1 \int^b_b \left[\frac{D+H}{r_1}\cdot\frac{dr}{ds_1}\cdot\left\{(y_2-y_1)\frac{dz_2}{ds_2}-(z_2-z_1)\frac{dy_2}{ds_2}\right\}\right. \\ \qquad\qquad \left. -(A+D)\left(\frac{dy_2}{ds_2}\cdot\frac{dz_1}{ds_1}-\frac{dz_2}{ds_2}\cdot\frac{dy_1}{ds_1}\right)\right]ds_2. \end{cases}$$

Bekanntlich hat schon *Ampère* das Gesetz aufgestellt, dass alle von einem geschlossenen Strome auf ein (unvollständiges) Element einwirkenden Kräfte sich zu einer einzigen, senkrecht gegen das Element stehenden Kraft zusammensetzen lassen, und obwohl dieses Gesetz durch *Ampère* nicht genügend experimentell geprüft worden ist, muss es nach den genaueren *v. Ettingshausen*schen *) Versuchen wohl als unzweifelhaft richtig angesehen werden. Wir werden also zu untersuchen haben, welche Bedingungen zwischen den unbestimmten Functionen aus diesem Gesetze abzuleiten sind.

Dazu denken wir uns das Stromelement im Coordinaten-Anfangspunkte der $X$-Axe gleichgerichtet. Es ist dann

$$ds_1 = dx_1;\quad x_1 = 0;\quad \frac{dr}{ds_1} = \frac{dr}{dx_1} = -\frac{x_2-x_1}{r},$$

also

$$\int^b_b X = \iota_1\iota_2 dx_1 \int^b_b \left[\frac{3A^2}{r^4}(x_2-x_1)^2\frac{dr}{ds_2}-(C+G)\frac{x_2-x_1}{r}\cdot\frac{dx_2}{ds_2}\right]ds_2$$

$$= \iota_1\iota_2 dx_1 \int^b_b \left[\frac{2A^2}{r^3}-\frac{C+G}{r}\right](x_2-x_1)\,dx_2,$$

und dieser Ausdruck muss identisch gleich Null sein. Wird dieses Integral dann ausgedehnt über einen in der $XY$-Ebene liegenden geschlossenen halbkreisförmigen Strom, dessen Durchmesser mit der $Y$-Axe zusammenfällt, so ergiebt sich leicht durch Betrachtungen, die mit denen des vorigen Paragraphen analog sind, dass nothwendig:

$$(24.)\quad \frac{2A^2}{r^4}-\frac{C+G}{r} = \text{Const.}$$

Fügen wir dann aber den am Ende der Einleitung ausgesprochenen Voraussetzungen die folgende ganz plausible *Voraussetzung* (*D*) hinzu: *die ponderomotorischen Wirkungen zwischen zwei Stromelementen verschwinden für unendliche Entfernungen,* so schreibt sich das Resultat:

$$(\text{III.})\quad C+G = \frac{2A^2}{r^3}.$$

*) Wien. Ber. 1878. S. 109.

Weiter findet man für das Element $dx_1$:

$$\int_b^b (X) = \iota_1\iota_2 dx_1 \int_b^b \left[-\frac{D+H}{r^3}(x_2-x_1)\{(y_2-y_1)dz_2-(z_2-z_1)dy_2\}\right],$$

$$\int_b^b (Y) = \iota_1\iota_2 dx_1 \int_b^b \left[-\frac{D+H}{r^3}(x_2-x_1)\{(z_2-z_1)dx_2-(x_2-x_1)dz_2\}\right] - \iota_1\iota_2 dx_1 \int_b^b (\varDelta+D)\,dz_2,$$

$$\int_b^b (Z) = \iota_1\iota_2 dx_1 \int_b^b \left[-\frac{D+H}{r^3}(x_2-x_1)\{(x_2-x_1)dy_2-(y_2-y_1)dx_2\}\right] + \iota_1\iota_2 dx_1 \int_b^b (\varDelta+D)\,dy_2.$$

Weil die *v. Ettingshausen*schen Experimente über das Kräftepaar $\int_b^b (X)$ eigentlich gar keinen directen Aufschluss geben, müssen wir es vorziehen, eines der beiden anderen Kräftepaare einer näheren Untersuchung zu unterwerfen. Bringen wir den geschlossenen Strom in die *YZ*-Ebene, so vereinfacht sich der Ausdruck für das Kräftepaar $\int_b^b (Y)$, indem das erste Glied fortfällt. Das zweite Glied

$$-\iota_1\iota_2 dx_1 \int_b^b (\varDelta+D)\,dz_2$$

kann aber gewiss nur dann identisch Null sein, wenn

$$\varDelta+D = \text{Const.},$$

also

$$\text{(IV.)} \qquad D-F+r\frac{dD}{dr} = 0.$$

Wählen wir dann einen der *XY*-Ebene parallelen Halbkreisstrom, dessen Durchmesser irgendwo in der *YZ*-Ebene (nur nicht in der *Y*-Axe) liegt, so ergiebt sich wieder durch Vergleichung der mit gleicher $x$-Coordinate behafteten Kreiselemente, dass

$$\frac{D+H}{r^3} = \text{Const.},$$

oder wegen der neuen Voraussetzung, dass

$$\text{(V.)} \qquad D+H = 0.$$

Uebrigens ist wieder leicht einzusehen, dass die Bedingungen (III.), (IV.) und (V.) genügen, um die allgemeine Theorie für die in diesem Paragraphen behandelte Wirkung in vollkommene Uebereinstimmung mit der

*Ampère*schen zu bringen. Mit ihrer Hülfe findet man aus (22.) und (23.):

$$(25.)\quad \int_b^b X = \iota_1\iota_2 ds_1 \int_b^b \Big[-\frac{3A^2}{r^3}(x_2-x_1)\cdot\frac{dr}{ds_1}\cdot\frac{dr}{ds_2}+\frac{2A^2}{r^2}\cdot\frac{dr}{ds_1}\cdot\frac{dx_2}{ds_2}\Big] ds_2,$$

$$(26.)\quad \int_b^b (X) = 0,$$

in welchen Ausdrücken *) keine der unbestimmten Functionen mehr vorkommt. Experimente über die Wirkung geschlossener Ströme auf ein Stromelement oder auf einen Stromtheil ohne Stromenden werden also zu keinen neuen Bedingungen Veranlassung geben können. Ueber die Wirkung auf ein vollständiges Stromelement ist dahingegen experimentell nichts bekannt. Ob die auf ein solches Element wirkenden ponderomotorischen Kräfte den Bedingungen (III.), (IV.) und (V.) Genüge leisten würden, muss also dahingestellt bleiben. Nur wollen wir darauf aufmerksam machen, dass der Gleichung (V.) eine höchst einfache Bedeutung beizulegen ist. Sie deutet an, wie durch einen Blick auf die Formel (8.) für $(X)$ unmittelbar einleuchtet, dass niemals ein unvollständiges Element, unter welcher ponderomotorischen Einwirkung es auch stehen möge, durch ein Kräftepaar angegriffen wird, das danach strebt, das Element um seine eigene Axe zu drehen. Obwohl nun ein solches Kräftepaar in der That durch die Voraussetzung $(B)$ nicht ausgeschlossen wird, kann sein Bestehen doch aus verschiedenen auf der Hand liegenden Gründen als unwahrscheinlich bezeichnet werden, auch für vollständige Elemente.

---

*) Die Identität der Formel (25.) mit der bei *Beer* auf S. 258 vorkommenden Formel ist leicht einzusehen. Es ist nämlich:

$$\iota_1\iota_2 ds_1 \int_b^b \frac{d\frac{A^2}{r}}{dx_1}\cos\varepsilon\, ds_2 - \iota_1\iota_2 ds_1 \int_b^b \frac{d\frac{A^2}{r}}{ds_1} dx_2$$

$$= \iota_1\iota_2 ds_1 \int_b^b \frac{A^2}{r^3}(x_2-x_1).\cos\varepsilon.ds_2 + \iota_1\iota_2 ds_1 \int_b^b \frac{A^2}{r^2}\cdot\frac{dr}{ds_1}\cdot dx_2$$

$$= -\iota_1\iota_2 ds_1 \int_b^b \frac{A^2}{r^3}(x_2-x_1)\frac{dr}{ds_1}\cdot\frac{dr}{ds_2}\cdot ds_2$$

$$-\iota_1\iota_2 ds_1 \int_b^b \frac{A^2}{r^2}(x_2-x_1)\frac{d^2 r}{ds_1 ds_2}\cdot ds_2 + \iota_1\iota_2 ds_1 \int_b^b \frac{A^2}{r^2}\cdot\frac{dr}{ds_1}\cdot dx_2$$

$$= -\iota_1\iota_2 ds_1 \int_b^b \frac{3A^2}{r^3}(x_2-x_1)\frac{dr}{ds_1}\cdot\frac{dr}{ds_2}\cdot ds_2 + \iota_1\iota_2 ds_1 \int_b^b \frac{2A^2}{r^2}\cdot\frac{dr}{ds_1}\cdot dx_2.$$

Weiter muss noch bemerkt werden, dass die fünf Relationen (I.) bis (V.), die für unvollständige Elemente alle gültig sein müssen, unter einander nicht unabhängig sind. Jede von ihnen kann aus den vier übrigen hergeleitet werden.

Fassen wir den Inhalt der beiden letzten Paragraphen zusammen, so zeigt es sich, dass zwischen den sieben unbestimmten Functionen $B, C, D, E, F, G, H$ für vollständige Elemente *zwei*, für unvollständige *vier* unabhängige Bedingungen mit Sicherheit festgestellt werden können. Will man daneben das Prinzip der gleichen Wirkung und Gegenwirkung gelten lassen, so kommen zwei neue Bedingungen (1.) und (2.) hinzu; es bleibt aber immer, selbst für unvollständige Elemente, wenigstens noch *eine* Function unbestimmt. Will man auch diese Unbestimmtheit verschwinden lassen, so muss noch *eine* neue Voraussetzung der vorigen hinzugefügt werden. Setzt man z. B. eines der Kräftepaare gleich Null, so sind es auch die übrigen, und man erlangt so das *Ampère*sche Gesetz.

### §. 4. Ableitung der specielleren Theorien.

Bekanntlich ist *Ampère* bei der Auffindung seines Gesetzes von der Voraussetzung ausgegangen, dass die ponderomotorische Kraft zwischen zwei Stromelementen ihrer Richtung nach mit der Verbindungslinie zusammenfällt. Weil ausserdem keine Kräftepaarwirkungen von ihm angenommen werden, so verlangt seine Hypothese:

$$D = E = F = G = H = 0.$$

Wegen der Bedingung (II.) ist dann $C = \frac{2A^2}{r^2}$, und aus der Bedingung (I.) ergiebt sich $B = \frac{A^2}{r^2}$; damit ist dann aber das *Ampère*sche Gesetz hergeleitet, indem dabei nur die Relationen (I.) und (II.) benutzt worden sind, und es zeigt sich also hier unmittelbar die Wahrheit der *C. Neumann*schen Bemerkung *), dass, einmal die erwähnte Hypothese angenommen, das *Ampère*sche Gesetz aus der Wechselwirkung zwischen *beiderseits* geschlossenen Strömen bewiesen werden kann.

Nach der *Grassmann*schen Hypothese muss jede ponderomotorische Kraft senkrecht gegen das Stromelement stehen, welches sie angreift. Kräftepaarwirkungen werden nicht zugelassen. Diesen Hypothesen zufolge hat man also:

$$B = D = E = F = H = 0.$$

---

*) Math. Ann. Bd. XI S. 309.

Aus den Bedingungen (I.) und (II.) findet man leicht, unter Anwendung der neuen Voraussetzung (*D*)

$$C = G = \frac{A^2}{r^2};$$

was offenbar mit dem *Grassmann*schen Gesetze identisch ist.

Weil es sich darin um unvollständige Elemente handelt, ist es hier auch am Orte, die Abhandlung von *Margules* in den Wien. Ber. Oct. 1878 zu besprechen. Mittelst Voraussetzungen, die mit den von uns zur Aufstellung der allgemeinen Theorie angenommenen übereinstimmen, soll dort bewiesen werden: „*Wenn Transversalkräfte angenommen werden, so können sie nur in den afficirten Elementen selbst angreifen*". Wäre dies richtig, so müsste sich aus unseren Voraussetzungen, unter Hinzufügung des Prinzips der gleichen Wirkung und Gegenwirkung, nothwendig das *Ampère*sche Gesetz ergeben. Leider ist aber von *Margules* die Möglichkeit von Kräftepaarwirkungen bei der dritten Fundamentalstellung übersehen worden. Setzen wir in unseren Relationen (I.) — (V.) $D = 0$, so ergiebt sich sofort $F = H = 0$, und es ist dieses das von *Margules* in den citirten Worten zusammengefasste Resultat. Immerhin bleibt es bemerkenswerth, dass die Kräftepaare alle drei zugleich verschwinden, sobald eines von ihnen gleich Null gesetzt wird.

Nachdem wir über die in der Einleitung erwähnte *Stefan*sche Arbeit noch bemerkt haben, dass unsere Bedingungsgleichungen mit den von ihm gefundenen identisch werden, wenn man

$$B = \frac{a}{r^2}; \quad C = -\frac{b}{r^2}; \quad D = 0, \quad E = \frac{d}{r^2}; \quad F = 0, \quad G = \frac{c}{r^2}, \quad H = 0, \quad A^2 = \tfrac{1}{2}$$

setzt*), gehen wir schliesslich zur Besprechung der *Helmholtz*schen Potentialhypothese über.

Nach dieser Hypothese würden die ponderomotorischen Kräfte, die zwei Stromelemente gegen einander ausüben, ein Potential besitzen. Die zwischen zwei solchen Elementen in der Richtung der Entfernungslinie bestehende Anziehungskraft beträgt aber nach §. 1. (4.)

$$X = (B\cos\theta_1\cos\theta_2 - C\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\eta)\,\iota_1\iota_2\,ds_1\,ds_2,$$

und es ist also die bei paralleler Verschiebung eines der beiden Elemente längs der Verbindungslinie bis ins Unendliche durch diese Kraft ge-

*) Durch diese Substitution findet man aus der Bedingung (I.) $a+2b-c-d+3A^2=0$, was mit der *Stefan*schen Formel S. 698 identisch ist. Aus den Bedingungen (II.) und (III.) ergiebt sich: $-b+c=2A^2$. Eliminirt man $A^2$, so kommt: $2a+b+c-2d=0$, was wieder mit der Formel auf S. 697 der citirten *Stefan*schen Abhandlung identisch ist.

leistete Arbeit:

$$\varDelta = \left(-\cos\theta_1\cos\theta_2\int_r^\infty B\,dr + \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\eta\int_r^\infty C\,dr\right)\iota_1\iota_2\,ds_1\,ds_2$$

$$= \left(-\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2\int_r^\infty (B+C)\,dr - \cos\varepsilon\int_r^\infty C\,dr\right)\iota_1\iota_2\,ds_1\,ds_2;$$

weil aber die Arbeit der übrigen Kräfte und Kräftepaare dabei Null ist, so muss, seiner Definition gemäss, das Potential der ponderomotorischen Kräfte, welche beide Elemente gegen einander ausüben, wenn ein solches Potential überhaupt besteht, mit dieser Arbeit $\varDelta$ identisch sein. Wenn aber das Potential der Kraftwirkungen einmal bekannt ist, können diese selbst ohne Mühe berechnet werden, indem man die Elemente unendlich kleinen Drehungen und Verschiebungen unterwirft *). Auf diese Weise findet man:

---

*) Sind $\partial r$, $\partial\theta_1$, $\partial\theta_2$, $\partial\varepsilon$ die bei einer solchen Verschiebung oder Drehung auftretenden Variationen der Grössen $r$, $\theta_1$, $\theta_2$, $\varepsilon$, so ist die durch die ponderomotorischen Kräfte dabei geleistete Arbeit, wenn man zur Abkürzung den Factor $\iota_1\iota_2\,ds_1\,ds_2$ fortlässt:

$$-\partial\varDelta = -[(B+C)\cos\theta_1\cos\theta_2 + C\cos\varepsilon]\,\partial r - \left(\sin\varepsilon\int_r^\infty C\,dr\right)\partial\varepsilon$$

$$-\left(\sin\theta_1\cos\theta_2\int_r^\infty (B+C)\,dr\right)\partial\theta_1 - \left(\cos\theta_1\sin\theta_2\int_r^\infty (B+C)\,dr\right)\partial\theta_2.$$

Setzt man hier: $\varepsilon = 90^\circ$, $\theta_1 = 90^\circ$, $\theta_2 = 90^\circ$, so findet man unmittelbar durch Betrachtung der dann eintretenden dritten Fundamentalstellung:

$$-\partial\varDelta = -\left(\int_r^\infty C\,dr\right).\partial\varepsilon = -D.\partial\varepsilon.$$

Setzt man hingegen: $\varepsilon = 90^\circ$, $\theta_1 = 90^\circ$, $\theta_2 = 0^\circ$, so befinden sich die Elemente in der vierten Fundamentalstellung, wobei

$$-\partial\varDelta = -\left(\int_r^\infty C\,dr\right).\partial\varepsilon - \left(\int_r^\infty (B+C)\,dr\right).\partial\theta_1.$$

Bei einer unendlich kleinen Verschiebung $\partial y_1$ des ersten Elementes in seiner eigenen Stromrichtung ist dann aber:

$$\partial\varepsilon = 0 \quad \text{und} \quad \partial\theta_1 = \frac{\partial y_1}{r} \quad \text{also} \quad -\partial\varDelta = -\left(\int_r^\infty (B+C)\,dr\right)\cdot\frac{\partial y_1}{r} = E.\partial y_1$$

oder

$$E = -\frac{1}{r}\cdot\int_r^\infty (B+C)\,dr.$$

Bei einer unendlich kleinen Drehung dieses Elementes, wobei das Kräftepaar $F$ Arbeit leistet, hat man dahingegen:

$$\partial\varepsilon = -\partial\theta_1, \quad \text{also} \quad -\partial\varDelta = -\left(\int_r^\infty B\,dr\right)\partial\theta_1 = F.\partial\theta_1, \quad \text{oder} \quad F = -\int_r^\infty B\,dr.$$

Die beiden übrigbleibenden Beziehungen für $G$ und $H$ findet man ebenso durch unendlich kleine Bewegungen des zweiten Elementes.

$$D=\int_r^\infty C\,dr;\quad E=-\frac{1}{r}\int_r^\infty (B+C)\,dr;\quad F=-\int_r^\infty B\,dr;\quad G=E;\quad H=-D.$$

Zwischen den sieben unbestimmten Functionen treten also durch die Potentialhypothese fünf Beziehungen ein, mittelst welcher wir alle übrigen durch zwei, z. B. durch $D$ und $F$, ausdrücken können.

Man findet:

$$B=\frac{dF}{dr};\quad C=-\frac{dD}{dr};\quad E=G=\frac{F-D}{r};\quad H=-D.$$

Ausserdem müssen aber diese Functionen jedenfalls den Bedingungsgleichungen (I.) und (II.) Genüge leisten. Durch Substitution in diese Gleichungen findet man:

$$2(D-F)+r\frac{dF}{dr}-r^2\frac{d^2D}{dr^2}+\frac{3A^2}{r} = 0$$

und

$$(27.)\qquad D-F+r\frac{dD}{dr}+\frac{A^2}{r} = 0,$$

welche beiden Gleichungen aber von einander abhängig sind, indem die erste aus der zweiten hervorgeht, wenn man diese durch $r^2$ dividirt und nach $r$ differentiirt. Für die ponderomotorischen Wirkungen zwischen zwei vollständigen Stromelementen kann also ein Potential bestehen, und dieses Potential enthält immer noch eine unbestimmte Function der Entfernung. Unter Anwendung der gefundenen Formeln schreibt es sich:

$$\varDelta = \left(D\,r\frac{d^2r}{ds_1\,ds_2}+F\cdot\frac{dr}{ds_1}\cdot\frac{dr}{ds_2}\right)\iota_1\iota_2\,ds_1\,ds_2,$$

und ist dann, wegen der Bedingung (27.), identisch mit der allgemeinsten von *Helmholtz* *) angegebenen Form seines Potentials, nämlich mit:

$$\left[-\frac{A^2}{r}\cos\varepsilon+\frac{d^2\varphi}{ds_1\,ds_2}\right]\iota_1\iota_2\,ds_1\,ds_2,$$

wenn man in diesen Ausdruck für $\varphi$ den Werth

$$\varphi = \int (D\,r-A^2)\,dr$$

substituirt.

Uebrigens geht aus unserer Darstellung unmittelbar hervor, dass für die Kraftwirkungen zwischen *unvollständigen* Elementen kein Potential be-

*) Dieses Journal, Bd. 72, 1870, S. 72—74.

stehen kann, weil nämlich die Bedingung (IV.), welcher solche Elemente unterworfen sein müssen, mit (27.) im Widerspruche steht. Für solche Elemente hat dann auch *Helmholtz* in seiner Potentialtheorie das *Ampère*sche Gesetz als das richtige angenommen.

Zu weit würde es uns führen, hier nachzuweisen, mittelst welcher weiteren Hypothesen *Helmholtz* die Gesetze der Kraftwirkungen zwischen einem vollständigen und einem unvollständigen oder zwischen zwei unvollständigen Elementen herleitet. Folgende Tabelle erlaubt es, jedes durch die allgemeine Theorie erhaltene Resultat nach Belieben auf jede mehr specielle Theorie anwendbar zu machen.

| | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ | $G$ | $H$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Ampère* | $\frac{A^2}{r^2}$ | $\frac{2A^2}{r^2}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| *Grassmann* | 0 | $\frac{A^2}{r^2}$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{A^2}{r^2}$ | 0 |
| *Stefan* | $\frac{a}{r^2}$ | $-\frac{b}{r^2}$ | 0 | $\frac{d}{r^2}$ | 0 | $\frac{c}{r^2}$ | 0 |
| allgemeinste Potentialtheorie | $\frac{r^2\varphi'''-A^2}{r^2}$ | $\frac{A^2+\varphi'-\varphi''r}{r^2}$ | $\frac{A^2+\varphi'}{r}$ | $\frac{r\varphi''-\varphi'}{r^2}$ | $\frac{A^2+r\varphi''}{r}$ | $\frac{r\varphi''-\varphi'}{r^2}$ | $-\frac{A^2+\varphi'}{r}$ |
| *Speciellere Potentialtheorie.* | | | | | | | |
| Wirkung zwischen vollständig. Elementen | $-\frac{A^2}{r^2}$ | $\frac{1+k}{2}\cdot\frac{A^2}{r^2}$ | $\frac{1+k}{2}\cdot\frac{A^2}{r}$ | $\frac{1-k}{2}\cdot\frac{A^2}{r^2}$ | $\frac{A^2}{r}$ | $\frac{1-k}{2}\cdot\frac{A^2}{r^2}$ | $-\frac{1+k}{2}\cdot\frac{A^2}{r^2}$ |
| vollständiges auf unvollständiges | wie in der *Grassmann*schen Theorie. | | | | | | |
| unvollständiges auf vollständiges | 0 | $\frac{A^2}{r^2}$ | 0 | $\frac{A^2}{r^2}$ | $\frac{A^2}{r}$ | 0 | 0 |
| unvollständiges auf unvollständiges | wie in der *Ampère*schen Theorie. | | | | | | |

Breda, den 10. December 1879.

# Auszug aus einem Schreiben des Herrn *L. Fuchs* an *C. W. Borchardt.*

In einem Résumé der Resultate meiner Arbeit „über eine Klasse von Functionen etc.," welche ich in den Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Februar 1880 p. 170—176 veröffentlicht habe, befindet sich p. 173 daselbst folgender Satz:

I. Sind $f(z)$ und $\varphi(z)$ ein willkürliches Fundamentalsystem von Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten, und genügen für jeden singulären Punkt die Wurzeln $r_1$, $r_2$ der zugehörigen determinirenden Fundamentalgleichung den Bedingungen

$$r_2 = r_1+1 \quad \text{oder} \quad r_1 = -1+\frac{1}{n}, \quad r_2 = -1+\frac{2}{n} \quad (n \text{ ganze positive Zahl}),$$

sowie die Wurzeln $\varrho_1$, $\varrho_2$ der zu $z=\infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung den Bedingungen

$$\varrho_2 = \varrho_1+1 \quad \text{oder} \quad \varrho_1 = 1+\frac{1}{\nu}, \quad \varrho_2 = 1+\frac{2}{\nu} \quad (\nu \text{ ganze positive Zahl}),$$

und enthalten die Entwickelungen der Lösungen der Differentialgleichung in der Umgebung eines singulären Punktes keine Logarithmen, so wird durch die Gleichung

$$(F.) \qquad \frac{f(z)}{\varphi(z)} = \zeta,$$

$z$ als eindeutige Function von $\zeta$ definirt.

In meiner in Ihrem Journal Bd. 89 p. 151 sqq. enthaltenen Arbeit, in welcher die oben genannten Resultate entwickelt wurden, ist der obige Satz als Satz I p. 159 aufgenommen worden, in einer etwas veränderten Form, welche weniger deutlich ist und die Möglichkeit eines Missverständnisses nicht ausschliesst. Auf diesen Umstand wurde ich aufmerksam ge-

macht durch eine gütige Mittheilung des Herrn *Henri Poincaré,* professeur à la faculté des sciences de Caen.

Ich erlaube mir daher hier einige Erläuterungen zu diesem Satze hinzuzufügen.

Zieht man in der $z$-Ebene von jedem der singulären Punkte $a_1, a_2, \dots a_\varrho$ der Differentialgleichung einen beliebigen Schnitt, von $a_i$ den Schnitt $q_i$. Diese Schnitte erstrecken sich sämmtlich bis zum Punkte $z = \infty$, und sind nur der Beschränkung unterworfen, weder sich selbst noch einer den anderen zu schneiden. Bezeichnen wir die so zerschnittene $z$-Ebene mit $T$. Werden für einen willkürlichen Werth $z = z_0$, $f(z)$ und $\varphi(z)$, sowie ihre ersten Ableitungen willkürlich gewählt, so sind diese Functionen, folglich auch $\zeta$ in $T$ überall eindeutig bestimmt. Ueberschreitet man nach und nach die einzelnen Schnitte $q_1, q_2, \dots q_\varrho$ in beliebiger Reihenfolge und jeden beliebig oft, so mögen die so entstehenden Flächen mit $T_1$, $T_2$, $T_3$ etc. bezeichnet werden. Ihre Anzahl ist unendlich gross, wenn nicht $f(z)$ und $\varphi(z)$ algebraische Functionen sind. In jeder dieser Flächen $T_i$ ist $\zeta$ eine eindeutige Function von $z$. — Wir stellen nunmehr in der $\zeta$-Ebene durch die Gleichung ($F$.) die Abbildungen der einzelnen Blätter $T$, $T_1$, $T_2$, $T_3$ etc. her. Die der Fläche $T_i$ entsprechende Abbildungsfläche in der $\zeta$-Ebene möge mit $S_i$ bezeichnet werden. So lange nicht in einem Blatte $T_i$, $f(z)$ und $\varphi(z)$ *identisch,* d. h. für jeden Werth von $z$, unendlich werden, erfüllt die zugehörige Abbildung $S_i$ ebenfalls eine Fläche, mag $T_i$ durch eine endliche oder eine unendliche Anzahl von Ueberschreitungen der Schnitte $q_1$, $q_2, \dots q_\varrho$ erhalten worden sein. Sind dagegen in einem Blatte $T_i$, welches durch unendlich oft wiederholtes Ueberschreiten der Schnitte $q$ erhalten worden, $f(z)$ und $\varphi(z)$ identisch unendlich, so ist die Abbildung $S_i$ von $T_i$ ein Punkt.

Die Gesammtheit der Abbildungen $S$, $S_1$, $S_2, \dots$ bildet eine *zusammenhängende* Fläche in der $\zeta$-Ebene. Diejenigen dieser Abbildungen, welche *nicht* solchen Flächen $T_i$ zugehören, in denen $f(z)$ und $\varphi(z)$ *identisch* unendlich werden, enthalten nach den Entwickelungen meiner Arbeit in Ihrem Journal p. 158—160 *keinen Verzweigungspunkt; die Gesammtheit solcher Abbildungen constituirt daher eine Fläche $\sigma$ in der $\zeta$-Ebene, welche diese Ebene überall nur einfach bedeckt.* An der Begrenzung dieser Fläche $\sigma$ befinden sich die Punkte, welche als Abbildungen solcher Flächen $T_i$ auftreten, innerhalb deren $f(z)$ und $\varphi(z)$ identisch unendlich werden, da diese durch

Grenzübergang aus den die Fläche $\sigma$ constituirenden Flächen erhalten werden.

Der Sinn des Satzes I p. 161 meiner Arbeit in Ihrem Journal geht nun dahin, dass $z$ ***innerhalb der Fläche*** $\sigma$ eine überall meromorphe Function von $\zeta$ sei. Aus ihm geht alsdann das gleich nachfolgende Corollar hervor, wovon in den späteren Theilen der Arbeit Gebrauch gemacht wird, dass nämlich $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ nicht für zwei verschiedene Werthe von $z$ einen und denselben Werth annimmt, vorausgesetzt natürlich, dass dieser Quotient nicht von $z$ unabhängig wird, oder was dasselbe besagt, dass nicht $f(z)$ und $\varphi(z)$ identisch unendlich werden.

Wird einer der Grenzpunkte nach jeder Richtung von Flächen $S$ umgeben, so ist zu den obengenannten Bedingungen noch eine auf die in den Coefficienten der Differentialgleichung enthaltenen Constanten bezügliche hinzuzufügen.

Heidelberg, den 7. Juni 1880.

---

# Ueber eine Differentialgleichung zweiter Ordnung.

(Von Herrn *J. N. Hazzidakis* zu Athen.)

---

Wenn man das System der linearen Differentialgleichungen hat

$$(1.)\quad \begin{cases} \frac{du}{dx} = \alpha u + \beta v + \gamma w, \\ \frac{dv}{dx} = \alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w, \\ \frac{dw}{dx} = \alpha_2 u + \beta_2 v + \gamma_2 w, \end{cases}$$

und man setzt $y = \frac{v}{u}$, so findet man leicht, dass $y$ einer Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form

$$(2.)\quad Ay^3 + By^2 + Cy + D + Q\left(y\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy^2}{dx^2}\right) + R\frac{d^2y}{dx^2} + Sy\frac{dy}{dx} + T\frac{dy}{dx} = 0$$

genügt, deren Coefficienten Functionen von $x$ sind. Man kann daher die Frage aufstellen: Unter welchen Bedingungen lässt sich das allgemeine Integral der Gleichung (2.) als Quotient von der Form $\frac{v}{u}$ darstellen, wo $u$ und $v$ durch ein lineares System (1.) definirt werden, also die Form haben

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2 + C_3 u_3, \quad v = C_1 v_1 + C_2 v_2 + C_3 v_3,$$

worin $C_1$, $C_2$, $C_3$ willkürliche Constanten bedeuten?

Diese Frage wird hier beantwortet und zwar auf folgende Weise.

Wenn $Q$ und $R$ als verschieden von Null vorausgesetzt werden, und zur Abkürzung gesetzt ist

$$(3.)\quad \begin{cases} 3K.QR = \ \ R(S+Q') + 2Q(T+R'), \\ 3L.QR = 2R(S+Q') + \ \ Q(T+R'), \end{cases}$$

und

$$K - L = M,$$

so sind die Bedingungen, unter welchen das allgemeine Integral der Gleichung (2.) die genannte Form hat, folgende zwei

$$(4.)\quad \begin{cases} B + M'Q - MQ' + MQL - \frac{Q^2}{R^2}D - \frac{2AR}{Q} = 0, \\ C + M'R - MR' + MRK - \frac{R^2}{Q^2}A - \frac{2DQ}{R} = 0. \end{cases}$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist das allgemeine Integral der Gleichung (2.) $y = \frac{v}{u}$, und die Coefficienten des Systems (1.), wodurch $u$ und $v$ definirt werden, haben folgende Werthe:

$$(5.)\begin{cases} \alpha = K+\delta+R.\xi+2Q.\eta, & \alpha_1 = -R.\eta, & \varphi.\alpha_2 = -\frac{D}{R^2}+\eta'+\eta(K+R\xi+Q\eta), \\ \beta = -Q.\xi, & \beta_1 = L+\delta+2R.\xi+Q.\eta, & \varphi.\beta_2 = -\frac{A}{Q^2}-\xi'-\xi(L+R\xi+Q\eta), \\ \gamma = -Q.\varphi, & \gamma_1 = R.\varphi, & \varphi.\gamma_2 = \varphi.\delta-\varphi'; \end{cases}$$

dabei sind $\delta$, $\xi$, $\eta$ und $\varphi$ beliebige Functionen von $x$ (nur muss $\varphi$ verschieden von Null sein).

Somit ist in diesem Falle die Integration der Differentialgleichung (2.) auf die Integration des Systems (1.), oder, wenn man will, auf die Integration einer linearen Differentialgleichung dritter Ordnung zurückgeführt; also ist die Natur der Integrale und das Verhalten derselben um die singulären Punkte bestimmt.

---

Sei $y = \frac{v}{u}$ das allgemeine Integral der Gleichung (2.) und $u$, $v$ durch das System (1.) definirt. Dann erfährt der Quotient $\frac{v}{u}$, mithin auch die Gleichung (2.) keine Veränderung, wenn wir im Systeme (1.) statt $w$ eine lineare homogene Function von $u$, $v$, $w$ vom ersten Grade einführen; wir setzen also

$$w = \xi.u+\eta.v+\zeta.w'$$

und bestimmen die drei Functionen $\xi$, $\eta$, $\zeta$ von $x$ so, dass im neuen Systeme, wodurch die $u$, $v$, $w'$ definirt werden, die erste Gleichung kein $v$, die zweite kein $u$ und die dritte kein $w'$ enthält, d. i. so, dass die neuen Coefficienten $\beta$, $\alpha_1$, $\gamma_2$ zu Null werden. Dieses ist im allgemeinen möglich, denn die genannten Coefficienten sind:

$$\beta+\gamma\eta, \quad \alpha_1+\gamma_1\xi, \quad \zeta'+\zeta(\gamma\xi+\gamma_1\eta-\gamma_2),$$

wenn man also die Gleichungen setzt

$$\beta+\gamma\eta = 0, \quad \alpha_1+\gamma_1\xi = 0 \quad \text{und} \quad \zeta'+\zeta(\gamma\xi+\gamma_1\eta-\gamma_2) = 0$$

und $\gamma$, $\gamma_1$ beide als verschieden von Null annimmt, so erhält man aus den zwei ersten die Werthe von $\xi$ und $\eta$, und aus der dritten den Werth von $\zeta$. Man kann sich also das System der linearen Gleichungen, worauf die Glei-

chung (2.) zurückgeführt wird, auf die Form gebracht denken

$$(6.)\quad \frac{du}{dx} = \alpha u + \gamma w, \quad \frac{dv}{dx} = \beta_1 v + \gamma_1 w, \quad \frac{dw}{dx} = \alpha_2 u + \beta_2 v.$$

Wir setzen ferner $u = \varrho . u'$, $v = \varrho . v'$, was auch keine Aenderung der betrachteten Gleichung hervorbringt, und bestimmen die unbekannte Function $\varrho$ von $x$ so, dass im neuen Systeme die Summe $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_2$ zu Null wird; dazu ist nöthig und hinreichend, dass

$$\varrho(\alpha + \beta_1) - 2\varrho' = 0,$$

woraus die Function $\varrho$ bestimmt wird. Wir schliessen also: Wenn das allgemeine Integral der Gleichung (2.) die angegebene Form $y = \frac{v}{u}$ hat, so kann man sich das lineare System, wodurch der Zähler und der Nenner von $y$ definirt werden, in die Form gebracht denken

$$(7.)\quad \frac{du}{dx} = \alpha u + \gamma w, \quad \frac{dv}{dx} = -\alpha v + \gamma_1 w, \quad \frac{dw}{dx} = \alpha_2 u + \beta_2 v.$$

Man setze nun $y = \frac{v}{u}$, oder $uy - v = 0$ und differentiire zweimal nach einander, so erhält man mit Berücksichtigung der Gleichungen des Systems (7.)

$$(8.)\quad \begin{cases} uy - v = 0, \\ y'u + 2\alpha v + (\gamma y - \gamma_1) w = 0, \\ u(y'' + \alpha y' + \alpha_2 \gamma y - \alpha_2 \gamma_1) + v(2\alpha' - 2\alpha^2 + \beta_2 \gamma y - \beta_2 \gamma_1) + w(2\gamma y' + 2\alpha\gamma_1 + \gamma' y - \gamma_1') = 0; \end{cases}$$

daraus kommt durch Elimination der $u$, $v$, $w$ die Gleichung zweiten Grades, welcher $y$ genügt,

$$(9.)\quad \begin{cases} [y'' + \alpha y' + \alpha_2 \gamma y - \alpha_2 \gamma_1].(\gamma_1 - \gamma y) \\ -[2\alpha' - 2\alpha^2 + \beta_2 \gamma y - \beta_2 \gamma_1].(\gamma y^2 - \gamma_1 y) \\ +[2\gamma y' + 2\alpha\gamma_1 + \gamma' y - \gamma_1'].(2\alpha y + y') = 0. \end{cases}$$

Soll nun diese Gleichung die gegebene Gleichung (2.) sein, so müssen folgende Gleichungen stattfinden:

$$(10.)\quad \omega . Q = -\gamma, \quad \omega . R = \gamma_1,$$

$$(11.)\quad \omega S = \gamma' + 3\alpha\gamma, \quad \omega T = -\gamma_1' + 3\alpha\gamma_1,$$

$$(12.)\quad \omega A = -\gamma^2 \beta_2, \quad \omega D = -\gamma_1^2 . \alpha_2,$$

$$(13.)\quad \begin{cases} \omega . B = \phantom{-}2\alpha\gamma' + \gamma\,(2\alpha^2 - 2\alpha' - \gamma\alpha_2 + 2\gamma_1\beta_2), \\ \omega . C = -2\alpha\gamma_1' + \gamma_1 (2\alpha' + 2\alpha^2 - \gamma_1\beta_2 + 2\gamma\alpha_2), \end{cases}$$

wo $\omega$ einen unbekannten, von Null verschiedenen Factor bedeutet.

Aus den Gleichungen (10.), (11.) und (12.) kommen nun leicht folgende Werthe der fünf Coefficienten des Systems (7.) und des Factors $\omega$:

$$(14.)\quad \begin{cases} \alpha = -\tfrac{1}{2}\cdot M, \quad 2\omega'+\omega(K+L) = 0, \quad \alpha_2 = -\dfrac{D}{R^2}\cdot\dfrac{1}{\omega}, \quad \beta_2 = -\dfrac{A}{Q^2}\cdot\dfrac{1}{\omega}, \\ \qquad\qquad \gamma = -\omega.Q, \quad \gamma_1 = \omega.R. \end{cases}$$

Diese Werthe, in die zwei übrigen Gleichungen (13.) eingesetzt, geben nun die zwei Bedingungen (4.), welche von den Coefficienten der Gleichung (2.) erfüllt werden müssen.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so wird die betrachtete Gleichung (2.) auf folgendes System linearer Gleichungen zurückgeführt:

$$(15.)\quad \frac{du}{dx} = -\tfrac{1}{2}M.u-\omega.Q.w, \quad \frac{dv}{dx} = \tfrac{1}{2}M.v+\omega.R.w, \quad \omega\cdot\frac{dw}{dx} = -\frac{D}{R^2}\cdot u-\frac{A}{Q^2}\cdot v,$$

wo $\omega$ den Werth hat

$$l\omega = -\tfrac{1}{2}\int(K+L)\,dx.$$

Will man jetzt von diesem besonderen Systeme zum allgemeinsten der Form (1.) übergehen, woraus die gegebene Gleichung (2.) durch die Substitution $y = \frac{v}{u}$ entsteht, so setze man

$$\omega.w = \varrho(-\eta u'+\xi v'+\varphi w'), \quad u = \varrho.u', \quad v = \varrho.v'$$

und

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = -\vartheta-\tfrac{1}{2}(K+L)-Q\eta-R\xi,$$

wo $\xi$, $\eta$, $\vartheta$ und $\varphi$ willkürliche Functionen von $x$ sind ($\varphi \gtrless 0$), dann kommt nach einigen Reductionen das System mit den Coefficienten (5.).

Die willkürlichen Functionen kann man so bestimmen, dass das lineare System möglichst einfach wird; man kann z. B. setzen $\xi = \eta = \vartheta = 0$ und $\varphi = 1$, so erhält man folgendes System

$$(16.)\quad \frac{du}{dx} = Ku-Qw, \quad \frac{dv}{dx} = Lv+Rw, \quad \frac{dw}{dx} = -\frac{D}{R^2}u-\frac{A}{Q^2}v.$$

Wir haben oben die $\gamma$ und $\gamma_1$ im Systeme (1.) als von Null verschieden angenommen; die besonderen Fälle, wo $\gamma_1 = 0$ oder $\gamma = 0$ ist, lassen sich auf dieselbe Weise behandeln, und man kommt leicht auf folgendes Resultat:

Wenn die Coefficienten der Gleichung (2.) die Bedingungen erfüllen

$$(17.)\quad Q = 0, \quad 9AR = S^2, \quad B = \frac{S.T}{3R}+R\left(\frac{S}{3R}\right)',$$

so entsteht sie aus dem linearen Systeme $\left(\text{wenn gesetzt wird } y = \frac{v}{u}\right)$

$$(18.)\quad 3R\cdot\frac{du}{dx} = S.v, \quad \frac{dv}{dx} = \omega.R.w, \quad \omega R^2\cdot\frac{dw}{dx} = -Du-Cv,$$

wobei

$$l\omega = -lR-\int\frac{T}{R}\,dx.$$

Wenn die Coefficienten der gegebenen Gleichung die Bedingungen erfüllen

$$(19.)\qquad R=0,\quad 9QD=-T^2,\quad C=-\frac{ST}{3Q}-Q\left(\frac{T}{3Q}\right)',$$

so entsteht dieselbe aus folgendem Systeme

$$(20.)\qquad \frac{du}{dx}=-\omega Qw,\quad 3Q\cdot\frac{dv}{dx}=T.u,\quad \omega Q^2\cdot\frac{dw}{dx}=-Bu-Av,$$

wo $\omega$ durch die Gleichung

$$l\omega = -lQ-\int\frac{S}{Q}dx$$

bestimmt wird.

---

Besonders hervorzuheben sind folgende Fälle in der Gleichung (2.):

1) Wenn $A=0$ oder $D=0$ ist, so wird die Integration der Gleichung auf die Integration einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung zurückgeführt, denn die dritte Gleichung des linearen Systemes (16.) enthält alsdann nur die Variabeln $u$, $w$ oder nur $v$, $w$, welche auch die eine der ersten Gleichungen enthält.

2) Wenn zugleich $A=0$ und $D=0$ ist, so lässt sich das allgemeine Integral der Gleichung (2.) finden (unter der Voraussetzung, dass die Bedingungen (4.) erfüllt sind); denn die dritte Gleichung des linearen Systemes (16.) giebt alsdann unmittelbar $w=\text{const.}$, folglich werden die übrigen zwei lineare Gleichungen erster Ordnung, welche sich leicht integriren lassen, so dass die Differentialgleichung

$$(21.)\qquad Q\left(y\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy^2}{dx^2}\right)+R\frac{d^2y}{dx^2}+Sy\frac{dy}{dx}+T\frac{dy}{dx}+By^2+Cy = 0$$

integrirt wird unter den Bedingungen

$$(22.)\qquad B+M'Q-MQ'+MQL=0 \quad\text{und}\quad C+M'R-MR'+MRK=0,$$

welche die zwei Coefficienten $B$ und $C$ durch die übrigen vier bestimmen.

3) Die Gleichung (2.) wird sich noch leicht integriren lassen, wenn ihre Coefficienten alle constant sind und den Bedingungen (4.) genügen, denn alsdann lässt sich das lineare System (16.) leicht integriren.

---

Ich will noch etwas über die allgemeine Form der Gleichungen $n^{\text{ter}}$ Ordnung hinzufügen, deren Integral von der Form ist

$$y=-\frac{\Sigma C_\nu v_\nu}{\Sigma C_\nu u_\nu}\qquad \nu=0,\ 1,\ 2,\ \dots\ n,$$

wo $v_0, v_1, v_2, \dots v_n$; $u_0, u_1, u_2, \dots u_n$ Functionen von $x$, und $C_0, C_1, C_2, \dots C_n$ die willkürlichen Constanten bedeuten.

Wenn man $\Sigma C_\nu u_\nu = u$ setzt, so kann man aus den Gleichungen

$$\Sigma C_\nu u_\nu = u, \quad \Sigma C_\nu \frac{du_\nu}{dx} = \frac{du}{dx}, \quad \Sigma C_\nu \frac{d^2u_\nu}{dx^2} = \frac{d^2u}{dx^2}, \quad \dots \quad \Sigma C_\nu \frac{d^nu_\nu}{dx^n} = \frac{d^nu}{dx^n},$$

vorausgesetzt, dass die Functionen $u_0, u_1, \dots u_n$ linear unabhängig sind, die Constanten $C_0, C_1, \dots C_n$ ausdrücken, und indem man ihre Werthe in den Zähler von $y$ (den ich mit $v$ bezeichnen will) und seine Ableitungen einführt, erhält man Gleichungen von der Form:

$$v = \Sigma A_\nu^{0} \frac{d^\nu u}{dx^\nu}, \quad \frac{dv}{dx} = \Sigma A_\nu^{(1)} \frac{d^\nu u}{dx^\nu}, \quad \frac{d^2v}{dx^2} = \Sigma A_\nu^{(2)} \frac{d^\nu u}{dx^\nu}, \quad \dots \quad \frac{d^nv}{dx^n} = \Sigma A_\nu^{(n)} \frac{d^\nu u}{dx^\nu},$$

wo die $A_\nu^{(\mu)}$ aus den Functionen $u_\nu$, $v_\nu$ zusammengesetzt sind.

Man differentiire jetzt die Gleichung $uy + v = 0$ $n$-mal nach einander, so kommen die Gleichungen

$$yu + \Sigma A_\nu^{0} \frac{d^\nu u}{dx^\nu} = 0, \quad u\frac{dy}{dx} + y\frac{du}{dx} + \Sigma A_\nu^{(1)} \frac{d^\nu u}{dx^\nu} = 0, \quad \dots$$

$$u\frac{d^ny}{dx^n} + n\frac{du}{dx}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \dots + y\frac{d^nu}{dx^n} + \Sigma A_\nu^{(n)} \frac{d^\nu u}{dx^\nu} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich nun die $u$, $\frac{du}{dx}, \dots \frac{d^nu}{dx^n}$ eliminiren, und man erhält die allgemeinste Gleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung, deren Integral die oben gesetzte Form hat

$$\begin{vmatrix} y + A_0^{0} & A_1^{0} & A_2^{0} & \dots & A_n^{0} \\ \frac{dy}{dx} + A_0^{(1)} & y + A_1^{(1)} & A_2^{(1)} & \dots & A_n^{(1)} \\ \frac{d^2y}{dx^2} + A_0^{(2)} & \frac{dy}{dx} + A_1^{(2)} & y + A_2^{(2)} & \dots & A_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d^ny}{dx^n} + A_0^{(n)} & n\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + A_1^{(n)} & \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-1}} + A_2^{(n)} & \dots & y + A_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

Aus der Form dieser Gleichung geht nun unmittelbar hervor, dass sie die unbekannte Function $y$ bis zum Grade $n+1$ enthält, ihre Ableitung bis zum Grade $n$ und im allgemeinen die Ableitung $p^{\text{ter}}$ Ordnung bis zum Grade $n-p+1$.

Athen, den 24. April 1880.

---

# Ueber eine Eigenschaft der Systeme von linearen homogenen Differentialgleichungen.

(Von Herrn *J. N. Hazzidakis* zu Athen.)

---

Diese Eigenschaft besteht darin, dass, wenn aus den Coefficienten eines Systems

$$(1.)\quad \frac{dy_\varrho}{dx} = \sum_\lambda A_\lambda^{(\varrho)} y_\lambda \quad \text{für} \quad \varrho = 1, 2, 3, \dots n$$
$$\lambda = 1, 2, 3, \dots n$$

die Coefficienten eines anderen

$$(2.)\quad \frac{dz_\varrho}{dx} = \sum_\lambda B_\lambda^{(\varrho)} z_\lambda$$

auf folgende Weise zusammengesetzt sind

$$(3.)\quad B_\lambda^{(\varrho)} = -A_\varrho^{(\lambda)} + \omega \delta_{\lambda\varrho},$$

wo $\omega = \sum_\lambda A_\lambda^{(\lambda)}$ und $\delta_{\lambda\varrho} = 0$, wenn $\lambda$ ungleich $\varrho$, aber $= 1$, wenn $\lambda = \varrho$, und man ein System von $n$ Lösungen der Gleichungen (1.) hat

$$(4.)\quad \begin{cases} y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & y_3^{(1)} & \dots & y_n^{(1)} \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & y_3^{(2)} & \dots & y_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & y_3^{(n)} & \dots & y_n^{(n)}, \end{cases}$$

wofür die Determinante $\varDelta = |y_\lambda^{(\varrho)}|$ nicht identisch verschwindet, so giebt das dem Systeme der $y_\lambda^\varrho$ adjungirte System von $n^2$ Elementen

$$(5.)\quad \begin{cases} z_1^{(1)} & z_2^{(1)} & z_3^{(1)} & \dots & z_n^{(1)} \\ z_1^{(2)} & z_2^{(2)} & z_3^{(2)} & \dots & z_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_1^{(n)} & z_2^{(n)} & z_3^{(n)} & \dots & z_n^{(n)} \end{cases}$$

ein System von $n$ Lösungen der Differentialgleichungen (2.).

---

Das System von linearen Differentialgleichungen, dessen Lösungen die $z_\lambda^{(\varrho)}$ sind, ist folgendes

$$(6.)\quad \begin{vmatrix} \frac{dz_\varrho}{dx} & \frac{dz_\varrho^{(1)}}{dx} & \frac{dz_\varrho^{(2)}}{dx} & \dots & \frac{dz_\varrho^{(n)}}{dx} \\ z_1 & z_1^{(1)} & z_1^{(2)} & \dots & z_1^{(n)} \\ z_2 & z_2^{(1)} & z_2^{(2)} & \dots & z_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_n & z_n^{(1)} & z_n^{(2)} & \dots & z_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{für} \quad \varrho = 1, 2, 3, \dots n,$$

und wenn man setzt

$$\frac{dz_\varrho}{dx} = \sum_\lambda B_\lambda^{(\varrho)} z_\lambda \quad \text{und} \quad \theta = |z_\lambda^{(\varrho)}|,$$

so ist

$$(7.)\quad \theta . B_\lambda^{(\varrho)} = \begin{vmatrix} z_1^{(1)} & z_1^{(2)} & \dots & z_1^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{\lambda-1}^{(1)} & z_{\lambda-1}^{(2)} & \dots & z_{\lambda-1}^{(n)} \\ \frac{dz_\varrho^{(1)}}{dx} & \frac{dz_\varrho^{(2)}}{dx} & \dots & \frac{dz_\varrho^{(n)}}{dx} \\ z_{\lambda+1}^{(1)} & z_{\lambda+1}^{(2)} & \dots & z_{\lambda+1}^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_n^{(1)} & z_n^{(2)} & \dots & z_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man nun mit der Determinante $\Delta$ und beachtet die identischen Gleichungen

$$(8.)\quad \Delta . \delta_{\lambda\varrho} = \sum_\nu y_\nu^{(\lambda)} . z_\nu^{(\varrho)} = \sum_\nu y_\lambda^{(\nu)} . z_\varrho^{(\nu)},$$

so findet man

$$\Delta . \theta . B_\lambda^{(\varrho)} = \Delta^{n-1} . \sum_\nu y_\lambda^{(\nu)} . \frac{dz_\varrho^{(\nu)}}{dx},$$

oder, weil $\theta = \Delta^{n-1}$ ist,

$$(9.)\quad \Delta . B_\lambda^\varrho = \sum_\nu y_\lambda^{(\nu)} . \frac{dz_\varrho^{(\nu)}}{dx}.$$

Nun folgt aber aus (8.)

$$\Delta' . \delta_{\lambda\varrho} = \sum_\nu y_\lambda^{(\nu)} . \frac{dz_\varrho^{(\nu)}}{dx} + \sum_\nu z_\varrho^{(\nu)} \frac{dy_\lambda^{(\nu)}}{dx},$$

also ist

$$(10.)\quad \Delta . B_\lambda^\varrho = \Delta' . \delta_{\lambda\varrho} - \sum_\nu z_\varrho^{(\nu)} . \frac{dy_\lambda^{(\nu)}}{dx}.$$

Aus den Gleichungen (1.) kommt nun

$$\frac{dy_\lambda^{(\nu)}}{dx} = \sum_\mu A_\mu^{(\lambda)} y_\mu^{(\nu)},$$

und dieser Werth von $\frac{dy_\lambda^{(\nu)}}{dx}$ in die Gleichung (10.) eingesetzt, giebt

$$\Delta . B_\lambda^{(\varrho)} = \Delta' . \delta_{\lambda\varrho} - \sum_\nu \sum_\mu A_\mu^{(\lambda)} z_\varrho^{(\nu)} y_\mu^{(\nu)},$$

und wenn die Summation nach $\nu$ ausgeführt wird, so kommt mit Beachtung der Gleichungen (8.)

$$(11.) \qquad \Delta . B_\lambda^{(\varrho)} = \Delta' . \delta_{\lambda\varrho} - \Delta . A_\varrho^{(\lambda)};$$

bekanntlich ist aber

$$\Delta' = \Delta . \omega, \quad \text{wo} \quad \omega = \sum_\nu A_\nu^{(\nu)},$$

folglich ergiebt sich

$$B_\lambda^{(\varrho)} = -A_\varrho^{(\lambda)} + \omega . \delta_{\lambda\varrho},$$

was zu beweisen war.

Ich will noch hinzufügen, dass man in einem gegebenen Systeme (1.) das $\omega$ zu Null machen kann. In der That, wenn man setzt

$$f(\Delta) . y_\varrho = \varphi_\varrho,$$

so findet man für die $\varphi_\varrho$ folgendes System

$$\frac{d\varphi_\varrho}{dx} = \sum_\nu C_\nu^{(\varrho)} \varphi_\nu, \quad \text{wo} \quad C_\nu^{(\varrho)} = \frac{f'(\Delta)}{f(\Delta)} . \Delta . \omega . \delta_{\nu\varrho} + A_\nu^{(\varrho)};$$

für dieses System ist nun

$$\sum_\nu C_\nu^{(\nu)} = n \frac{f'(\Delta)}{f(\Delta)} . \Delta . \omega + \omega.$$

Man wird also $\sum_\nu C_\nu^{(\nu)} = 0$ haben, wenn man nimmt

$$f(\Delta) = \Delta^{-\frac{1}{n}},$$

d. i. wenn man setzt

$$y_\varrho = \Delta^{\frac{1}{n}} . \varphi_\varrho .$$

Athen, den 24. April 1880.

# Kurze Ableitung der Additionstheoreme der elliptischen Integrale aus der Gleichung $\frac{da}{\triangle a}+\frac{db}{\triangle b}=0$.

(Von Herrn *Graefe* in Bern.)

---

Sind $a$, $b$, $c$ die Seiten und $A$, $B$, $C$ die Winkel eines sphärischen Dreiecks, $C$ stumpf und $A$ und $B$ zugleich stumpf oder spitz und

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}=k<1,$$

$$\sqrt{1-k^2\sin^2 x} = \triangle x,$$

so bestehen die Gleichungen

$$(1.)\quad \begin{cases} \cos c = \cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C, \\ \cos a = \cos c\cos b+\sin c\sin b\cos A, \\ \cos b = \cos c\cos a+\sin c\sin b\cos B. \end{cases}$$

Differentiiren wir die erste Gleichung nach $a$ und $b$ vollständig und sehen $c$ und $C$ als Constante an, so erhalten wir die Differentialgleichung

$$(2.)\quad \frac{da}{\triangle a}+\frac{db}{\triangle b} = 0.$$

Integriren wir diese, so haben wir, da für $a=0$, $b=c$ ist, bekanntlich

$$(3.)\quad F(a)+F(b) = F(c).$$

Die Gleichungen (1.) und (3.) sind vollständige Integralgleichungen der Gleichung (2.).

Diese drei Gleichungen repräsentiren das Additionstheorem der elliptischen Integrale erster Gattung.

Um die Gleichung zu erhalten, welche das Additionstheorem der elliptischen Integrale zweiter Gattung darstellt, multipliciren wir die Gleichung (2.) mit der in $a$ und $b$ symmetrischen Function

$$-\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C.$$

Wir erhalten dann, wenn wir berücksichtigen

$$\cos^2 C = 1 - k^2 \cos^2 c, \quad \cos^2 b = 1 - \sin^2 b,$$

$$\begin{aligned} v &= (\cos b \sin a \cos c - \sin b \cos b \cos C)\, da \\ &\quad + (\cos a \sin b \cos c - \sin a \cos a \cos C)\, db, \end{aligned}$$

$$da \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} + db \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c} = k^2 \sin c (\cos a \sin b\, da + \sin a \cos b\, db),$$

oder

$$(4'.) \qquad da \Delta a + db \Delta b = k^2 \sin c . d(\sin a \sin b),$$

deren Integralgleichung nach der Bezeichnung des Herrn *Durège* ist

$$(4.) \qquad E_1(a) + E_1(b) = E_1(c) + k^2 \sin a \sin b \sin c.$$

Die Gleichungen (1.), (2.), (3.) und (4.) repräsentiren das Additionstheorem der elliptischen Integrale zweiter Gattung.

Multipliciren wir schliesslich die Gleichung (2.) mit

$$\frac{1}{1+n\sin^2 a} + \frac{1}{1+n\sin^2 b},$$

so bekommen wir

$$\frac{da}{(1+n\sin^2 a)\Delta a} + \frac{db}{(1+n\sin^2 a)\Delta b} = -\left(\frac{da}{(1+n\sin^2 b)\Delta a} + \frac{db}{(1+n\sin^2 a)\Delta b}\right),$$

und wenn wir (2.) und (4'.) auf der rechten Seite in Betracht ziehen,

$$= \frac{n \sin c . d(\sin a \sin b)}{1+n(\sin^2 a + \sin^2 b) + n^2 \sin^2 a \sin^2 b}.$$

Hieraus folgt, wenn $n = -k^2 \sin^2 \alpha$ ist,

$$(5.) \quad \begin{cases} \Pi_1(a, \alpha) + \Pi_1(b, \alpha) - \Pi_1(c, \alpha) = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\Delta \alpha} l H, \\ H = \dfrac{1 - k^2 \sin \alpha \sin a \sin b \dfrac{\sin c \cos \alpha \Delta \alpha - \sin \alpha \cos c \Delta c}{1 - k^2 \sin^2 c \sin^2 \alpha}}{1 + k^2 \sin \alpha \sin a \sin b \dfrac{\sin c \cos \alpha \Delta \alpha + \sin \alpha \cos c \Delta c}{1 - k^2 \sin^2 c \sin^2 \alpha}}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (1.), (2.) und (5.) besteht das Additionstheorem der elliptischen Integrale dritter Gattung.

Nach meinem Dafürhalten würde diese Ableitung der Additionstheoreme eine der einfachsten sein. Sie hat auch den Vorzug, dass sich die betreffenden Gleichungen auf elegante Weise aus der Fundamental-Differentialgleichung $\frac{da}{\Delta a} + \frac{db}{\Delta b} = 0$ ergeben.

Bern, den 11. April 1880.

---

# Ueber die ebenen Curven dritter Ordnung.

(Hierzu Taf. I.)

(Von Herrn *Rudolf Sturm* in Münster i. W.)

In seinem Aufsatze: „Ueber die Formen der Curven dritter Ordnung"*) setzt Herr *Durège* zu dem Beweise der Eigenschaft dieser Curven, dass,

*wenn es Punkte auf ihnen giebt, von denen vier reelle Tangenten ausgehen, es auch solche giebt, bei denen diese Tangenten sämmtlich imaginär sind,*

die Kenntniss der drei Systeme conjugirter Punkte und der Erzeugung der Curve dritter Ordnung durch zwei projective Strahleninvolutionen voraus, also Eigenschaften der Curve, welche man erst bei einem eingehenderen Studium derselben kennen lernt. Ich will im Folgenden (in I.) einen Beweis des obigen Satzes geben, welcher nichts anderes voraussetzt, als die *Chasles*sche Erzeugung der Curve durch Strahl- und Kegelschnittbüschel, die zu einander projectiv sind, diejenige Erzeugung, welche wohl als die natürlichste angesehen werden kann.

Daran knüpft sich in II. die meines Erachtens nothwendige Ergänzung des geometrischen Beweises, welchen Herr *Salmon* für *die Constanz des Doppelverhältnisses der vier von einem Punkte der Curve ausgehenden Tangenten* gegeben hat**). Denn so ausgezeichnet dieser Beweis auch durch seine Einfachheit ist, so beweist er eben doch nur die Unveränderlichkeit des Doppelverhältnisses für die Punkte, welche demselben Zuge angehören.

In III. und IV. gebe ich schliesslich eine rein geometrische und möglichst einfache Betrachtung über grösstentheils sachlich bekannte Eigenschaften der Curve dritter Ordnung: Realität der Wendepunkte, der von einem Curvenpunkte ausgehenden Tangenten, Beziehung zwischen Berührungs-

*) Dieses Journal, Bd. 75 S. 153, mit einer Ergänzung Bd. 76 S. 59.

**) Dieses Journal, Bd. 42 S. 274, sowie in den Büchern von *Salmon, Cremona, Durège, Clebsch-Lindemann.*

punkt und Tangentialpunkt; wenn dieselbe auch im Einzelnen manches aus *Möbius'* Aufsatze über die Grundformen der Linien dritter Ordnung *), *Salmons* höheren ebenen Curven und *Durèges* Aufsätzen **) wiederholt, so dürfte sie in der Beweisführung neu sein.

Sodann ist wohl auch die in No. 17 erhaltene Convergenz nach einem Wendepunkte bei der *allgemeinen* Curve dritter Ordnung noch nicht bekannt.

## I.

1. Bei der *Chasles*schen Erzeugung der Curve dritter Ordnung kann der Scheitel des Strahlbüschels in einen beliebigen Punkt $O$ der Curve gelegt werden, indem dann von den Grundpunkten des Kegelschnittbüschels noch drei beliebig auf der Curve gewählt werden können, während der vierte eindeutig bestimmt ist. Der Polarkegelschnitt $O^2$ von $O$ ergiebt sich durch den Schnitt des Büschels $O$ mit dem Büschel der Polaren von $O$ in Bezug auf die Kegelschnitte des Kegelschnittbüschels ***). Es folgt daraus sofort die harmonische Eigenschaft der vier Punkte, in denen ein Strahl durch $O$ die beiden Curven $C^3$ und $O^2$ trifft, ferner die Berührung beider in $O$ und die von $C^3$ mit den vier Strahlen von $O$ nach den vier anderen Schnitten $(C^3, O^2)$ in diesen Punkten.

Ist $O$ ein Wendepunkt der Curve, so berührt der durch $O$ gehende Kegelschnitt $C^3$ in $O$, woraus dann die perspective Lage der beiden Büschel und das Zerfallen des Polarkegelschnitts in Wendetangente und harmonische Gerade sich ergiebt.

Die harmonische Eigenschaft dieser Geraden wird in III. und IV. mehrfach benutzt, indem sie, wenn die Curve so projicirt wird, dass die Gerade oder der Wendepunkt ins Unendliche fällt, zur Symmetrie der Curve in Bezug auf den Wendepunkt oder auf die harmonische Polare führt.

2. Es seien $O, P$ zwei beliebige Punkte von $C^3$, $Q$ der dritte Schnitt von $OP$, $O^2$, $P^2$ die beiden Polarkegelschnitte, endlich $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{P}$ deren weitere Schnitte mit $OPQ$. Treffe ein dem $OPQ$ unendlich naher Strahl durch $O$ die Curven $C^3$ und $O^2$ in $P, Q_1, \mathfrak{O}_1$, so sind $O\mathfrak{O}PQ$, $O\mathfrak{O}_1P_1Q_1$ harmonisch,

*) Abhandlungen der K. S. Ges. der Wiss. zu Leipzig, 1849.

**) a. a. O. und Math. Ann. Bd. I S. 509.

***) *Steiner-Schröters* Vorlesungen 2. Aufl. S. 508; *Milinowski*, Zeitschr. f. Math. Bd. 21 S. 436.

also gehen die Tangente $p$ in $P$ an $C^3$ und $P^2$, die Tangente $q$ in $Q$ an $C^3$ und die $\mathfrak{o}$, welche in $\mathfrak{O}$ die $O^2$ berührt, durch denselben Punkt $O'$, ebenso die Tangente $o$ in $O$ an $C^3$ und $O^2$, $q$ und die Tangente $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{P}$ an $P^2$ durch $P'$; so dass $O'$, $P'$ beide auf der Tangente $q$ in $Q$ an $C^3$ liegen. Ist $S$ der Schnitt $op$ und sind $O''$, $P''$ die Pole von $OPQ$ in Bezug auf $O^2$, $P^2$, also die Schnitte $o\mathfrak{o}$, $p\mathfrak{p}$, so sind $OP'O''S$, $PO'P''S$ mit harmonischen Würfen perspectiv, also selbst perspectiv, d. h. $O''P''$ geht durch den Punkt $Q$, in dem sich $OP$ und $O'P'$ schneiden; mithin ist die Polare $O''Q$ von $P$ nach $O^2$ mit der Polare $P''Q$ von $O$ nach $P^2$ identisch*). Hieraus folgt nebenbei, dass von drei Wendepunkten in gerader Linie jeder mit den Doppelpunkten der Polarkegelschnitte der beiden anderen in gerader Linie liegt.

Dies habe ich voraus geschickt, um die blosse Abhängigkeit des Folgenden von der *Chasles*schen Erzeugung darzulegen.

3. *$A$, $B$, $C$, $D$ seien die Berührungspunkte der von $O$ auf $C^3$ an diese Curve gelegten Tangenten,* also die weiteren Schnitte des Polarkegelschnitts $O^2$ von $O$.

Es sei $O'$ an $O$ auf $C^3$ unendlich nahe; zu den vier Punkten $OO'AB$ ist der dritte Schnitt von $CD$, den wir $O_1$ nennen wollen, der Gegenpunkt, wie der Kegelschnitt $O^2$ des Büschels $(OO'AB)$ beweist; der Kegelschnitt $(OA, O'B)$ oder $(OA, OB)$ des Büschels schneidet noch in $A$, $B$, also geht $AB$ auch durch $O_1$, und endlich der Kegelschnitt $OO'$, $AB$ schneidet noch in $U$, $O_1$, wenn $U$ der Tangentialpunkt von $O$ ist, also $UO_1$ schneidet zum dritten Male in $O_1$, oder $UO_1$ berührt in $O_1$. Sind ebenso $O_2$, $O_3$ die weiteren Diagonalpunkte des Vierecks $ABCD$, nämlich $(AC, BD)$, $(AD, BC)$, so liegen diese ebenfalls auf der Curve $C^3$ und zwar in den Berührungspunkten der beiden weiteren Tangenten aus $U$. Es ist im Vorhergehenden ein Beweis für den bekannten Satz gegeben, der nur die *Chasles*sche Erzeugung voraussetzt.

4. Es soll nun die erste Polare $O_1^2$ von $O_1$ construirt werden (Fig. 1). Die Polare $p$ von $O_1$ nach $O^2$ ist zugleich die von $O$ nach $O_1^2$; sie geht durch $O_2$, $O_3$, weil $O_1$, $O_2$, $O_3$ ein Polardreieck in Bezug auf $O^2$ ist, sodann schneidet sie $O^2$ in den beiden Doppelpunkten $E$, $F$ der krummen Involution $A, B; C, D$, von welcher $O_1$ das Centrum, $p$ die Axe ist, so dass $OE$, $OF$ die

*) Vergl. Zeitschr. f. Math. Bd. 23 S. 344.

Doppelstrahlen der Involution $O(A, B; C, D)$ sind. $AB$, $CD$ mögen von $p$ in $G$, $H$ geschnitten werden; diese Punkte, welche harmonisch zu $O_1$ in Bezug auf $A$, $B$, resp. $C$, $D$ sind, gehören der gesuchten Polare $O_1^2$ an, und in ihnen wird sie von $OG$, $OH$ tangirt und ist dadurch und durch $O_1$ bestimmt. Die Tangente $O_1U$, welche in $O_1$ die Curven $C^3$ und $O_1^2$ berührt, lässt sich leicht vermittelst eines bekannten Satzes der Kegelschnitte construiren; man schneide $O_1G$ mit der Tangente $OH$ in $R$, $O_1H$ mit $OG$ in $V$, und $GH$ mit $RV$ in $W$, so ist $O_1W$ die Tangente $O_1U$ und $Q$ sei ihr Schnitt $OE$. Trifft $OE$ die beiden Geraden $AB$, $CD$ in $K$, $L$, so ergiebt sich durch das vollständige Viereck $O_1GWV$, dass $Q$ zu $O$ in Bezug auf $K$, $L$ harmonisch ist.

5. Die beiden Curven $C^3$ und $O_1^2$ schneiden $OE$ in denselben zwei Punkten. Als erzeugende Büschel für $C^3$ wählen wir den Kegelschnittbüschel $(OO'AB)$, den wir schon in No. 3 benutzten, und den Strahlbüschel um den Gegenpunkt $O_1$; drei Paare entsprechender Elemente haben wir oben ebenfalls erwähnt; die drei Kegelschnitte schneiden $OE$ ausser in $O$ in $E$, $O$, $K$, und die drei entsprechenden Strahlen thun es in $L$, $K$, $Q$. Die beiden weiteren Schnitte der Curve $C^3$ mit $OE$ sind demnach die vereinigten Punkte der durch diese drei Paare entsprechender Punkte $E, L; O, K; K, Q$ bestimmten projectiven Punktreihen.

Den Kegelschnitt $O_1^2$ denken wir uns erzeugt durch die Büschel um $G$, $H$; entsprechende Strahlen sind $GO, HG; GH, HO; GO_1, HO_1$, welche in $OE$ die Paare entsprechender Punkte $O, E; E, O; K, L$ einschneiden; also sind die Schnitte von $O_1^2$ mit $OE$ die Doppelpunkte der Involution $O, E; K, L$.

Es ist mithin noch zu beweisen, dass diese Doppelpunkte mit jenen vereinigten Punkten identisch sind. Projiciren wir die Punkte $O$, $E$, $K$, $L$, $Q$ von der Geraden $OE$ auf einen Kegelschnitt, wobei wir der Einfachheit halber dieselben Buchstaben für die Projectionen benutzen, so schneidet die Verbindungslinie von $X = (EK, OL)$ und $Y = (EQ, KL)$ den Kegelschnitt in den vereinigten Punkten der krummen projectiven Punktreihen $E, O, K, \ldots; L, K, Q, \ldots$. Ist noch $S = (OE, KL)$, so sind $S$, $Y$ durch $K$, $L$ harmonisch getrennt, weil auf dem Kegelschnitte $O$, $Q$ durch $K$, $L$ harmonisch getrennt werden (No. 4 Ende); also ist $XY$ die Polare von $S$ und mithin sind die Schnitte von $XY$ mit dem Kegelschnitte auch die Doppelpunkte der Involution $O, E; K, L$, von welcher $S$ das Centrum ist.

6. Also zwei der vier weiteren Schnitte $A_1$, $B_1$ von $O_1^2$ mit $C^3$ liegen auf $OE$, die beiden anderen $C_1$, $D_1$ auf $OF$; oder die Berührungspunkte $A_1$, $B_1$ von zwei der vier aus $O_1$ kommenden Tangenten liegen auf einer Geraden durch $O$ und ebenso die Berührungspunkte $C_1$, $D_1$ der beiden andern. Dies liess sich erwarten, da ja auch $A$, $B$ sowohl, wie $C$, $D$ auf einer Geraden durch $O_1$ liegen und $A_1B_1C_1D_1$, $ABCD$ die Berührungspunkte der Tangenten aus zwei Punkten $O$, $O_1$ sind, welche denselben Tangentialpunkt $U$ haben. Wir sehen aber mehr: *die beiden Strahlen aus $O$, welche zu je zweien die Berührungspunkte der von $O_1 = (AB, CD)$ kommenden Tangenten enthalten, sind gerade die Doppelstrahlen der Involution $O(A, B; C, D)$; ebenso werden die Berührungspunkte der von $O_2 = (AC, BD)$ und der von $O_3 = (AD, BC)$ kommenden Tangenten zu je zweien auf den Doppelstrahlen der Involution $O(A, C; B, D)$, bez. der Involution $O(A, D; B, C)$ liegen.*

7. *Sind nun erstens die vier Tangenten aus $O$ alle reell,* so sind von diesen Involutionen zwei hyperbolisch, die dritte — in der obigen Figur die zweite der eben genannten — elliptisch; demnach sendet $O_2$ vier imaginäre Tangenten aus.

Eine hyperbolische Involution führt aber nicht nothwendig zu reellen Tangenten. Betrachten wir deshalb die beiden hyperbolischen Involutionen oder die krummen Involutionen, in denen sie von $O^2$ geschnitten werden, noch genauer. Die Doppelpunkte der letzteren sind $E_1$, $F_1$ (bisher $E$, $F$) und $E_3$, $F_3$, gelegen auf $O_2O_3$, bez. $O_1O_2$, und weil $O_1$, $O_2$, $O_3$ die Diagonalpunkte des Vierecks $ABCD$ sind, so wird man auf $O^2$ von $O$ zu $E_1$ oder $F_1$ gelangen, indem man von jedem der beiden Paare $A$, $B$; $C$, $D$ einen und nur einen Punkt überschreitet oder von keinem, hingegen von $O$ zu $E_3$ oder $F_3$, indem man von einem und nur von einem der beiden Paare $A$, $D$; $B$, $C$ einen und nur einen Punkt überschreitet (oder umgekehrt). Daraus folgt, dass, wenn man mit $OE_1$ die Geraden $AB$, $CD$ in $K_1$, $L_1$, mit $OE_3$ die Geraden $AD$, $BC$ in $K_3$, $L_3$ schneidet, die Involution $O$, $E_1$; $K_1$, $L_1$ hyperbolisch, hingegen $O$, $E_3$; $K_3$, $L_3$ elliptisch ist, und ähnliches bei $OF_1$, $OF_3$ der Fall ist. Demnach wird $C^3$ von dem Polarkegelschnitte $O_1^2$ von $O_1$ in vier reellen Punkten, hingegen von $O_3^2$ in vier imaginären Punkten geschnitten. Oder: *Von den drei Punkten $O_1$, $O_2$, $O_3$, welche mit einem Punkte $O$ der Curve dritter Ordnung, von dem vier reelle Tangenten ausgehen, denselben Tangentialpunkt haben und die dann alle drei reell sind, sendet nur noch einer ebenfalls vier reelle Tangenten aus, die beiden anderen aber je vier imaginäre.*

Da nun die Punkte der einen und der anderen Art nicht auf demselben Zuge sich befinden können, weil der Uebergang durch zweimaliges Zusammenfallen von Tangenten nicht möglich ist, so liegen also von vier reellen Punkten, die denselben Tangentialpunkt haben, zwei auf dem einen, zwei auf dem anderen Zuge, und zwar die, welche vier reelle Tangenten aussenden, auf dem unpaaren Zuge, der ja auch den gemeinsamen Tangentialpunkt enthält und also von zwei der von ihm ausgehenden Tangenten in drei Punkten getroffen wird, die anderen auf dem paaren Zuge.

8. *Es gehen zweitens von $O$ zwei reelle Tangenten $OA$, $OB$ und zwei conjugirt imaginäre $OC$, $OD$ aus;* dann schneidet $CD$ den $O^2$ nicht, und nur noch $O_1$ ist reell; also auch von $U$ kommen zwei reelle und zwei imaginäre Tangenten. $O_1$ liegt ausserhalb $O^2$, also sind $E_1$, $F_1$ reell. Da $E_1$, $F_1$ durch $A$, $B$ getrennt werden, so ergiebt sich leicht, dass die Involution $OE_1$, $K_1L_1$ auf $OE_1$ hyperbolisch ist und die auf $OF_1$ elliptisch, oder umgekehrt. Also *zwei der von $O_1$ kommenden Tangenten sind reell, die beiden anderen imaginär.*

Sendet ein Punkt eines Zuges zwei reelle und zwei imaginäre Tangenten aus, dann thut es jeder Punkt desselben Zuges, weil ein Zusammenfallen zweier der vier Tangenten nur bei einem Doppelpunkt möglich wäre.

*Sind endlich drittens alle vier Tangenten aus $O$ imaginär,* so sind die Linien $AB$, $CD$ reell, schneiden aber $O^2$ nicht; ihr Schnitt $O_1$ ist reell und seine Polare $p$ schneidet $O^2$ reell in $E_1$, $F_1$, und die Involutionen auf $OE_1$, $OF_1$ ergeben sich ohne Schwierigkeit als hyperbolisch, also von $O_1$ kommen vier reelle Tangenten.

Jedoch auch $O_2$, $O_3$ sind bekanntlich reell, so dass $U$ vier reelle Tangenten aussendet. Einer von diesen beiden Punkten liegt ausserhalb $O^2$, es sei wie oben $O_3$, der andere $O_2$ innerhalb; der letztere führt ersichtlich zu imaginären Tangenten. Für $O_3$ sind $E_3$, $F_3$ reell, und die Involution $O$, $E_3$; $K_3$, $L_3$ auf $OE_3$ ist constituirt durch das reelle Paar $O$, $E_3$ und das conjugirt imaginäre Paar $K_3$, $L_3$ (gelegen auf $AD$, $BC$, zwei conjugirt imaginären Linien), also hyperbolisch.

*Folglich gehen auch von $O_1$ und $O_3$ vier reelle Tangenten aus, von $O_2$ aber imaginäre.*

9. Die vier Punkte, welche je denselben Punkt zum Tangentialpunkt haben, nennt man ein Punktquadrupel auf der Curve dritter Ordnung; so bilden also $OO_1O_2O_3$ ein solches Quadrupel und $O$, $O_1$; $O_2$, $O_3$ sind con-

jugirte Punkte der Curve in einem Systeme, $O$, $O_2$; $O_1$, $O_3$ im zweiten, $O$, $O_3$; $O_1$, $O_2$ im dritten Systeme.

$O_2 O_3$ ist die gemischte Polare von $O$, $O_1$; also die gemischte Polare zweier Punkte der Curve, welche in einem der drei Systeme conjugirt sind, verbindet die beiden in demselben Systeme conjugirten Punkte, welche das Quadrupel jener vervollständigen, und umgekehrt ist $OO_1$ die gemischte Polare von $O_2$, $O_3$. Der Punkt $U_1$, in dem sich $OO_1$ und $O_2 O_3$ schneiden, liegt auf der Curve dritter Ordnung, ebenso wie der Schnittpunkt $(AB, CD)$, und hat denselben Tangentialpunkt wie $U$. Die beiden Geraden $OO_1$, $O_2 O_3$ sind conjugirte Tangenten der einen der drei *Cayley*schen Curven der Curve dritter Ordnung *).

Die gemischte Polare von $O$, $O_1$ ist übrigens die Gerade, auf welcher alle Schnittpunkte $(XX_1, YY_1)$ liegen, wenn $X$, $X_1$; $Y$, $Y_1$ in demselben Systeme conjugirt sind wie $O$, $O_1$ und diese vier Punkte die Schnittpunkte zweier entsprechenden Strahlenpaare der projectiven Involutionen $O$, $O_1$ sind, welche $C^3$ erzeugen **).

## II.

10. Beweisen wir jetzt, dass *die beiden Tangentenwürfe* $O(A, B, C, D)$ *und* $O_1(A_1, B_1, C_1, D_1)$ *gleiches Doppelverhältniss haben.*

Die Schnitte $A_1$, $B_1$ von $OE$ (da wir wieder nur mit $O_1$ zu thun haben, sagen wir blos $E$, $F$, wie in der Figur) mit $C^3$ oder $O_1^2$, also die Berührungspunkte von zwei von $O_1$ ausgehenden Tangenten ergaben sich als Doppelpunkte der Involution $O$, $E$; $K$, $L$ (No. 4, 5); die Schnitte also $A_1'$, $B_1'$ dieser Tangenten mit der gemischten Polare $EF = O_2 O_3$ sind die Doppelpunkte der Involution $U_1$, $E$; $G$, $H$; ebenso sind die Schnitte $C_1'$, $D_1'$ von $EF$ mit den Tangenten aus $O_1$, welche ihre Berührungspunkte $C_1$, $D_1$ auf $OF$ haben, die Doppelpunkte der Involution $U_1$, $F$; $G$, $H$. Ferner sind die Schnitte $A'$, $B'$ von $EF$ mit den Tangenten $OA$, $OB$ harmonisch zu $E$, $F$, weil das Punktepaar $A$, $B$ der Involution auf $O^2$, deren Axe $EF$ ist, aus dem Punkte $O$ von $O^2$ auf diese Axe in ein Paar in Bezug auf $O^2$ conjugirter Punkte projicirt wird; andererseits aber sind $A'$, $B'$ auch zu $U_1$, $G$ harmonisch, weil $A$, $B$ durch $O_1$ und $G$ harmonisch getrennt werden. Folg-

*) *Steiner-Schröters* Vorlesungen, 2. Aufl. S. 528 und *Schröter*, Math. Ann. Bd. V, S. 74.

**) *Schröter*, am zuletzt a. O. S. 65; *Milinowski*, Zeitschr. f. Math. Bd. XXIII, S. 91.

lich sind $A'$, $B'$ die Doppelpunkte der Involution $E$, $F$; $U_1$, $G$. Ebenso sind die Schnitte $C'$, $D'$ von $OC$, $OD$ mit $EF$ die Doppelpunkte der Involution $E$, $F$; $U_1$, $H$. Uebrigens ist letzteres auch unmittelbar klar, denn, wenn $O_1$ und $O$ vertauscht werden, also $O_1^2$ und $O^2$, dann bleiben die gemischte Polare $p$ und der Punkt $U_1$ fest, aber $E$, $F$ vertauschen sich mit $G$, $H$, durch welche ja $O_1^2$ geht.

11. Die vier Involutionen, durch welche unsere acht Punkte bestimmt werden, nehmen ihre Constituenten allein aus den fünf Punkten $E$, $F$, $G$, $H$, $U_1$ der Geraden $p$. Projiciren wir diese wiederum auf einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ (ohne ihre Namen zu ändern), so sind $S=(U_1E, GH)$, $T=(U_1F, GH)$, $X=(U_1G, EF)$, $Y=(U_1H, EF)$ die Centra der entsprechenden krummen Involutionen. Man ersieht sofort, dass

$$EFXY \,\overline{\wedge}\, STGH \,\overline{\wedge}\, GHST.$$

Die Berührungspunkte der aus $X$, $Y$, $S$, $T$ an $\mathfrak{K}$ gezogenen Tangenten sind die Projectionen der acht Punkte $A'$, $B'$, ... $C_1'$, $D_1'$; wir wollen sie ebenso nennen. Betrachten wir die vier ersten (Fig. 2). Da das Vierseit der vier Tangenten und das Viereck der vier Berührungspunkte dasselbe Diagonaldreieck haben, so liegen die Schnitte $M=(A'D', B'C')$ und $N=(A'C', B'D')$ auf $XY$, und $X$, $Y$, zwei Gegenecken des Vierseits, sind harmonisch zu den Ecken $M$, $N$ des Diagonaldreiecks, ferner sind auch $M$, $N$ und $X$, $J$ zu $E$, $F$ harmonisch.

Das Doppelverhältniss $x$ der vier Punkte $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ ist $(XJNM)$ und steht zu dem Doppelverhältniss $\lambda=(EFXY)$ in der Beziehung:

$$x^2-2\frac{1+6\lambda+\lambda^2}{(1-\lambda)^2}x+1 \;=\; 0.$$

Um diese Beziehung einzusehen, wird man am besten die Gerade $XY$ so projiciren, dass einer der Punkte $E$, $F$, etwa $F$, ins Unendliche geht. Dann ist $EY=\lambda.EX$; $\overline{EM}^2=\overline{EN}^2=EY.EX=\overline{EX}^2.\lambda$; also $EM=-\sqrt{\lambda}.EX$, $EN=+\sqrt{\lambda}.EX$ (oder umgekehrt); ferner $EJ=-EX$.

Demnach

$$x=(XJNM)=\frac{XN}{JN}\cdot\frac{JM}{XM}=\frac{(XE+EN)(JE+EM)}{(JE+EN)(XE+EM)}=\frac{(-1+\sqrt{\lambda})(1-\sqrt{\lambda})}{(1+\sqrt{\lambda})(-1-\sqrt{\lambda})}=\left(\frac{1-\sqrt{\lambda}}{1+\sqrt{\lambda}}\right)^2;$$

woraus die obige Gleichung folgt.

Eine der beiden Wurzeln ist das Doppelverhältniss $(A'B'C'D')=(B'A'D'C')$, die andere das reciproke $(A'B'D'C')=(B'A'C'D')$. Da $(GHST)=(EFXY)=\lambda$,

so giebt dieselbe Gleichung auch die beiden Doppelverhältnisse $(A_1'B_1'C_1'D_1')$ und $(A_1'B_1'D_1'C_1')$.

Demnach ist $(A_1'B_1'C_1'D_1')$ entweder mit $(A'B'C'D')$ oder mit $(A'B'D'C')$ gleich, also *wenn wir die vier Tangenten aus O mit a, b, c, d, die aus* $O_1$ *mit* $a_1, b_1, c_1, d_1$ *bezeichnen, ist* $(a_1 b_1 c_1 d_1)$ *entweder mit* $(abcd)$ *oder mit* $(abdc)$ *gleich;* und dies war zu beweisen.

Ebenso gilt es für die Tangenten aus $O_2$ und $O_3$. Liegen also $O$ und $O_2$, wie oben, auf verschiedenen Zügen, so ist nun gezeigt, dass *der Tangentenwurf für einen Punkt des einen Zuges projectiv ist dem aus einem Punkte des andern Zuges,* und der *Salmon*sche Beweis führt nun zur Gleichheit des Doppelverhältnisses bei allen Punkten beider Züge, wofern die Curve zwei Züge hat.

Wenn alle vier Tangenten reell oder alle vier imaginär sind, so ist das Doppelverhältniss reell; sind zwei reell und zwei imaginär, so ist es imaginär, ausser wenn die reellen zu den imaginären Tangenten harmonisch sind. Zwei reciproke von den sechs Doppelverhältnissen sind bei zwei reellen und zwei imaginären Tangenten conjugirt imaginär und werden im Falle der Harmonicität gleich, also reell.

## III.

12. Aus der Existenz von Tangenten der $C^3$ folgt, dass es sowohl Gerade giebt, welche diese Curve dreimal treffen, als solche, die ihr nur einmal begegnen. Wählen wir eine der letzteren Art — mit dem Schnittpunkte $P$ — zur Fluchtlinie (oder Gegenaxe) einer Centralprojection, so erhalten wir durch die Projection eine Curve mit einer einzigen reellen Asymptote. Hat die ursprüngliche Curve etwa mehrere Züge, so betrachten wir denjenigen, welcher $P$ enthält, und dessen Projection; die Continuität, welche jener beim Durchgange durch $P$ hat, überträgt sich bei der Projection auf den Durchgang durch den unendlich fernen Punkt $P_\infty$. Unterscheiden wir, je nach dem Richtungssinne, $P_\infty^+$ und $P_\infty^-$, so verläuft unser Zug in der Projection, da er sonst nicht mehr ins Unendliche geht, continuirlich von $P_\infty^-$ nach $P_\infty^+$ und theilt, analog wie eine Gerade es thut, die Ebene in zwei Theile, derartig, dass $U_\infty^-$ und $U_\infty^+$ jeder Geraden in verschiedenen Theilen liegen, die Gerade also den Zug unpaarmal, demnach einmal oder dreimal durchsetzt; jede Sehne, insbesondere jede Tangente des Zuges muss ihn

nochmals treffen. Diese Eigenschaft hat der Zug offenbar auch vor der Projection. Noch ein zweiter unpaarer Zug ist nicht möglich, weil es dann nicht Gerade gäbe, welche die Curve nur einmal treffen; ist mithin ausser dem betrachteten Zuge noch einer vorhanden, so kann es nur ein paarer sein, der dann also von jeder Geraden gar nicht oder zweimal getroffen wird, also keinen Wendepunkt besitzen kann. Zwei paare Züge würden zu viermal treffenden Geraden führen. *Folglich besteht $C^3$ nur aus einem unpaaren Zug* 𝔘, *oder enthält ausserdem noch einen paaren* 𝔓. Ersterer enthält alle Tangentialpunkte, oder anders gesagt, von keinem Punkte von 𝔓 geht eine reelle anderwärts die Curve berührende Tangente aus. *Dass* 𝔘 *allein drei reelle Asymptoten haben kann, folgt durch Projection aus der Existenz von ihn dreimal treffenden Geraden* *).

13. Wir betrachten nur den Zug 𝔘, nachdem er nöthigenfalls so projicirt ist, dass er nur einmal durch das Unendliche geht. $B$ sei der Berührungspunkt einer Tangente, $T$ der zugehörige Tangentialpunkt (Fig. 3); diese Punkte theilen 𝔘 in einen endlichen Theil 𝔘′ und einen unendlichen 𝔘″; von den beiden in $B$ zusammenstossenden Curvenbogen muss der nach $T$ hin liegende zu 𝔘′ gehören, denn im anderen Falle müsste entweder 𝔘″ die Tangente zwischen $B$ und $T$ durchschneiden, was nicht möglich, oder 𝔘 einen Doppelpunkt haben, was wir ausschliessen. Da aber 𝔘′ endlich ist, so muss er einen Punkt $C$ grösster Entfernung von $BT$ besitzen, also mit zu $BT$ paralleler Tangente. Weil diese beiden Tangenten offenbar zu verschiedenen Seiten der Curve liegen, so muss sich zwischen $B$ und $C$ und umsomehr zwischen $B$ und $T$ ein Wendepunkt befinden.

Dies ist eine projective Eigenschaft; folglich *hat der unpaare Zug einer $C^3$ mindestens einen Wendepunkt; mindestens in einem der beiden Theile, in welche dieser Zug durch Berührungspunkt einer beliebigen Tangente und zugehörigen Tangentialpunkt getheilt wird, liegt ein Wendepunkt.*

14. $W$ sei also ein Wendepunkt auf 𝔘, $h$ seine harmonische Polare, welche 𝔘 mindestens einmal trifft; folglich geht von $W$ mindestens eine 𝔘 anderwärts berührende Gerade aus, also gehen durch $W$ auch Gerade, die 𝔘 nur einmal treffen. Man kann mithin 𝔘 so projiciren, dass $W_\infty$ der einzige unendlich ferne Punkt der Projection wird; die harmonische Polare von $W_\infty$ ist eine Symmetrie-Axe des Zuges: zwei symmetrische Punkte

*) Vergl. *Durège,* dieses Journal Bd. 76.

liegen je auf einer Geraden durch $W_\infty$. Jede Tangente der Projection von $\mathfrak{U}$ liefert uns wiederum zwischen ihrem $B$ und $T$ einen Wendepunkt, der in Folge der Symmetrie einen zweiten nach sich zieht, und wir haben so, indem wir wieder zurück projiciren, drei Wendepunkte in gerader Linie.

An die Wende-Asymptote der Projection treten (Fig. 4) die beiden ins Unendliche sich entfernenden Theile $\mathfrak{U}^-$, $\mathfrak{U}^+$ von derselben Seite heran, weil $\mathfrak{U}$, welcher sonst im Endlichen bleibt, die Asymptote nicht mehr schneiden darf. Demnach hat $\mathfrak{U}$ eine und nur eine zur Asymptote parallele Tangente; jede andere schnitte mehr als dreimal.

15. $W_1$, $W_2$ seien zwei benachbarte (endliche) Wendepunkte der Projection, dieselbe zerfällt durch sie in $W_\infty^- W_1$, $W_1 W_2$, $W_2 W_\infty^+$, von denen $W_1 W_2$ endlich ist. Auf diesem Stücke werde von $W_1$ nach $W_2$ der Berührungspunkt $B$ einer Tangente bewegt; der Tangentialpunkt $T$, der in $W_1$ und $W_2$ mit $B$ vereinigt ist, kann nicht in das Stück $W_1 W_2$ gelangen, weil zwischen $B$ und $T$ stets mindestens ein Wendepunkt liegen muss, $W_1 W_2$ aber als benachbarte Wendepunkte vorausgesetzt werden; also bewegt sich $T$ continuirlich auf dem unendlichen Bogen $W_1 W_\infty W_2$ und muss mindestens einmal durch $W_\infty$ gehen: zwischen $W_1$ und $W_2$ giebt es demnach mindestens einen Punkt mit zur Wende-Asymptote paralleler Tangente; $n$ endliche Wendepunkte würden also zu $n-1$ zur Wende-Asymptote parallelen Tangenten führen. Nun giebt es überhaupt nur eine solche Tangente, mithin kann es auf der Projection nicht mehr als zwei Wendepunkte geben; somit: $\mathfrak{U}$ *und folglich die Curve* $C^3$ *überhaupt hat stets drei in gerader Linie befindliche (reelle) Wendepunkte* $W_1$, $W_2$, $W_3$ *und nur drei* *).

16. Durch $W_1$, $W_2$, $W_3$ erhalten wir auf $\mathfrak{U}$ drei Bogen $W_1 W_2$, $W_2 W_3$, $W_3 W_1$, welche je den dritten Wendepunkt ausschliessen; während $B$ continuirlich jeden dieser drei Bogen durchläuft, durchläuft $T$ continuirlich dann bez. $W_1 W_3 W_2$, $W_2 W_1 W_3$, $W_3 W_2 W_1$; also gelangt er in jeden Punkt jeder der drei ersten Bogen mindestens zweimal und die beiden zugehörigen $B$ liegen je auf den beiden anderen Bogen. Da es mithin durch jeden Punkt von $\mathfrak{U}$ (mindestens) zwei anderwärts $\mathfrak{U}$ berührende Geraden giebt, so giebt es auch durch jeden Punkt $P$ Gerade, welche $\mathfrak{U}$ nur in ihm schneiden. Wir können also $\mathfrak{U}$ wiederum so projiciren, dass die Projection

*) Man vergl. *Möbius*' Betrachtungen a. a. O., wo jedoch auch die Tangente von $W_\infty$ im Unendlichen angenommen wird (also eine sogenannte divergirende Parabel betrachtet wird), was nicht nothwendig ist.

$P_\infty$ von $P$ der einzige unendlich ferne Punkt ist. Die Asymptote ist jetzt eine gewöhnliche und wird von $\mathfrak{U}$ einmal und nur einmal durchschnitten (Fig. 5); $\mathfrak{U}^-$ und $\mathfrak{U}^+$ treten von verschiedenen Seiten an sie heran, und da $\mathfrak{U}$ sonst im Endlichen verläuft, so muss er zwei und nur zwei Punkte mit Maximal-Entfernungen von der Asymptote haben, zwei Punkte, deren Tangenten zu derselben parallel sind. Man könnte auch hieraus auf die Existenz von drei und nur drei Wendepunkten schliessen.

Gehen wir wiederum zur ursprünglichen Curve zurück, so haben wir: *Durch jeden Punkt $P$ des unpaaren Zuges $\mathfrak{U}$ gehen zwei und nur zwei Tangenten an $\mathfrak{U}$; deren Berührungspunkte liegen je einer auf jedem der beiden $P$ nicht enthaltenden von den drei Bogen, in welche $\mathfrak{U}$ durch die drei Wendepunkte getheilt wird, und sie theilen selbst $\mathfrak{U}$ derartig in zwei Bogen, dass der eine einen Wendepunkt, der andere die beiden anderen und zugleich $P$ enthält.*

17. Lassen wir $P$ in einen der Wendepunkte, z. B. in $W_1$, selbst fallen, so vereinigt sich eine der beiden Tangenten mit der Wendetangente von $W_1$, und der Berührungspunkt $W_1$ liegt auf der Grenze von $W_1W_2$ und $W_1W_3$, der Berührungspunkt $H_1$ der anderen aber, d. i. der einzige Schnitt, welchen die harmonische Polare $h_1$ von $W_1$ mit $\mathfrak{U}$ hat, liegt auf $W_2W_3$; ebenso liegen die analogen Schnitte $H_2$, $H_3$ der harmonischen Polaren $h_2$, $h_3$ von $W_2$, $W_3$ auf $W_3W_1$, $W_1W_2$, so dass *diese sechs Punkte die Reihenfolge $W_1H_3W_2H_1W_3H_2$ haben.*

Projicirt man nun den Zug $\mathfrak{U}$ so, dass $h_3$ ins Unendliche fällt, so wird die Projection in Bezug auf den Wendepunkt $W_3$ symmetrisch (Fig. 6); dieser wird ein Mittelpunkt für $\mathfrak{U}$ (oder vielmehr für die ganze Curve); $W_1$ und $W_2$ liegen symmetrisch in Bezug auf $W_3$ und ebenso $h_1$, $h_2$. Folglich sind letztere parallel, woraus, indem wir zurück projiciren, folgt, dass *die drei harmonischen Polaren $h_1$, $h_2$, $h_3$ durch denselben Punkt $H$ gehen.*

Bewegt man nun in der Projection auf dem Bogen $W_3H_1$, welcher ein Theil von $W_3W_2$ ist, einen Punkt $T$, so liegt der eine der zugehörigen Berührungspunkte $B$ in $W_1W_2$, der andere aber in $W_3W_1$, und weil, wenn $B$ in $W_3$, $H_2$ liegt, $T$ in $W_3$, $W_2$ fällt, so wird, wenn $T$ die Strecke $W_3H_1$ (oder $W_3H_2$) durchläuft, dieser zweite Berührungspunkt nur einen Theil von $W_3H_2$ (oder $W_3H_1$) durchlaufen. Aus der Symmetrie ersieht man sofort, dass der Bogen $W_3B$ stets kleiner ist als $W_3T$; denn $T$ als Tangentialpunkt von $B$ muss weiter von $W_3$ entfernt sein, als der Symmetriepunkt

zu $B$, dessen Tangente parallel zu $BT$ ist. Also, wenn wir $B$ wiederum als $T$ wählen und gleichfalls nur den innerhalb $H_1H_2$ liegenden zugehörigen $B$ betrachten, so nähert sich $B$, von einem der beiden Bogen $W_3H_1$, $W_3H_2$ in den anderen oscillirend, immer mehr dem Wendepunkte $W_3$. Projicirt man zurück, so hat man folgenden Satz:

*Greift man auf dem unpaaren Zuge* 𝔘 *einer* $C^3$ *einen der drei Bogen* $H_1H_2$, $H_2H_3$, $H_3H_1$ *heraus, etwa* $H_1H_2$, *welcher den Wendepunkt* $W_3$ *enthält; wählt man einen Punkt desselben als Tangentialpunkt, so liegt einer der beiden zugehörigen Berührungspunkte* $B$ *ebenfalls in* $H_1H_2$; *nimmt man diesen als neuen* $T$ *und so fort, so erhält man eine Reihe von Punkten innerhalb* $H_1H_2$, *die abwechselnd auf der einen und anderen Seite von* $W_3$ *liegen und nach diesem Wendepunkte hin convergiren* *).

Hingegen, wenn zu einem Punkt von $H_1H_2$ als Punkt $B$ der Tangentialpunkt $T$ gesucht wird u. s. w., so gelangt man zu keiner Grenze, weil fortwährend mit den Bogen $H_1H_2$, $H_2H_3$, $H_3H_1$ gewechselt wird.

18. Dass von den Punkten des paaren Zuges 𝔓 — wofern ein solcher vorhanden ist — keine anderwärts berührende Geraden ausgehen, ist schon gesagt; da er aber selbst Tangenten besitzt, so giebt es auch Gerade, die ihn nicht schneiden, folglich kann er in einen ganz im Endlichen verlaufenden geschlossenen Zug (Oval) projicirt werden. Die Projection von 𝔘 liegt ganz ausserhalb desselben, weil sonst Doppelpunkte sich ergäben, und jeder Punkt derselben sendet zwei Tangenten an das Oval; also haben wir, wenn wir wieder zurück projiciren: *Besteht* $C^3$ *aus* 𝔘 *und* 𝔓, *so sendet jeder Punkt von* 𝔘 *vier (reelle) Tangenten aus, zwei an* 𝔘, *zwei an* 𝔓; *jeder Punkt von* 𝔓 *aber keine reelle. Gehen von einem Punkte von* $C^3$ *vier reelle Tangenten aus, so muss er* 𝔘 *angehören, und da an* 𝔘 *selbst nur zwei gehen, muss noch ein* 𝔓 *existiren. Sendet aber ein Punkt nur zwei reelle Tangenten aus, so gehört er selbst, so wie diese dem unpaaren Zuge an; einen paaren giebt es nicht. Giebt es endlich einen Punkt, von welchem keine reellen Tangenten ausgehen, so gehört er dem paaren Zuge an.*

19. *Wenn* $C^3$ *einen isolirten Doppelpunkt besitzt, so kann sie nur aus einem unpaaren Zuge* 𝔘 *bestehen,* abgesehen vom isolirten Punkt, auf den sich der paare Zug 𝔓 reducirt hat; denn jede Linie, die diesen Punkt mit einem Punkte eines etwa vorhandenen paaren Zuges verbände, würde

*) Herr *Durège* beweist Math. Ann. I. diesen Satz (analytisch) nur für die Curve mit isolirtem Doppelpunkte.

vier Schnitte haben. ***Für* 𝔘 *aber gilt alles, was für den unpaaren Zug einer allgemeinen Curve im Vorhergehenden gefunden wurde.*** Der Convergenzpunkt der drei harmonischen Polaren ist der isolirte Punkt, wie aus ihrer Definition folgt.

## IV.

20. Dagegen erfordert ***die Curve mit einem Rückkehrpunkte R oder einem eigentlichen Doppelpunkt D,*** dessen beide Punkte wir als $D_1$ und $D_2$ unterscheiden wollen, eine besondere Betrachtung. ***Zwei getrennte Züge sind auch hier nicht möglich,*** weil, man mag sich $D$ (oder $R$) auf dem paaren oder unpaaren Zuge denken, jede Gerade, welche ihn mit einem (von ihm verschiedenen) Punkte des paaren Zuges verbindet, zu vier Schnitten führt. Als Schnittpunkt von beiden Zügen kann $D$ nicht auftreten, weil jeder solche Schnitt einen zweiten nach sich zieht.

Wir denken uns nöthigenfalls wiederum die Curve so projicirt, dass sie nur einen unendlich fernen Punkt hat, so hat man hinsichtlich des endlichen Bogens zwischen einem Punkte $B$ der Curve und seinem Tangentialpunkte $T$ drei Fälle: 1) er enthält keinen der beiden Punkte $D_1$, $D_2$, 2) er enthält beide oder 3) nur einen. Bei der Curve mit Rückkehrpunkt, wo $D_1$ und $D_2$ unendlich nahe sind, fällt der dritte Fall weg. Für den ersten Fall bleibt die Betrachtung bestehen, die in No. 13 gemacht wurde und uns den Satz gab, dass der endliche Bogen $BT$ mindestens einen Wendepunkt enthält. Betrachten wir den zweiten Fall, so werden, wie von $T$, so auch durch dessen Nachbarpunkte im endlichen Bogen $BT$ (von denen $P$ einer sei) anderwärts berührende, also auch nur einmal schneidende Gerade gehen; folglich können wir so projiciren, dass $P$ und nur $P$ ins Unendliche geht, also der endliche Bogen $BT$ in den unendlichen, und der unendliche, welcher weder $D_1$ noch $D_2$ enthält, in den endlichen übergeht, d. h. wir können den zweiten Fall in den ersten überführen, so dass auch für jenen die Existenz mindestens eines Wendepunktes dargethan ist.

***Berührungspunkt B und Tangentialpunkt T theilen also die Curve mit Rückkehrpunkt R oder mit eigentlichem Doppelpunkt*** $(D_1, D_2)$ ***so, dass, wenn in dem einen Bogen BT der Punkt R oder beide Punkte*** $D_1$, $D_2$ ***liegen, im anderen sich mindestens ein Wendepunkt befindet.***

21. Wir haben nun bei der Doppelpunkts-Curve nachzuweisen, dass es stets Tangenten giebt, welche dem Falle 1) oder 2) entsprechen, und denken

uns wiederum eine — nöthigenfalls durch Projection erhaltene — Curve mit nur einem unendlich fernen Punkte $U_\infty$. Die beiden Punkte $D_1$, $D_2$ theilen die Curve in zwei Theile; der eine enthält den unendlich fernen Punkt und heisse 𝔅, der andere ist im Endlichen geschlossen und heisse 𝔖 (Schleife) — er entsteht aus 𝔓 einer allgemeinen Curve mit zwei Zügen, wenn diese aneinanderstossen —; beide Theile haben jedoch bei $D$ eine Discontinuität. Der Theil 𝔖 wird, weil er im Endlichen geschlossen ist, von jeder Geraden paarmal, mithin 𝔅 unpaarmal getroffen; so dass 𝔅 alle (reellen) Wendepunkte und die Tangentialpunkte aller Tangenten enthält, mögen die Berührungspunkte auf 𝔅 oder 𝔖 liegen. Je nachdem jenes oder dieses eintritt, hat man einen der Fälle 1), 2) oder Fall 3). ***Damit ist die Existenz mindestens eines reellen Wendepunktes bei jeder Curve mit eigentlichem Doppelpunkte nachgewiesen.***

***Ein solcher unpaarer Theil 𝔅 — der alle Wendepunkte und Tangentialpunkte enthält — und paarer Theil 𝔖 ist nun,*** weil dies projectiv ist, ***auch bei der dreimal durch das Unendliche gehenden Curve vorhanden.***

22. Gesetzt nun, es gäbe mehrere Wendepunkte; so seien $W_1$, $W_2$ zwei benachbarte, d. h. solche, auf die man auf dem Wege $D_1 U_\infty D_2$ hinter einander treffen wird, indem wir uns wieder die Curve mit nur einem unendlich fernen Punkte $U_\infty$ vorstellen. Bewegt man nun den Berührungspunkt $B$ einer Tangente auf dem dabei durchlaufenen Bogen $W_1 W_2$, so müsste wegen No. 20 der Tangentialpunkt gerade den $D_1$ und $D_2$ enthaltenden Bogen $W_1 W_2$ durchlaufen, und zwar continuirlich, also $D$ passiren, was aber nicht möglich ist, da durch $D$ keine anderwärts berührende Gerade geht. ***Demnach hat die Curve dritter Ordnung mit einem eigentlichen Doppelpunkte oder mit einem Rückkehrpunkte einen und nur einen Wendepunkt $W$.***

23. Die drei Punkte $D_1$, $D_2$, $W$ theilen die Curve in drei Theile $D_1 W$, $WD_2$, $D_2 D_1$, von denen jene 𝔅 bilden, dieser hingegen 𝔖 ist und bei der Curve mit Rückkehrpunkt wegfällt; aus dem Vorhergehenden folgt, da, sobald $B$ in $D_1$, $D_2$ fällt, dann $T$ in $D_2$, $D_1$ liegt, dass, wenn $B$ jene drei Theile $D_1 W$, $WD_2$, $D_2 D_1$ durchläuft, dann $T$ sich bez. auf $D_2 W$, $WD_1$, $D_1 WD_2$ bewegt. ***Folglich gehen durch jeden Punkt $T$ von $D_1 WD_2$ oder 𝔅 zwei Tangenten, von denen die eine 𝔅, die andere 𝔖 berührt;*** die letztere geht bei der Curve mit Rückkehrpunkt durch diesen, auf den ja 𝔖 zusammengeschrumpft ist, und zählt nicht als Tangente. In die Gerade von $T$ nach dem Doppelpunkte haben sich, wenn wir die Curve als Grenz-

fall einer zweizügigen allgemeinen Curve auffassen, eine 𝔘- und eine 𝔓-Tangente vereinigt, während die nach einem isolirten Doppelpunkte gehende die beiden 𝔓-Tangenten vereinigt.

*Die Punkte von 𝔖 senden keine Tangenten aus.*

Für den Wendepunkt $W$ ist die 𝔅-Tangente die Wendetangente, die andere die 𝔖-Tangente; die harmonische Polare $h$ geht durch den Doppelpunkt und schneidet nochmals 𝔖 in $H$; bei der Curve mit Rückkehrpunkt ist sie die Rückkehrtangente.

24. *Geht man bei der Curve mit eigentlichem Doppelpunkte von einem Punkte $T$ auf 𝔅 aus, sucht den auf 𝔅 gelegenen zugehörigen $B$ auf, fasst diesen wieder als $T$ auf, und wiederholt den Prozess, so erhält man eine Punktreihe, deren Punkte abwechselnd auf $D_1W$, $WD_2$ liegen und die nach dem Wendepunkte convergiren. Geht man aber von $B$ aus, sucht $T$, womit man, auch wenn $B$ auf 𝔖 liegt, auf 𝔅 gelangt und nun bleibt, fasst $T$ wieder als $B$ auf, und so fort, so erhält man ebenfalls eine Reihe von Punkten, welche — abgesehen höchstens vom ersten — abwechselnd auf $D_1W$, $WD_2$ liegen und nach $D$, genauer abwechselnd nach $D_1$, $D_2$ convergiren. Aehnliches gilt bei der Curve mit Rückkehrpunkt,* wo für $D$, $D_1$, $D_2$ bez. $R$, $R_1$, $R_2$ zu setzen und der Zusatz „den auf 𝔅 gelegenen“ unnöthig ist.

Der Beweis für diese analytisch zuerst von Herrn *Durège* gefundenen Sätze ergiebt sich dadurch, dass man die Curve wiederum so projicirt, dass die harmonische Polare $h$ von $W$ ins Unendliche geht. Wir erhalten eine Curve, die in Bezug auf (die Projection von) $W$ symmetrisch ist. Da $h$ durch $D$ geht und 𝔖 schneidet, so besteht die Projection der Curve mit eigentlichem Doppelpunkte aus einem unpaaren Theile 𝔅, der sich nach verschiedenen Richtungssinnen hin zwei parallelen Geraden asymptotisch nähert und in Bezug auf den auf ihm gelegenen Mittelpunkt $W$ symmetrisch ist, und zwei hyperbelartigen Zweigen, welche sich denselben Asymptoten nähern, aber noch eine dritte gemeinsame (durch $W$ gehende) Asymptote haben und zu einander in Bezug auf $W$ symmetrisch sind (Fig. 7).

Bei der Projection der Curve mit Rückkehrpunkt, welche eine unendlich ferne Rückkehrtangente hat, (kubische Parabel) stossen im Mittelpunkte $W$ zwei in Bezug auf dasselbe zu einander symmetrische parabolische Bogen zusammen, die in entgegengesetzten Sinnen ins Unendliche gehend zu der Geraden $WR_\infty$ mehr und mehr parallel zu werden suchen (Fig. 8).

Aus der Symmetrie der Projectionen folgt ohne Weiteres, dass, wenn

$B$ und $T$ Berührungspunkt und Tangentialpunkt einer Tangente sind, die bei der ersteren Curve den Zweig $\mathfrak{W}$ tangirt, Bogen $WT$ grösser ist als Bogen $BW$; woraus die behauptete Convergenz sich ergiebt.

25. Bei der Curve mit Rückkehrpunkt besteht eine eindeutige Beziehung zwischen $B$ und $T$, also beschreiben $RB$ und $RT$ zwei projective Strahlbüschel, für welche ersichtlich die Rückkehrtangente $r$ und der Strahl $RW$ die vereinigten Strahlen sind. Folglich ist das Doppelverhältniss $R(WrBT)$ constant; dass es zwischen 0 und $-1$ ist, ist im Vorhergehenden erkannt.*)

Ueberträgt man die obigen Processe auf die Büschel um $R$, so erkennt man den Zusammenhang mit der von Herrn *Schröter* in den *Steiner*schen Vorlesungen 2. Aufl. S. 81 Nr. 11 gestellten Aufgabe; die Lösung derselben ist, in dem Falle, der hier vorliegt und der verhältnissmässig schwierigste ist, dass die vereinigten Elemente $M$, $N$ der beiden projectiven Gebilde — die man sich am besten als Punktreihen auf demselben Kegelschnitte vorstellt — reell sind und irgend zwei entsprechende Punkte $A$, $A'$ (und in Folge dessen jede zwei) durch $M$, $N$ getrennt werden, folgende:

Es seien $A_1$, $A'_1$ die vierten harmonischen Punkte zu $A$, bez. $A'$ in Bezug auf $M$, $N$; es sei dann $M$ derjenige der beiden Punkte $M$, $N$, den man auf dem Wege $AA_1A'$ zuerst überschreitet, $N$ wird dann auf dem Wege $A'A'_1A$ zuerst überschritten, und $(MNAA') = (NMA'A)$ ist zwischen 0 und $-1$; umgekehrt, ist dies der Fall, so gilt auch das Vorige. Es ist dann $M$ der Convergenzpunkt der Reihe $A$, $A' \equiv B$, $B' \doteq C$, ..., $N$ derjenige der Reihe $A'$, $A \equiv E'$, $E \equiv F'$, ...

*) Es hat sogar bei allen cubischen Curven mit Rückkehrpunkt denselben Werth $-\frac{1}{2}$, wie aus der Gleichung $x_2^3 - x_1^2 x_3 = 0$, in welche man die Gleichung jeder solchen Curve transformiren kann, sich ergiebt.

Münster i. W., im April 1880.

# Ueber Gleichungen dritten und vierten Grades.

(Von Herrn *Franke* in Dessau.)

---

Führt man in die Gleichung

$$\text{(I.)}\qquad f(x) = x^3+ax^2+bx+c = 0$$

für $x$ die imaginäre Grösse $\varrho+\sigma\sqrt{-1}$ ein, so zerfällt der Ausdruck (I.) in die zwei Gleichungen:

$$\text{(II.)}\qquad f(\varrho)-\frac{\sigma^2}{1.2}f''(\varrho) = \varrho^3+a\varrho^2+\varrho(b-3\sigma^2)+(c-a\sigma^2) = 0,$$

$$\text{(III.)}\qquad f'(\varrho)-\frac{\sigma^2}{1.2.3}f'''(\varrho) = \quad 3\varrho^2+2a\varrho \quad +(b-\sigma^2) \quad = 0.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen nach der dialytischen Methode unter Zuziehung der aus (II.) und (III.) abgeleiteten Relationen

$$3\varrho^3+2a\varrho^2 \quad +\varrho(b-\sigma^2) \quad = 0,$$
$$a\varrho^3+2\varrho^2(b-4\sigma^2)+3\varrho(c-a\sigma^2) = 0$$

die Grösse $\varrho$, so erhält man:

$$\text{(IV.)}\quad \begin{vmatrix} 1 & a & (b-3\sigma^2) & (c-a\sigma^2) \\ 0 & 3 & 2a & (b-\sigma^2) \\ 3 & 2a & (b-\sigma^2) & 0 \\ a & 2(b-4\sigma^2) & 3(c-a\sigma^2) & 0 \end{vmatrix} = -(2\sigma)^6-A_1(2\sigma)^4-A_2(2\sigma)^2-A_3 = 0.$$

$$A_1 = 2a^2-6b,$$
$$A_2 = (a^2-3b)^2,$$
$$A_3 = -\tfrac{1}{27}[(27c-9ab+2a^3)^2+4(3b-a^2)^3].$$

Sind letztere drei Grössen positiv, wofür die Relation

$$4(a^2-3b)^3-(27c-9ab+2a^3)^2 > 0$$

genügt, so hat die Gleichung (I.) ausschliesslich reelle Wurzeln.

Setzt man

$$a = -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3,$$
$$b = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3,$$
$$c = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3,$$
$$\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2, \quad \beta_2 = \alpha_1 - \alpha_3, \quad \beta_3 = \alpha_2 - \alpha_3,$$

so ist:

$$A_1 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2,$$
$$A_2 = \beta_1^2\beta_2^2 + \beta_1^2\beta_3^2 + \beta_2^2\beta_3^2,$$
$$A_3 = \beta_1^2\beta_2^2\beta_3^2,$$

folglich genügen der Gleichung (IV.) die Werthe

$$(2\sigma)^2 = -\beta_1^2, \quad -\beta_2^2, \quad -\beta_3^2.$$

Die Relation

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 3 & 2a & b \\ 3 & 2a & b & 0 \\ a & 2b & 3c & 0 \end{vmatrix} = -A_3 = 0$$

ist die bekannte Bedingung, unter welcher die Gleichung (I.) zwei gleiche Wurzeln hat.

Die Bedingungen, unter welchen die Gleichungen (II.) und (III.) ausschliesslich reelle Wurzeln haben, sind:

$$4.[a^2 - 3b + 9\sigma^2]^3 - [27c - 9ab + 2a^3]^2 > 0,$$
$$(a^2 - 3b + 3\sigma^2) > 0.$$

Hieraus folgt, dass, wenn die Gleichung (I.) ausschliesslich reelle Wurzeln hat, auch die Gleichungen (II.) und (III.) für jedes $\sigma$ imaginäre Wurzeln nicht haben können. — Hat die Gleichung (I.) imaginäre Wurzeln, so werden die Gleichungen (II.) und (III.) immerhin für Werthe von $\sigma^2$, welche eine bestimmte Grösse $y^2$ übersteigen, ausschliesslich reelle Wurzeln haben.

Die Gleichungen (II.) und (III.) lassen sich unter die Form bringen:

$$\text{(II.)} \quad \begin{vmatrix} (\varrho - \alpha_1) & \sigma\sqrt{-1} & \sigma\sqrt{-1} \\ -\sigma\sqrt{-1} & (\varrho - \alpha_2) & \sigma\sqrt{-1} \\ -\sigma\sqrt{-1} & -\sigma\sqrt{-1} & (\varrho - \alpha_3) \end{vmatrix} = 0,$$

$$(\text{III.})\quad \begin{vmatrix} (\varrho-\alpha_1) & \sigma\sqrt{-1} & \sigma\sqrt{-1} & \sigma\sqrt{-1} \\ -\sigma\sqrt{-1} & (\varrho-\alpha_2) & \sigma\sqrt{-1} & \sigma\sqrt{-1} \\ -\sigma\sqrt{-1} & -\sigma\sqrt{-1} & (\varrho-\alpha_3) & \sigma\sqrt{-1} \\ -\sigma\sqrt{-1} & -\sigma\sqrt{-1} & -\sigma\sqrt{-1} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Elimination von $\sigma$ aus den Gleichungen (II.) und (III.) ergiebt:

$$(\text{V.})\quad \varrho^3+a\varrho^2+\varrho\left(\frac{a^2-b}{4}\right)+\left(\frac{ab-c}{8}\right) = 0,$$

welcher Gleichung die Werthe

$$\varrho = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2},\quad \frac{\alpha_1+\alpha_3}{2},\quad \frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}$$

genügen.

Entsprechende Resultate findet man für die Gleichungen

$$(\text{VI.})\quad \varphi(x) = x^4+ax^3+bx^2+cx+d = 0,$$

$$(\text{VII.})\quad \begin{cases} \varphi(\varrho)-\dfrac{\sigma^2}{1.2}\varphi''(\varrho)+\dfrac{\sigma^4}{1.2.3.4}\varphi^{\text{IV}}(\varrho) \\ = \varrho^4+a\varrho^3+\varrho^2(b-6\sigma^2)+\varrho(c-3a\sigma^2)+(d-b\sigma^2+\sigma^4) = 0, \end{cases}$$

$$(\text{VIII.})\quad \varphi'(\varrho)-\frac{\sigma^2}{1.2.3}\varphi'''(\varrho) = 4\varrho^3+3a\varrho^2+\varrho(2b-4\sigma^2)+(c-a\sigma^2) = 0.$$

Die Elimination ergiebt:

$$(\text{IX.})\quad \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & a & (b-6\sigma^2) & (c-3a\sigma^2) & (d-b\sigma^2+\sigma^4) \\ 0 & 4 & 3a & (2b-4\sigma^2) & (c-a\sigma^2) \\ 4 & 3a & (2b-4\sigma^2) & (c-a\sigma^2) & 0 \\ a & (2b-20\sigma^2) & (3c-11a\sigma^2) & (4d-4b\sigma^2+4\sigma^4) & 0 \\ (a^2-2b+20\sigma^2) & (ab-3c+5a\sigma^2) & (ac-4d-3a^2\sigma^2+4b\sigma^2-4\sigma^4) & (ad-ab\sigma^2+a\sigma^4) & 0 \end{vmatrix} \\ = -4\{(2\sigma)^{12}+A_1(2\sigma)^{10}+A_2(2\sigma)^8+A_3(2\sigma)^6+A_4(2\sigma)^4+A_5(2\sigma)^2+A_6\} = 0. \end{cases}$$

Die Coefficienten $A_1,\ A_2,\ \dots\ A_6$ sind derartig zusammengesetzt, dass die Werthe

$$(2\sigma)^2 = -(\alpha_1-\alpha_2)^2,\quad -(\alpha_1-\alpha_3)^2,\quad \dots,\quad -(\alpha_3-\alpha_4)^2$$

der Gleichung (IX.) genügen.

Setzt man behufs der Vereinfachung $a = 0$, so erhält man

$$A_1 = -8b,$$

$$A_2 = 22b^2+8d\ \left[= \tfrac{1}{6}(32b^2+\{b^2+12d\})\right],$$

$$A_3 = -28b^3-16bd-26c^2\left[= \tfrac{1}{54}\{-256b^3-44b(b^2+12d)+39(-2b^3+8bd-9c^2)\}\right],$$

$$A_4 = 17b^4+24b^2d+48bc^2-112d^2$$

$$\left[= \tfrac{1}{3}\{7(b^2+12d)(b^2-4d)-16b(-2b^3+8bd-9c^2)+12b^2(b^2+12d)\}\right],$$

$$A_5 = -4b^5 - 32b^3d - 18b^2c^2 - 216c^2d + 192bd$$
$$[= \tfrac{1}{2}\{b^2+12d\}\{-2b^3+8bd-9c^2\} = \tfrac{1}{2}\{b^2+12d\}\{-9c^2-2b(b^2-4d)\}],$$
$$A_6 = 16b^4d - 4b^3c^2 - 128b^2d^2 + 144bc^2d - 27c^4 + 256d^3$$
$$[= \tfrac{1}{27}\{4(b^2+12d)^3 - (2b^3-72bd+27c^2)^2\}].$$

Beachtet man, dass $A_6$ nur positiv sein kann, wenn $(b^2+12d) > 0$, und dass, $-b > 0$ vorausgesetzt, $b^2-4d > 0$ sein muss, wenn $A_5$ und $A_6$ zugleich positiv sind, so ergiebt sich, dass $A_1, A_2, \dots A_6$ sämmtlich positiv sind und daher die Gleichung

$$x^4 + bx^2 + cx + d = 0,$$

ausschliesslich reelle Wurzeln hat, wenn gleichzeitig die Relationen statthaben:

$$-b > 0,$$
$$-2b^3 + 8bd - 9c^2 > 0,$$
$$4(b^2+12d)^3 - (2b^3-72bd+27c^2)^2 > 0.$$

Für den Fall, dass die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c & d \\ 0 & 4 & 3a & 2b & c \\ 4 & 3a & 2b & c & 0 \\ a & 2b & 3c & 4d & 0 \\ (a^2-2b) & (ab-3c) & (ac-4d) & ad & 0 \end{vmatrix} = -4A_6 = 0,$$

Gültigkeit hat, sind zwei Wurzeln der Gleichung (VI.) einander gleich.

Zu dem obigen Resultate gelangt man auch aus der Betrachtung, dass die Gleichung

$$x^4 + bx^2 + cx + d = 0,$$

vier reelle Wurzeln nur haben kann und haben muss, wenn einerseits die Gleichung

$$4x^3 + 2bx + c = 0,$$

drei reelle Wurzeln $r_1$, $r_2$, $r_3$ hat, und andererseits von den Werthen $z_1$, $z_2$, $z_3$, welche der Ausdruck

$$x^4 + bx^2 + cx + d$$

für $x = r_1, r_2, r_3$ annimmt, einer positiv und zwei negativ sind.

Aus den Gleichungen

$$r^4 + br^2 + cr + d = z,$$
$$r^4 + \frac{b}{2}r^2 + \frac{c}{4}r = 0$$

erhält man:

$$z_1 = \frac{b}{2}r_1^2 + \tfrac{3}{4}cr_1 + d,$$

$$z_2 = \frac{b}{2}r_2^2 + \tfrac{3}{4}cr_2 + d,$$

$$z_3 = \frac{b}{2}r_3^2 + \tfrac{3}{4}cr_3 + d.$$

Unter Berücksichtigung der Relationen

$$r_1 + r_2 + r_3 = 0,$$

$$r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \frac{b}{2},$$

$$r_1r_2r_3 = -\frac{c}{4}$$

ergiebt sich:

$$z_1 + z_2 + z_3 = \tfrac{1}{2}(6d - b^2),$$

$$z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = \tfrac{1}{48}[(b^2 + 12d)^2 + b(2b^3 - 72bd + 27c^2)],$$

$$z_1z_2z_3 = \frac{1}{3^3.4^4}[4(b^2 + 12d)^3 - (2b^3 - 72bd + 27c^2)^2].$$

Da die Gleichung

$$4x^3 + 2bx + c = 0$$

drei reelle Wurzeln hat, wenn $-8b^3 - 27c^2 > 0$, so ergiebt sich, dass die Gleichung

$$x^4 + bx^2 + cx + d = 0,$$

ausschliesslich reelle Wurzeln hat, sofern gleichzeitig die Relationen

$$-8b^3 - 27c^2 > 0,$$

$$4(b^2 + 12d)^3 - (2b^3 - 72bd + 27c^2)^2 > 0,$$

$$(b^2 + 12d)^2 + b(2b^3 - 72bd + 27c^2) < 0,$$

oder

$$(b^2 + 12d)^2 + b(2b^3 - 72bd + 27c^2) > 0, \quad (6d - b^2) < 0$$

stattfinden.

Beachtet man, dass $-8b^3 - 27c^2 > 0$ nicht statthaben kann, wenn nicht $-b > 0$ ist; dass, wenn $(b^2 + 12d)^2 + b(2b^3 - 72bd + 27c^2)$ negativ ist, $2b^3 - 72bd + 27c^2$ positiv sein muss und dass alsdann

$$\{(b^2 + 12d)^2 + b(2b^3 - 72bd + 27c^2)\}\{2b^3 - 72bd + 27c^2\}$$
$$+ b\{4(b^2 + 12d)^3 - (2b^3 - 72bd + 27c^2)\} = 3(b^2 + 12d)^2(2b^3 - 8bd + 9c^2) < 0,$$

also

$$-2b^3+8bd-9c^2 > 0;$$

dass ferner, wenn

$$(b^2+12d)^2+b(2b^2-72bd+27c^2) = 3(b^2-12d)(b^2-4d)+27bc^2$$

positiv ist, die Ausdrücke $(b^2-4d)$ und $(b^2-12d)$ dasselbe Vorzeichen haben müssen, welches auch dem dazwischen liegenden Werthe $(b^2-6d)$ zukommt; dass ferner für

$$(b^2+12d)^2+b(2b^3-72bd+27c^2) > 0,$$
$$b^2-4d > 0$$

die Relation stattfindet:

$$(b^2+12d)^2+b(2b^3-72bd+27c^2)+3(b^2+12d)(b^2-4d)$$
$$= -3b(-2b^3+8bd-9c^2) > 0,$$

woraus folgt:

$$-2b^3+8bd-9c^2 > 0;$$

dass endlich für $b^2-4d < 0$ der Ausdruck

$$-2b^3+8bd-9c^2 = -9c^2-2b(b^2-4d)$$

negativ sein muss, so erhellt, dass die vorstehend entwickelten zwei Gruppen Bedingungsrelationen mit einander genau übereinstimmen.

Damit die Gleichung

$$\varrho^4+\varrho^2(b-6\sigma^2)+c\varrho+(d-b\sigma^2+\sigma^4) = 0,$$

ausschliesslich reelle Wurzeln habe, muss gleichzeitig sein:

$$6\sigma^2-b > 0,$$
$$3.2^7\sigma^6-5.2^5b\sigma^4+\sigma^2\{12(b^2-4d)+16b^2\}+\{-2b^3+8bd-9c^2\} > 0,$$
$$3^3.2^{14}\sigma^{12}-3^4.2^{13}b\sigma^{10}+3^3.2^{10}\sigma^8(10b^2+12d)-3^3.2^8\sigma^6b(9b^2+12d)$$
$$+3^3.2^4\sigma^4[5(b^2+12d)(b^2-4d)+4b^2(b^2+12d)-4b(-2b^3+8bd-9c^2)]$$
$$+3^3.2^3\sigma^2(b^2+12d)(-2b^3+8bd-9c^2)+[4(b^2+12d)^3-(2b^3-72bd+27c^2)^2] > 0.$$

Die Bedingung, dass die Gleichung

$$4\varrho^3+\varrho(2b-4\sigma^2)+c = 0$$

nur reelle Wurzeln hat, ist:

$$(-8b^3-27c^2)+48b^2\sigma^2-96b\sigma^4+64\sigma^6 > 0.$$

Da

$$3(-2b^3+8bd-9c^2) = -8b^3-27c^2+2b(b^2+12d)$$

für $-b > 0$, $(b^2+12d) > 0$ nur positiv sein kann, wenn $-8b^3-27c^2 > 0$, so folgt, dass, wenn die Gleichung

$$\varphi(x) = x^4+bx^2+cx+d = 0,$$

nur reelle Wurzeln hat, auch die Gleichungen

$$\varphi(x) - \frac{\sigma^2}{1.2}\varphi''(x) + \frac{\sigma^4}{1.2.3.4}\varphi^{IV}(x) = 0,$$

$$\varphi'(x) - \frac{\sigma^2}{1.2.3}\varphi'''(x) = 0,$$

für jedes $\sigma$ imaginäre Wurzeln nicht haben können.

Hat $\varphi(x) = 0$ imaginäre Wurzeln, so werden jene zwei Gleichungen immerhin für Werthe von $\sigma^2$, welche eine bestimmte Grösse $y^2$ übersteigen, ausschliesslich reelle Wurzeln haben.

Eliminirt man $\sigma$ aus den Gleichungen:

$$\varrho^4+b\varrho^2+c\varrho+d - \frac{\sigma^2}{1.2}[4.3\varrho^2+2.1b] + \frac{\sigma^4}{1.2.3.4}[4.3.2.1] = 0,$$

$$4\varrho^3+2b\varrho+c - \frac{\sigma^2}{1.2.3}[4.3.2\varrho] = 0,$$

so erhält man:

$$(2\varrho)^6+2b(2\varrho)^4+(2\varrho)^2(4d-b^2)-c^2 = 0,$$

welcher Gleichung die Werthe

$$2\varrho = \alpha_1+\alpha_2, \quad \alpha_1+\alpha_3, \quad \dots \quad \alpha_3+\alpha_4,$$

genügen.

Dessau, den 1. April 1880.

# Allgemeine Bemerkungen zum *Abel*schen Theorem.

(Von Herrn *L. Königsberger* in Wien.)

---

Das für die Entwickelung der neueren Analysis so wichtig gewordene Theorem von *Abel* liefert bekanntlich für die Summe einer *beliebigen* Anzahl gleichartiger Integrale einer algebraischen Function und einer *bestimmten* Anzahl zugehöriger Integrale einen algebraisch-logarithmischen Ausdruck, wobei zwischen den Grenzen der in Rede stehenden Integrale algebraische Relationen existiren, und die Anzahl der zugehörigen Integrale nur von der Natur der zu Grunde gelegten algebraischen Function abhängig ist. Der von *Abel* gegebene Beweis des Theorems (Mémoire sur une propriété générale d'une classe très-étendue des fonctions transcendantes, présenté à l'Académie le 30 octobre 1826) beruht auf der folgenden Ueberlegung: Wenn

$$(1.)\qquad y^n+p_{n-1}y^{n-1}+\cdots+p_1y+p_0 = 0$$

eine irreductible algebraische Function definirt, und mit dieser eine andere Gleichung

$$(2.)\qquad q_{n-1}y^{n-1}+q_{n-2}y^{n-2}+\cdots+q_1y+q_0 = 0$$

zusammengestellt wird, deren Coefficienten von einer Reihe von Parametern $a, a', a'', \dots$ abhängen, so mag die Elimination von $y$ zwischen (1.) und (2.) die Gleichung

$$(3.)\qquad F(x) = 0$$

liefern, deren Coefficienten rationale Functionen der Parameter $a, a', a'', \dots$ sind, und deren Lösungen, nachdem ein von den Grössen $a, a', a'', \dots$ etwa freier Factor bereits abgetrennt gedacht wird, $x_1, x_2, \dots x_\mu$ sein mögen, während die zugehörigen Werthe $y_1, y_2, \dots y_\mu$ dann bekanntlich im Allgemeinen rationale Functionen der entsprechenden $x$-Werthe und jener Parameter sind. Bildet man nun mit irgend einer rationalen Function $f(x, y)$ von $x$ und $y$ die Summe

$$f(x_1, y_1)dx_1+f(x_2, y_2)dx_2+\cdots+f(x_\mu, y_\mu)dx_\mu,$$

so wird sich diese in der Form

$$Rda + R_1 da' + R_2 da'' + \cdots$$

darstellen, in welcher sich die Grössen $R$, $R_1$, $R_2$, ... als rationale symmetrische Functionen der Werthepaare

$$x_1,\ y_1;\quad x_2,\ y_2;\quad \ldots\quad x_\mu,\ y_\mu,$$

rational durch die Grössen $a$, $a'$, $a''$, ... ausdrücken lassen, und es folgt somit

$$(4.)\qquad \int^{x_1} f(x,y)\,dx + \int^{x_2} f(x,y)\,dx + \cdots + \int^{x_\mu} f(x,y)\,dx = v,$$

worin $v$ eine rational-logarithmische Function der Grössen $a$, $a'$, $a''$, ... bedeutet, welche selbst oder deren Logarithmand wiederum vermöge der Gleichung (2.) aus den willkürlich gewählten und von einander unabhängigen Werthen $x_1$, $x_2$, ..., deren Anzahl die Zahl der $a$-Grössen erreichen darf, und den willkürlich dazu gewählten algebraischen Irrationalitäten, welche jedoch Lösungen der Gleichung (1.) sein müssen, rational zusammengesetzt sein wird; die Grenzen der abhängigen Integrale ergeben sich als die Lösungen einer Gleichung, welche aus (3.) durch Division mit den zu den willkürlich angenommenen Grenzwerthen gehörigen Linearfactoren hervorgeht, während die zugehörigen algebraischen Irrationalitäten sich im Allgemeinen mit Hülfe der Werthepaare $x_1$, $y_1$; $x_2$, $y_2$; ... rational durch die entsprechenden Grenzwerthe ausdrücken.

Betrachten wir diesen Satz zunächst vom Standpunkte der allgemeinen Transformationstheorie der *Abel*schen Integrale, so liefert derselbe eine der in den Integralen linearen Transformationsgleichung entsprechende, specielle Beziehung gleichartiger Integrale, oder, wenn wir beachten, dass bekanntlich andere fundamentale Transformationsbeziehungen d. h. einfachste algebraische Beziehungen zwischen Integralen algebraischer Functionen mit algebraisch unter einander verbundenen Grenzen als additive nicht existiren, und erwägen, dass die Grösse $v$ als das Integral eines Differentialausdrucks einer algebraischen Function mehrerer Variabeln aber einfacherer Natur — hier die einzigen Unstetigkeitsfunctionen der *Abel*schen Integrale — betrachtet werden kann, so wird sich der *Abel*sche Satz als eine algebraische — in ihrer Form einzige — Verbindung der Werthe des Integrales einer algebraischen Function für verschiedene algebraisch mit einander verbundene Integralgrenzen und einfacherer Integrale — der Unstetigkeitsfunctionen dieser —

für algebraisch aus jenen Integralgrenzen zusammengesetzte Argumente auffassen lassen und so einer umfassenderen Betrachtungsweise zugänglich werden.

Fasst man nämlich das Integral

$$\int f(x, y)dx,$$

worin $y$ eine irreductible algebraische Function von $x$ bedeutet, als Integral der Differentialgleichung

$$(5.)\qquad \frac{dz}{dx} = f(x, y)$$

auf, so würde das *Abel*sche Theorem einen Satz von einer algebraischen Beziehung ein und desselben Integrales der Differentialgleichung (5.) für verschiedene algebraisch mit einander verbundene Argumente und eines Integrales der Differentialgleichungen

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \psi(a, a', a'', \ldots), \quad \frac{\partial z}{\partial a'} = \psi_1(a, a', a'', \ldots), \quad \frac{\partial z}{\partial a''} = \psi_2(a, a', a'', \ldots), \quad \ldots$$

liefern, worin die $\psi$-Functionen der Integrabilitätsbedingung genügende rationale Functionen der $a$-Grössen bedeuten, und diese wiederum algebraisch mit den ersteren Argumenten verknüpft sind. Von diesem Gesichtspunkte aus wird das *Abel*sche Theorem eine Verallgemeinerung der analytischen Beziehungen zulassen, und die Anfänge meiner darauf bezüglichen Untersuchungen, welche an eine frühere Arbeit „über algebraische Beziehungen zwischen Integralen verschiedener Differentialgleichungen" (Dieses Journal B. 84) anknüpfen und zugleich den Ausgangspunkt für die Aufstellung der allgemeinen Form des Transformationsproblems der Integrale beliebiger Differentialgleichungen bilden, kurz darzulegen, ist der Zweck der vorliegenden Bemerkungen.

Es mag nur noch hinzugefügt werden, dass eben dahin auch eine Frage scheinbar anderer Natur gehört, die aber eng mit jener verknüpft ist. Man unterscheidet bekanntlich in der Theorie der *Abel*schen Integrale solche, welche in keinem Punkte unendlich sind (Integrale erster Gattung) und solche, welche in zwei Punkten logarithmisch unendlich werden (Integrale dritter Gattung), und zeigt, dass jedes *Abel*sche Integral durch einen additiven, mit constanten Coefficienten versehenen Ausdruck aus Integralen erster Gattung, Integralen dritter Gattung und den Derivirten dieser letzteren, nach den Unstetigkeitswerthen genommen, dargestellt werden kann, oder

anders ausgesprochen, dass man von jedem *Abel*schen Integrale andere zu derselben algebraischen Irrationalität gehörige, nur in einzelnen Punkten logarithmisch oder algebraisch von einer endlichen Ordnung unendlich werdende Integrale abziehen kann, so dass wieder zu derselben Irrationalität gehörige *Abel*sche Integrale übrig bleiben, welche nirgends unendlich sind. Fasst man auch hier wieder die *Abel*schen Integrale als Integrale der Differentialgleichung (5.) auf und betrachtet die angegebene Reduction als eine algebraische Relation zwischen Integralen verschiedener Differentialgleichungen (5.), welche sich nur durch die rationale Function $f$ unterscheiden, während die algebraische Irrationalität $y$ in allen dieselbe bleibt, so wird man auf die Verallgemeinerung dieser Frage für beliebige Differentialgleichungen geführt, für welche bei Veränderung der in ihr vorkommenden rationalen Functionsformen mit Beibehaltung der algebraischen Irrationalitäten algebraische Beziehungen zwischen deren Integralen gesucht werden, die in jenem speciellen Falle in lineare Relationen übergehen, welche gestatten, das Integral der einen Differentialgleichung eindeutig durch die Integrale der anderen Differentialgleichungen auszudrücken.

---

Es soll zuerst der Begriff der Irreductibilität einer Differentialgleichung $m^{\text{ter}}$ Ordnung von der Form

$$(6.)\qquad f\left(x,\, y_1,\, y_2,\, \dots\, y_\varrho,\, z,\, \frac{dz}{dx},\, \frac{d^2z}{dx^2},\, \dots\, \frac{d^mz}{dx^m}\right) = 0$$

festgestellt werden, in welcher $y_1,\, y_2,\, \dots\, y_\varrho$ irreductible algebraische Functionen von $x$ bedeuten, welche der späteren Anwendungen wegen und zur Vergleichung mit dem *Abel*schen Theorem in der gebräuchlichen Form in die Function $f$ hineingezogen sind, die selbst eine rationale Function der in ihr enthaltenen Grössen bedeutet. Gemäss der Analogie mit den algebraischen Gleichungen soll die Differentialgleichung (6.) *irreductibel* genannt werden, wenn

1) *die linke Seite derselben als algebraisches ganzes Polynom des höchsten Differentialquotienten* $\frac{d^mz}{dx^m}$ *aufgefasst sich für kein Integral der Differentialgleichung in Factoren von einem in dieser Grösse niedrigeren Grade zerlegen lässt, deren Coefficienten ebenfalls rationale Functionen der Grössen*

$$x,\, y_1,\, y_2,\, \dots\, y_\varrho,\, z,\, \frac{dz}{dx},\, \dots\, \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}$$

*sind,*

2) *die Differentialgleichung kein Integral mit einer Differentialgleichung von einer niedrigeren Ordnung* $\mu$ *als der* $m^{ten}$ *gemein hat, deren linke Seite wiederum rational aus*

$$x, y_1, y_2, \dots y_\varrho, z, \frac{dz}{dx}, \dots \frac{d^\mu z}{dx^\mu},$$

*zusammengesetzt ist, also auch kein algebraisches Integral besitzt, für welches die Ordnung der sie definirenden Differentialgleichung Null wäre.*

Es mag bemerkt werden, dass die unter 1) angegebene Bedingung unter Voraussetzung der Bedingung (2.) auch dadurch ersetzt werden kann, dass die vorgelegte Differentialgleichung (6.) mit keiner Differentialgleichung $m^{ter}$ Ordnung, welche in Bezug auf den $m^{ten}$ Differentialquotienten von einem niedrigeren Grade ist, ein Integral gemein haben darf; denn ist dies der Fall, und fasst man in den beiden Gleichungen, wenn $z_1$ das gemeinsame Integral ist, $\frac{d^m z}{dx^m}$ als Variable auf, so werden die beiden Gleichungen eine gemeinsame Lösung $\frac{d^m z_1}{dx^m}$ und daher auch einen gemeinsamen Theiler haben, welcher ein Polynom von $\frac{d^m z_1}{dx^m}$ sein wird, dessen Coefficienten rational aus

$$x, y_1, y_2, \dots y_\varrho, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \dots \frac{d^{m-1} z_1}{dx^{m-1}}$$

zusammengesetzt sind, es wäre somit die ursprüngliche Differentialgleichung für das Integral $z_1$ in rationale Factoren zerlegbar — und umgekehrt ist unmittelbar ersichtlich, dass die Zerlegbarkeit der gegebenen Differentialgleichung für irgend ein Integral derselben in Factoren von niedrigerem Grade in dem höchsten Differentialquotienten erkennen lässt, dass die gegebene Differentialgleichung mit einer Differentialgleichung derselben Ordnung, aber niedrigeren Grades ein Integral gemein hat.

Hiernach wird man, wenn man unter einer Differentialgleichung $\mu^{ter}$ Ordnung, welche in Bezug auf den $\mu^{ten}$ Differentialquotienten vom $0^{ten}$ Grade ist, eine Differentialgleichung $(\mu-1)^{ter}$ Ordnung versteht, die Definition der Irreductibilität einer Differentialgleichung auch folgendermassen geben können:

*Eine Differentialgleichung ist irreductibel, wenn sie kein Integral mit einer Differentialgleichung derselben Ordnung und niedrigeren Grades in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten gemein hat,*

wobei selbstverständlich stets nur von algebraischen Differentialgleichungen die Rede ist, die ausser der abhängigen Variablen $z$ und deren Ableitungen nur $x, y_1, y_2, \dots y_\varrho$ enthalten.

Aber es werden sich die in 1) und 2) für die Irreductibilität einer Differentialgleichung aufgestellten Bedingungen häufig noch vereinfachen lassen. Ist nämlich die Differentialgleichung in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten von einem höheren Grade als dem ersten, und sei die Bedingung erfüllt, dass kein Integral derselben einer Differentialgleichung derselben Ordnung und ersten Grades genügt, so behaupten wir, ist die zweite Bedingung von selbst erfüllt, d. h. es soll schon daraus folgen, dass dieselbe mit keiner Differentialgleichung niederer Ordnung derselben Art ein Integral gemein haben kann, wenn sie für das zu betrachtende gemeinsame Integral nicht etwa für jeden Werth der höchsten Ableitung identisch verschwindet; denn angenommen, sie hätte ein Integral $z_1$ mit der Differentialgleichung der kleinsten Ordnung $\mu$ und zugleich des kleinsten Grades $\varkappa$

$$\begin{aligned}
&\varphi\left(x, y_1, y_2, \dots y_\varrho, z, \frac{dz}{dx}, \dots \frac{d^{\mu-1}z}{dx^{\mu-1}}\right)\left(\frac{d^\mu z}{dx^\mu}\right)^\varkappa \\
&+\varphi_1\left(x, y_1, y_2, \dots y_\varrho, z, \frac{dz}{dx}, \dots \frac{d^{\mu-1}z}{dx^{\mu-1}}\right)\left(\frac{d^\mu z}{dx^\mu}\right)^{\varkappa-1} \\
&+\cdots+\varphi_\varkappa\left(x, y_1, y_2, \dots y_\varrho, z, \frac{dz}{dx}, \dots \frac{d^{\mu-1}z}{dx^{\mu-1}}\right) = 0
\end{aligned}$$

gemein, so ergäbe sich durch successive Differentiation

$$\begin{aligned}
&\left[\varkappa.\varphi\left(\frac{d^\mu z}{dx^\mu}\right)^{\varkappa-1}+(\varkappa-1)\varphi_1\left(\frac{d^\mu z}{dx^\mu}\right)^{\varkappa-2}+\cdots+\varphi_{\varkappa-1}\right]\frac{d^{\mu+1}z}{dx^{\mu+1}} \\
&\quad+\Phi_1\left(x, y_1, y_2, \dots y_\varrho, z, \frac{dz}{dx}, \dots \frac{d^\mu z}{dx^\mu}\right) = 0, \\
&\left[\varkappa.\varphi\left(\frac{d^\mu z}{dx^\mu}\right)^{\varkappa-1}+(\varkappa-1)\varphi_1\left(\frac{d^\mu z}{dx^\mu}\right)^{\varkappa-2}+\cdots+\varphi_{\varkappa-1}\right]\frac{d^{\mu+2}z}{dx^{\mu+2}} \\
&\quad+\Phi_2\left(x, y_1, y_2, \dots y_\varrho, z, \frac{dz}{dx}, \dots \frac{d^{\mu+1}z}{dx^{\mu+1}}\right) = 0, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

also auch

$$\begin{aligned}
&\left[\varkappa.\varphi\left(\frac{d^\mu z}{dx^\mu}\right)^{\varkappa-1}+(\varkappa-1)\varphi_1\left(\frac{d^\mu z}{dx^\mu}\right)^{\varkappa-2}+\cdots+\varphi_{\varkappa-1}\right]\frac{d^m z}{dx^m} \\
&+\Phi_{m-\mu}\left(x, y_1, y_2, \dots y_\varrho, z, \frac{dz}{dx}, \dots \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}\right) = 0,
\end{aligned}$$

und da der Ausdruck

$$\varkappa.\varphi\left(\frac{d^\mu z}{dx^\mu}\right)^{\varkappa-1}+(\varkappa-1)\varphi_1\left(\frac{d^\mu z}{dx^\mu}\right)^{\varkappa-2}+\cdots+\varphi_{\varkappa-1}$$

für $z = z_1$ nicht verschwinden kann, weil sonst die vorgelegte Differentialgleichung ein Integral mit einer Differentialgleichung $\mu^{\text{ter}}$ Ordnung von einem niedrigeren Grade als dem $x^{\text{ten}}$ gemein hätte, so liesse sich $\frac{d^m z_1}{dx^m}$ rational durch $x, y_1, y_2, \ldots y_\varrho, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \ldots \frac{d^{m-1}z_1}{dx^{m-1}}$ ausdrücken, was der Annahme wegen nicht möglich ist; also genügt in diesem Falle die obige Bedingung zur Definition der Irreductibilität. Ist dagegen die Differentialgleichung $m^{\text{ter}}$ Ordnung in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten linear, so wird die erste jener beiden Bedingungen nicht in Betracht kommen, oder vielmehr, dieselbe wird mit der zweiten zusammenfallen, so dass häufig nur eine der beiden oben für die Irreductibilität einer Differentialgleichung aufgestellten Bedingungen zur Anwendung kommen wird.

Endlich mag noch bemerkt werden, dass in dem folgenden Punkte eine Analogie mit den irreductibeln *algebraischen* Gleichungen nicht besteht; man kann offenbar die Irreductibilität einer algebraischen Gleichung auch so definiren, dass dieselbe *eine* Lösung besitzt, welche nicht die Wurzel einer Gleichung niedrigeren Grades mit ähnlichen Coefficienten ist, indem hieraus unmittelbar folgt, dass sie keine Lösung besitzen darf, welche einer Gleichung von niedrigerem Grade genügt. Dies gilt jedoch für Differentialgleichungen nicht, da z. B. eine Differentialgleichung erster Ordnung ein transcendentes und ein algebraisches Integral besitzen kann, von denen das letztere als ein Integral einer algebraischen Differentialgleichung $0^{\text{ter}}$ Ordnung aufzufassen ist.

Hat eine Differentialgleichung $m^{\text{ter}}$ Ordnung ein singuläres Integral, welches den nach $z^{(m)}$ genommenen Differentialquotienten der linken Seite der Differentialgleichung zu Null macht, so ist dieselbe offenbar stets reductibel.

Es soll nun der folgende Satz bewiesen werden:

*Ist die Differentialgleichung*

$$(7.) \qquad f\left(x, y_1, y_2, \ldots y_\varrho, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots \frac{d^mz}{dx^m}\right) = 0$$

*irreductibel und hat dieselbe mit einer Differentialgleichung*

$$(8.) \qquad F\left(x, y_1, y_2, \ldots y_\varrho, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots \frac{d^\mu z}{dx^\mu}\right) = 0$$

*irgend ein Integral $z_1$ gemein, so muss sie alle Integrale mit derselben gemeinsam haben.*

Denkt man sich nämlich die Gleichung (7.) $\mu-m$ mal ($\mu \geqq m$) differentiirt, so dass man mit Einschluss der Gleichungen (7.) und (8.) $\mu-m+2$ Gleichungen erhält, aus denen sich, wenn die Differentialquotienten von $y_1, y_2, \dots y_\varrho$ vermöge der diese algebraischen Functionen definirenden irreductibeln algebraischen Gleichungen wiederum durch $x, y_1, y_2, \dots y_\varrho$ ausgedrückt sind, die $\mu-m+1$ Grössen

$$\frac{d^m z_1}{dx^m}, \quad \frac{d^{m+1} z_1}{dx^{m+1}}, \quad \dots \quad \frac{d^\mu z_1}{dx^\mu}$$

eliminiren lassen, so erhält man eine Differentialgleichung der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung

$$(9.) \qquad \varphi\left(x, y_1, y_2, \dots y_\varrho, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \dots \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}\right) = 0,$$

in welcher $\varphi$ eine rationale Function der in ihr enthaltenen Grössen bedeutet, und die mit der Gleichung (7.) das Integral $z_1$ gemein hat. Da aber (7.) eine irreductible Differentialgleichung sein sollte, also das Integral $z_1$ nicht mit einer Differentialgleichung niedrigerer Ordnung gemein haben kann, so wird die Gleichung (9.) eine identische sein müssen, d. h. bestehen müssen, was auch immer für Werthe für $z$ und deren Ableitungen gesetzt werden. Um nun daran weitere Folgerungen zu knüpfen, wird es nöthig sein, das Eliminationsresultat (9.) noch in anderer Form darzustellen; entwickelt man nämlich aus der Differentialgleichung (7.), welche in Bezug auf $\frac{d^m z}{dx^m}$ vom $\varkappa^{\text{ten}}$ Grade sein mag, die Werthe

$$(10.) \qquad \begin{cases} \frac{d^m z}{dx^m} = \psi_1\left(x, y_1, y_2, \dots y_\varrho, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \dots \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}\right), \\ \frac{d^m z}{dx^m} = \psi_2\left(x, y_1, y_2, \dots y_\varrho, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \dots \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{d^m z}{dx^m} = \psi_\varkappa\left(x, y_1, y_2, \dots y_\varrho, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \dots \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}\right), \end{cases}$$

und daraus die entsprechenden Werthe

$$\frac{d^{m+1}z}{dx^{m+1}} = \chi_1, \quad \frac{d^{m+1}z}{dx^{m+1}} = \chi_2, \quad \dots \quad \frac{d^{m+1}z}{dx^{m+1}} = \chi_\varkappa$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{d^\mu z}{dx^\mu} = \omega_1, \quad \frac{d^\mu z}{dx^\mu} = \omega_2, \quad \dots \quad \frac{d^\mu z}{dx^\mu} = \omega_\varkappa,$$

setzt diese Werthe in das Polynom der linken Seite von (8.) ein und bildet

das Product

$$(11.)\begin{cases} F\left(x,\, y_1,\, y_2,\, \dots\, y_\varrho,\, z,\, \frac{dz}{dx},\, \dots\, \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}},\, \psi_1,\, \chi_1,\, \dots\, \omega_1\right)\times \\ F\left(x,\, y_1,\, y_2,\, \dots\, y_\varrho,\, z,\, \frac{dz}{dx},\, \dots\, \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}},\, \psi_2,\, \chi_2,\, \dots\, \omega_2\right)\times\cdots \\ \cdots\times F\left(x,\, y_1,\, y_2,\, \dots\, y_\varrho,\, z,\, \frac{dz}{dx},\, \frac{d^2z}{dx^2},\, \dots\, \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}},\, \psi_\varkappa,\, \chi_\varkappa,\, \dots\, \omega_\varkappa\right) = 0, \end{cases}$$

so erhält man bekanntlich ebenfalls das durch (9.) dargestellte Eliminationsresultat, indem, wie schon oben gezeigt, die successive Differentiation der Gleichung (7.) die höheren Differentialquotienten

$$\frac{d^{m+1}z}{dx^{m+1}},\quad \frac{d^{m+2}z}{dx^{m+2}},\quad \dots\quad \frac{d^\mu z}{dx^\mu}$$

als rationale eindeutige Functionen von $z$ und den niederen Differentialquotienten ausdrückt. Da aber die Gleichung (9.), also auch die Gleichung (11.) identisch verschwinden muss für jedes $z$ und beliebig dazu gewählte Ableitungen, so wird also jedenfalls für einen continuirlichen Werthecomplex dieser Grössen mindestens *einer* der Factoren von (11.) verschwinden müssen, und da man diesen verschwindenden Factor so, dass er Null bleibt, weiter fortsetzen kann, während die Function $\psi$ wegen der in Bezug auf $\frac{d^m z}{dx^m}$ für jedes Integral, also um so mehr im algebraischen Sinne vorausgesetzten Irreductibilität der Differentialgleichung (7.) der Reihe nach die $\varkappa$ verschiedenen $\psi$-Werthe annimmt, so wird jeder der Factoren der Gleichung (11.) für alle Werthecomplexe verschwinden. Wählen wir nun für $z$ eine Function von $x$, welche der Gleichung

$$(12.)\qquad \frac{d^m z}{dx^m} = \psi_\alpha\left(x,\, y_1,\, y_2,\, \dots\, y_\varrho,\, z,\, \frac{dz}{dx},\, \frac{d^2z}{dx^2},\, \dots\, \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}\right)$$

genügt, so dass

$$(13.)\qquad \frac{d^{m+1}z}{dx^{m+1}} = \chi_\alpha,\quad \dots\quad \frac{d^\mu z}{dx^\mu} = \omega_\alpha$$

wird, dann muss diese $z$-Function als Integral der Gleichung (12.) auch der Differentialgleichung (7.) genügen und aus dem oben angegebenen Grunde auch die Gleichung

$$(14.)\qquad F\left(x,\, y_1,\, y_2,\, \dots\, y_\varrho,\, z,\, \frac{dz}{dx},\, \dots\, \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}},\, \psi_\alpha,\, \chi_\alpha,\, \dots\, \omega_\alpha\right) = 0$$

befriedigen, welche nach (12.) und (13.) in

$$(15.)\qquad F\left(x,\, y_1,\, y_2,\, \dots\, y_\varrho,\, z,\, \frac{dz}{dx},\, \dots\, \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}},\, \frac{d^m z}{dx^m},\, \dots\, \frac{d^\mu z}{dx^\mu}\right) = 0$$

übergeht, und wir sehen somit, dass jedes Integral der Differentialgleichung (7.), da alle diese sämmtliche Integrale der Differentialgleichungen (12.) für die verschiedenen $\alpha$ sind, auch immer wieder ein Integral der Differentialgleichung (8.) sein wird, womit der oben ausgesprochene Satz bewiesen ist.

Um die Richtigkeit des eben besprochenen Satzes zu erweisen, war offenbar nur nöthig vorauszusetzen, dass die Differentialgleichung (7.) *ein* Integral $z_1$ besitzt, welches nicht einer Differentialgleichung niedrigerer Ordnung genügt, dass ferner die Differentialgleichung in Bezug auf $\frac{d^m z}{dx^m}$ für dieses Integral algebraisch irreductibel sei, und dass endlich in Bezug auf ein anderes Integral der Differentialgleichung $z_2$ ebenfalls diese letzte Bedingung der algebraischen Irreductibilität erfüllt sei; es gilt daher auch der folgende Satz, von dem jedoch im Folgenden weitere Anwendungen nicht gemacht werden sollen:

*Hat eine Differentialgleichung*

$$f\left(x,\ y_1,\ y_2,\ \dots\ y_\varrho,\ z,\ \frac{dz}{dx},\ \dots\ \frac{d^m z}{dx^m}\right) = 0$$

*mit einer anderen Differentialgleichung*

$$F\left(x,\ y_1,\ y_2,\ \dots\ y_\varrho,\ z,\ \frac{dz}{dx},\ \dots\ \frac{d^\mu z}{dx^\mu}\right) = 0,$$

*worin $\mu \gtreqless m$ ist, ein Integral gemein, welches nicht zugleich ein Integral einer Differentialgleichung niedrigerer Ordnung als der $m^{ten}$ ist, und ist die erstere Differentialgleichung für das gemeinsame Integral in Bezug auf den $m^{ten}$ Differentialquotienten algebraisch irreductibel, so wird auch jedes andere Integral dieser Differentialgleichung, für welches dieselbe in Bezug auf den $m^{ten}$ Differentialquotienten ebenfalls algebraisch irreductibel ist, ein Integral der letzteren Differentialgleichung sein.*

Als specieller Fall des eben bewiesenen Satzes mag der folgende hervorgehoben werden:

*Wenn eine Differentialgleichung erster Ordnung, welche in Bezug auf den ersten Differentialquotienten vom ersten Grade ist, mit irgend einer anderen Differentialgleichung ein nicht algebraisches Integral gemein hat, so ist jedes Integral der ersteren auch ein Integral der letzteren,*

ein Satz, dessen Gültigkeit auch aus anderen Principien hergeleitet werden kann.

Mit Hülfe der eben angestellten Untersuchungen wird es nun möglich sein, genauer in die Natur der algebraischen Beziehungen einzudringen, welche zwischen den Integralen verschiedener Differentialgleichungen beliebiger Ordnung stattfinden, und es sollen zu diesem Zwecke zwei Sätze bewiesen werden, welche das in meiner oben erwähnten Abhandlung (dieses Journal B. 84) gegebene Theorem als einen ganz speciellen Fall in sich schliessen.

Es seien $\varkappa$ *irreductible* Differentialgleichungen der $m_1, m_2, \dots m_\varkappa^{\text{ten}}$ Ordnung gegeben

$$(16.)\quad \begin{cases} f_1\left(x_1,\ y_{11},\ y_{12},\ \dots\ y_{1\varrho_1},\ z,\ \dfrac{dz}{dx_1},\ \dots\ \dfrac{d^{m_1}z}{dx_1^{m_1}}\right) = 0 \\ f_2\left(x_2,\ y_{21},\ y_{22},\ \dots\ y_{2\varrho_2},\ z,\ \dfrac{dz}{dx_2},\ \dots\ \dfrac{d^{m_2}z}{dx_2^{m_2}}\right) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_\varkappa\left(x_\varkappa,\ y_{\varkappa1},\ y_{\varkappa2},\ \dots\ y_{\varkappa\varrho_\varkappa},\ z,\ \dfrac{dz}{dx_\varkappa},\ \dots\ \dfrac{d^{m_\varkappa}z}{dx_\varkappa^{m_\varkappa}}\right) = 0, \end{cases}$$

in denen

$$x_1,\quad x_2,\quad \dots\quad x_\varkappa$$

von einander unabhängige Variable bedeuten, und

$$y_{\sigma1},\quad y_{\sigma2},\quad \dots\quad y_{\sigma\varrho_\sigma}$$

verschiedene irreductible algebraische Functionen der resp. Veränderlichen $x_\sigma$ vorstellen sollen; seien ferner $\lambda$ Differentialgleichungen der $n_1, n_2, \dots n_\lambda^{\text{ten}}$ Ordnung vorgelegt

$$(17.)\quad \begin{cases} F_1\left(x_{\varkappa+1},\ y_{\varkappa+11},\ y_{\varkappa+12},\ \dots\ y_{\varkappa+1\varrho_{\varkappa+1}},\ z,\ \dfrac{dz}{dx_{\varkappa+1}},\ \dots\ \dfrac{d^{n_1}z}{dx_{\varkappa+1}^{n_1}}\right) = 0 \\ F_2\left(x_{\varkappa+2},\ y_{\varkappa+21},\ y_{\varkappa+22},\ \dots\ y_{\varkappa+2\varrho_{\varkappa+2}},\ z,\ \dfrac{dz}{dx_{\varkappa+2}},\ \dots\ \dfrac{d^{n_2}z}{dx_{\varkappa+2}^{n_2}}\right) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_\lambda\left(x_{\varkappa+\lambda},\ y_{\varkappa+\lambda1},\ y_{\varkappa+\lambda2},\ \dots\ y_{\varkappa+\lambda\varrho_{\varkappa+\lambda}},\ z,\ \dfrac{dz}{dx_{\varkappa+\lambda}},\ \dots\ \dfrac{d^{n_\lambda}z}{dx_{\varkappa+\lambda}^{n_\lambda}}\right) = 0, \end{cases}$$

deren unabhängige Variable

$$x_{\varkappa+1},\quad x_{\varkappa+2},\quad \dots\quad x_{\varkappa+\lambda}$$

mit den unabhängigen Variablen des Systems (16.) durch die algebraischen Beziehungen

$$(18.)\quad \begin{cases} \varphi_1(x_{\varkappa+1},\ x_1,\ x_2,\ \dots\ x_\varkappa) = 0 \\ \varphi_2(x_{\varkappa+2},\ x_1,\ x_2,\ \dots\ x_\varkappa) = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varphi_\lambda(x_{\varkappa+\lambda},\ x_1,\ x_2,\ \dots\ x_\varkappa) = 0 \end{cases}$$

verbunden sein mögen, während die Grössen

$$y_{\varkappa+\sigma 1},\quad y_{\varkappa+\sigma 2},\quad \dots\quad y_{\varkappa+\sigma\varrho_{\varkappa+\sigma}}$$

wieder irreductible algebraische Functionen von $x_{\varkappa+\sigma}$ bedeuten sollen; bezeichnen endlich

$$(a.)\qquad z_1,\quad z_2,\quad \dots\quad z_\varkappa,\quad z_{\varkappa+1},\quad z_{\varkappa+2},\quad \dots\quad z_{\varkappa+\lambda}$$

eine Reihe bestimmter particulärer Integrale der resp. Differentialgleichungen (16.) und (17.), zwischen denen die Existenz einer algebraischen Beziehung

$$(19.)\qquad F(z_1,\ z_2,\ \dots\ z_\varkappa,\ z_{\varkappa+1},\ z_{\varkappa+2},\ \dots\ z_{\varkappa+\lambda}) = 0$$

angenommen wird, in welche auch die Variabeln und die den einzelnen Differentialgleichungen angehörigen algebraischen Irrationalitäten eintreten dürfen, so soll die Unveränderlichkeit der algebraischen Beziehung (19.) erwiesen werden, wenn statt des Systems particulärer Integrale (*a.*) ein anderes System von particulären Integralen der Differentialgleichungen (16.) und (17.) gesetzt wird; es mag im Folgenden der kürzeren Schreibweise wegen stets die Reihe der algebraischen Irrationalitäten $y_{\sigma 1},\ y_{\sigma 2},\ \dots\ y_{\sigma\varrho_\sigma}$ durch den einen Repräsentanten $y_\sigma$ dargestellt werden.

Greifen wir die erste der Differentialgleichungen (16.) heraus

$$(20.)\qquad f_1\left(x_1,\ y_1,\ z,\ \frac{dz}{dx_1},\ \frac{d^2z}{dx_1^2},\ \dots\ \frac{d^{m_1}z}{dx_1^{m_1}}\right) = 0$$

und formen die Differentialgleichungen (17.) derart um, dass wir, indem $x_2,\ x_3,\ \dots\ x_\varkappa$ als Parameter betrachtet werden, in die Gleichung

$$F_\varrho\left(x_{\varkappa+\varrho},\ y_{\varkappa+\varrho},\ z,\ \frac{dz}{dx_{\varkappa+\varrho}},\ \frac{d^2z}{dx_{\varkappa+\varrho}^2},\ \dots\ \frac{d^{n_\varrho}z}{dx_{\varkappa+\varrho}^{n_\varrho}}\right) = 0$$

die Werthe

$$(b.)\qquad \frac{dz}{dx_{\varkappa+\varrho}} = \frac{dz}{dx_1}\frac{1}{\frac{dx_{\varkappa+\varrho}}{dx_1}},\quad \frac{d^2z}{dx_{\varkappa+\varrho}^2} = \frac{d^2z}{dx_1^2}\frac{1}{\left(\frac{dx_{\varkappa+\varrho}}{dx_1}\right)^2} - \frac{dz}{dx_1}\frac{1}{\left(\frac{dx_{\varkappa+\varrho}}{dx_1}\right)^3}\frac{d^2x_{\varkappa+\varrho}}{dx_1^2}$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

einsetzen und zwischen der so erhaltenen Gleichung, der Gleichung

$$\varphi_\varrho(x_{\varkappa+\varrho},\ x_1,\ x_2,\ \dots\ x_n) = 0$$

und den zwischen $x_{\varkappa+\varrho}$ und $y_{\varkappa+\varrho}$ angenommenen algebraischen Gleichungen die Grössen $x_{\varkappa+\varrho}$ und $y_{\varkappa+\varrho}$ eliminiren; auf diese Weise mögen sich statt der Gleichungen (17.), wenn man noch eine Zerlegung der Eliminationsresultate durch Hinzunahme der zu $x_1$ gehörigen algebraischen Irrationalitäten zulässt, die folgenden Gleichungen ergeben

$$(21.)\quad \begin{cases} \mathfrak{F}_1\left(x_1,\ y_1,\ z,\ \frac{dz}{dx_1},\ \frac{d^2z}{dx_1^2},\ \dots\ \frac{d^{n_1}z}{dx_1^{n_1}}\right) = 0 \\ \mathfrak{F}_2\left(x_1,\ y_1,\ z,\ \frac{dz}{dx_1},\ \frac{d^2z}{dx_1^2},\ \dots\ \frac{d^{n_2}z}{dx_1^{n_2}}\right) = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \mathfrak{F}_\lambda\left(x_1,\ y_1,\ z,\ \frac{dz}{dx_1},\ \frac{d^2z}{dx_1^2},\ \dots\ \frac{d^{n_\lambda}z}{dx_1^{n_\lambda}}\right) = 0, \end{cases}$$

die zu Lösungen die particulären Integrale

$$z_{\varkappa+1},\quad z_{\varkappa+2},\quad \dots\quad z_{\varkappa+\lambda}$$

haben, wenn diese mit Hülfe der Gleichungen (18.) als Functionen von $x_1$ definirt werden, und die Grössen $x_2,\ x_3,\ \dots\ x_\varkappa$ als Parameter enthalten.

Nimmt man jetzt die unabhängige Variable $x_1$ und die zugehörigen Irrationalitäten $y_{11},\ y_{12},\ \dots\ y_{1\varrho_1}$, die wieder durch $y_1$ repräsentirt werden sollen, in die linke Seite der Gleichung (19.) auf, während man $z_2,\ z_3,\ \dots\ z_\varkappa$ fortlässt, und stellt dieselbe mit den Gleichungen (21.), wenn darin ihre Integrale substituirt sind, zusammen, so erhält man

$$(22.)\quad \begin{cases} F(x_1,\ y_1,\ z_1,\ z_{\varkappa+1},\ z_{\varkappa+2},\ \dots\ z_{\varkappa+\lambda}) = 0 \\ \mathfrak{F}_1\left(x_1,\ y_1,\ z_{\varkappa+1},\ \frac{dz_{\varkappa+1}}{dx_1},\ \dots\ \frac{d^{n_1}z_{\varkappa+1}}{dx_1^{n_1}}\right) = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \mathfrak{F}_\lambda\left(x_1,\ y_1,\ z_{\varkappa+\lambda},\ \frac{dz_{\varkappa+\lambda}}{dx_1},\ \dots\ \frac{d^{n_\lambda}z_{\varkappa+\lambda}}{dx_1^{n_\lambda}}\right) = 0. \end{cases}$$

Differentiirt man jede dieser Gleichungen

$$n_1 + n_2 + \dots + n_\lambda\text{-mal}$$

nach $x_1$, so erhält man mit Einschluss der Gleichungen (22.)

$$(\lambda+1)(n_1+n_2+\dots+n_\lambda+1)$$

Gleichungen, aus denen die Grössen

$$(c.)\quad \begin{cases} z_{\varkappa+1},\quad \frac{dz_{\varkappa+1}}{dx_1},\quad \frac{d^2z_{\varkappa+1}}{dx_1^2},\quad \dots\quad \frac{d^{2n_1+n_2+\dots+n_\lambda}z_{\varkappa+1}}{dx_1^{2n_1+n_2+\dots+n_\lambda}} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ z_{\varkappa+\lambda},\quad \frac{dz_{\varkappa+\lambda}}{dx_1},\quad \frac{d^2z_{\varkappa+\lambda}}{dx_1^2},\quad \dots\quad \frac{d^{n_1+n_2+\dots+2n_\lambda}z_{\varkappa+\lambda}}{dx_1^{n_1+n_2+\dots+2n_\lambda}}, \end{cases}$$

deren Anzahl

$$(\lambda+1)(n_1+n_2+\cdots+n_\lambda+1)-1$$

ist, eliminirt werden können, und das Eliminationsresultat hat die Form

$$(23.)\qquad \Phi\left(x_1,\, y_1,\, z_1,\, \frac{dz_1}{dx_1},\, \frac{d^2 z_1}{dx_1^2},\, \ldots\, \frac{d^{n_1+n_2+\cdots+n_\lambda} z_1}{dx_1^{n_1+n_2+\cdots+n_\lambda}}\right) = 0,$$

in welches ebenfalls, wie in die früheren Gleichungen, die Grössen $x_2, x_3, \ldots x_\varkappa$, $z_2, z_3, \ldots z_\varkappa$ als Parameter eintreten.

Ist nun die Ordnung $n_1+n_2+\cdots+n_\lambda$ der Differentialgleichung (23.) kleiner als die Ordnung $m_1$ der als irreductibel vorausgesetzten Differentialgleichung (20.) oder gleich $m_1$, aber in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten von einem niedrigeren Grade, dann würde ein Integral $z_1$ der Differentialgleichung (20.) zugleich ein Integral einer Differentialgleichung von niedrigerer Ordnung oder von derselben Ordnung aber niedrigerem Grade sein, was der Annahme der Irreductibilität widerspricht, und es folgt somit in diesem Falle, dass die Gleichung (23.) eine in $z_1$ und den Ableitungen dieser Grösse identische Gleichung sein muss; wäre jedoch $n_1+n_2+\cdots+n_\lambda$ entweder gleich $m_1$ und der Grad in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten ein höherer, oder grösser als $m_1$, dann müssten nach dem oben bewiesenen Satze alle Integrale der Gleichung (20.) auch Integrale der Differentialgleichung (23.) sein, und wir dürfen somit in allen Fällen annehmen, dass das Eliminationsresultat (23.) durch alle Integrale der irreductibeln Differentialgleichung (20.) befriedigt wird. Bemerkt man nun, dass die durch Differentiation der ersten der Gleichungen (22.) hergeleiteten Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dx_1} + \frac{\partial F}{\partial z_{\varkappa+1}}\frac{dz_{\varkappa+1}}{dx_1} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial z_{\varkappa+\lambda}}\frac{dz_{\varkappa+\lambda}}{dx_1} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \frac{\partial F}{\partial z_1}\frac{d^2 z_1}{dx_1^2} + \frac{\partial F}{\partial z_{\varkappa+1}}\frac{d^2 z_{\varkappa+1}}{dx_1^2} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial z_{\varkappa+\lambda}}\frac{d^2 z_{\varkappa+\lambda}}{dx_1^2} + \cdots = 0$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

in Bezug auf die zu eliminirenden Grössen von einander unabhängig sind, weil die Differentialquotienten

$$\frac{\partial F}{\partial z_{\varkappa+1}},\quad \frac{\partial F}{\partial z_{\varkappa+2}},\quad \ldots\quad \frac{\partial F}{\partial z_{\varkappa+\lambda}}$$

sämmtlich nicht verschwinden, erwägt man ferner, dass die durch Differentiation aus den $\lambda$ anderen Gleichungen des Systems (22.) abgeleiteten

Gleichungen für die in Betracht kommenden Grössen in keiner Abhängigkeit zu einander stehen, weil ihre Form durch

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_\varrho}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathfrak{F}_\varrho}{\partial z_{\varkappa+\varrho}} \frac{dz_{\varkappa+\varrho}}{dx_1} + \frac{\partial \mathfrak{F}_\varrho}{\partial\left(\frac{dz_{\varkappa+\varrho}}{dx_1}\right)} \frac{d^2 z_{\varkappa+\varrho}}{dx_1^2} + \cdots + \frac{\partial \mathfrak{F}_\varrho}{\partial\left(\frac{d^{n_\varrho} z_{\varkappa+\varrho}}{dx_1^{n_\varrho}}\right)} \frac{d^{n_\varrho+1} z_{\varkappa+\varrho}}{dx_1^{n_\varrho+1}} = 0$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

gegeben und

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_\varrho}{\partial\left(\frac{d^{n_\varrho} z_{\varkappa+\varrho}}{dx_1^{n_\varrho}}\right)}$$

von Null verschieden ist, so folgt, dass, weil das Eliminationsresultat für alle Integrale der irreductibeln Differentialgleichung (20.) befriedigt wird, auch das System (22.) zu gleicher Zeit für jeden dieser Integralwerthe bestehen wird, oder dass zu jedem Integrale $z_1$ der Gleichung (20.) und dessen Ableitungen ein System von Werthen für

$$z_{\varkappa+1}, \quad z_{\varkappa+2}, \quad \ldots \quad z_{\varkappa+\lambda}$$

und für deren Differentialquotienten, soweit sie in dem Grössensysteme (*c.*) vorkommen, existirt, welche den Gleichungen (22.) und den durch successive Differentiation aus diesen abgeleiteten genügen. Da sich nun für jedes Integral $z_1$ der Gleichung (23.) bekanntlich die Grössen $z_{\varkappa+1}, \ldots z_{\varkappa+\lambda}$ sowie deren Ableitungen nach $x_1$ genommen als Unbekannte des Gleichungssystems im Allgemeinen rational, jedenfalls algebraisch durch die Coefficienten des Systems also durch

$$x_1, \quad y_1, \quad z_1, \quad \frac{dz_1}{dx_1}, \quad \frac{d^2 z_1}{dx_1^2}, \quad \ldots \quad \frac{d^{n_1+n_2+\cdots+n_\lambda} z_1}{dx_1^{n_1+n_2+\cdots+n_\lambda}}$$

ausdrücken lassen, so mag

$$(24.) \qquad z_{\varkappa+1} = \chi\left(x_1, y_1, z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \ldots \frac{d^{n_1+n_2+\cdots+n_\lambda} z_1}{dx_1^{n_1+n_2+\cdots+n_\lambda}}\right),$$

$$(25.) \qquad \frac{dz_{\varkappa+1}}{dx_1} = \chi_1\left(x_1, y_1, z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \ldots \frac{d^{n_1+n_2+\cdots+n_\lambda} z_1}{dx_1^{n_1+n_2+\cdots+n_\lambda}}\right)$$

u. s. w. gesetzt werden, worin $\chi$, $\chi_1$, ... algebraische Functionen bezeichnen, die für die der Gleichung (19.) angehörigen Integralwerthe in der Beziehung stehen:

$$(26.) \qquad \chi_1\left(x_1, y_1, z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \frac{d^2 z_1}{dx_1^2}, \ldots\right) = \frac{d\chi\left(x_1, y_1, z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \frac{d^2 z_1}{dx_1^2}, \ldots\right)}{dx_1},$$

u. s. w.

Nun wird für einen willkürlichen anderen Werth von $z_1$ und dessen Ableitungen

$$z'_1,\quad \frac{dz'_1}{dx_1},\quad \frac{d^2z'_1}{dx_1^2},\quad \dots \quad \frac{d^{n_1+n_2+\dots+n_\lambda}z'_1}{dx_1^{n_1+n_2+\dots+n_\lambda}}$$

aus der Elimination ein anderes System von Unbekannten entspringen:

$$\begin{array}{cccc}
z'_{\varkappa+1}, & z'_{\varkappa+2}, & \dots & z'_{\varkappa+\lambda}, \\
\left(\frac{dz'_{\varkappa+1}}{dx_1}\right), & \left(\frac{d^2z'_{\varkappa+1}}{dx_1^2}\right), & \dots & \left(\frac{d^{2n_1+n_2+\dots+n_\lambda}z'_{\varkappa+1}}{dx_1^{2n_1+n_2+\dots+n_\lambda}}\right) \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\left(\frac{dz'_{\varkappa+\lambda}}{dx_1}\right), & \left(\frac{d^2z'_{\varkappa+\lambda}}{dx_1^2}\right), & \dots & \left(\frac{d^{n_1+n_2+\dots+2n_\lambda}z'_{\varkappa+1}}{dx_1^{n_1+n_2+\dots+2n_\lambda}}\right),
\end{array}$$

worin die Klammern anzeigen sollen, dass die Ausdrücke selbst noch nicht etwa in der durch die Zeichen angedeuteten Differentialbeziehung zu stehen brauchen, und zwar werden sie durch die Beziehungen gegeben sein:

$$z'_{\varkappa+1} = \chi\left(x_1, y_1, z'_1, \frac{dz'_1}{dx_1}, \dots \frac{d^{n_1+n_2+\dots+n_\lambda}z'_1}{dx_1^{n_1+n_2+\dots+n_\lambda}}\right),$$

$$\left(\frac{dz'_{\varkappa+1}}{dx_1}\right) = \chi_1\left(x_1, y_1, z'_1, \frac{dz'_1}{dx_1}, \dots \frac{d^{n_1+n_2+\dots+n_\lambda}z'_1}{dx_1^{n_1+n_2+\dots+n_\lambda}}\right),$$

u. s. w., da die Ausdrücke sich nur aus der algebraischen Elimination ergeben unabhängig von der ursprünglichen Herleitung der Gleichungen aus einander durch successive Differentiation. Da aber die Gleichung (26.) wieder eine algebraische Differentialgleichung in $z_1$ und $x_1$ ist und zwar von der Ordnung $n_1+n_2+\dots+n_\lambda+1$, so wird wegen der vorausgesetzten Irreductibilität der Differentialgleichung (20.) nach dem oben bewiesenen Satze die Gleichung (26.) durch jedes Integral der Differentialgleichung (20.) und die dazu gehörigen Differentialquotienten befriedigt werden, und somit nach den obigen Beziehungen

$$\left(\frac{dz'_{\varkappa+1}}{dx_1}\right) = \frac{dz'_{\varkappa+1}}{dx_1}$$

sein und ähnliches für die höheren Differentialquotienten, so dass für alle diejenigen Werthe von $z_1$, welche Integrale der Differentialgleichung (20.) sind, die sich aus der algebraischen Elimination ergebenden Werthe auch in der verlangten Differentialbeziehung zu einander stehen, also die auf diese Weise hervorgehenden Werthe von $z_{\varkappa+1}, z_{\varkappa+2}, \dots z_{\varkappa+\lambda}$ auch den $\lambda$ Differentialgleichungen (22.) genügen und daher Integrale dieser Diffe-

rentialgleichungen sein werden — es entspricht somit in der algebraischen Relation

$$F(x_1, y_1, z_1, z_{\varkappa+1}, z_{\varkappa+2}, \dots z_{\varkappa+\lambda}) = 0$$

jedem andern Integralwerthe $z_1$ der Differentialgleichung (20.) ein anderes System von Integralwerthen der Differentialgleichungen (21.), wobei stets $x_2, \dots x_\varkappa, z_2, \dots z_\varkappa$ als Parameter betrachtet werden.

Lässt man nunmehr in der so veränderten algebraischen Beziehung

$$F(z_1', z_2, \dots z_\varkappa, z_{\varkappa+1}', z_{\varkappa+2}', \dots z_{\varkappa+\lambda}') = 0$$

$z_2$ ein anderes particuläres Integral der resp. irreductiblen Differentialgleichung (16.) bedeuten, indem man $z_1', z_3, \dots z_\varkappa$ als Parameter betrachtet und unverändert lässt, so wird man aus denselben Gründen mit Beibehaltung derselben algebraischen Relation ein anderes System von Integralen der den Gleichungen (21.) analogen Differentialgleichungen, d. h. der Differentialgleichungen (17.) zu setzen haben, u. s. w. Wir dürfen somit in der Gleichung (19.) für $z_1, z_2, \dots z_\varkappa$ beliebige andere particuläre Integrale der Differentialgleichungen (16.) setzen; es wird die Existenz der algebraischen Relation (19.) aufrecht erhalten, wenn man nur für $z_{\varkappa+1}, z_{\varkappa+2}, \dots z_{\varkappa+\lambda}$ ein bestimmtes anderes System particulärer Integrale der Differentialgleichungen (17.) substituirt.

Wir erhalten daher den folgenden Satz:

*Besteht zwischen den Integralen der irreductiblen Differentialgleichungen* (16.) *und den Integralen der Differentialgleichungen* (17.), *deren unabhängige Variabeln zu den unabhängigen Variabeln des ersteren Systems in algebraischer Beziehung stehen, eine algebraische Gleichung, welche auch die Variabeln und die in den Differentialgleichungen vorkommenden algebraischen Irrationalitäten einschliessen darf, so wird die zwischen den Integralen angenommene Beziehung erhalten bleiben, wenn man statt der Integrale der irreductibeln Differentialgleichungen beliebige andere particuläre Integrale dieser setzt und statt der übrigen Integrale ein passendes System von Integralen der zugehörigen übrigen Differentialgleichungen substituirt.*

Ich schliesse hieran einen zweiten Satz, der nachher in einem speciellen Falle benutzt werden soll.

Seien wiederum die Differentialgleichungssysteme (16.) und (17.) vorgelegt, und werde ferner eine algebraische Beziehung von der Form der Gleichung (19.) zwischen den Integralen dieser Differentialgleichungen

vorausgesetzt. lassen wir jedoch die Voraussetzung der Irreductibilität für das erstere System fallen und nehmen dafür an, dass die Differentialgleichungen des zweiten Systems nicht nur irreductibel sind, sondern dass auch nicht zwischen $z_{\varkappa+1}, z_{\varkappa+2}, \dots z_{\varkappa+\lambda}$, d. h. den in die algebraische Relation eintretenden Integralen dieses Systems und deren Ableitungen bis zur resp. $n_1-1, n_2-1, \dots (n_\lambda-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, eine algebraische Relation bestehe, dann werden wir die nachstehenden Folgerungen ableiten können: Denken wir uns zunächst wieder die nicht von $x_1$ abhängigen Grössen als Parameter aufgefasst und stellen die beiden Gleichungen

$$(27.)\qquad F(x_1, y_1, z_1, z_{\varkappa+1}, \dots z_{\varkappa+\lambda}) = 0$$

und

$$(28.)\qquad f_1\left(x_1, y_1, z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \dots \frac{d^{m_1}z_1}{dx_1^{m_1}}\right) = 0$$

zusammen, so kann man durch $m_1$-malige successive Differentiation der Gleichung (27.) nach $x_1$ aus den so entstehenden $m_1+1$ Gleichungen und der Gleichung (28.) die Grössen

$$z_1, \quad \frac{dz_1}{dx_1}, \quad \frac{d^2z_1}{dx_1^2}, \quad \dots \quad \frac{d^{m_1}z_1}{dx_1^{m_1}}$$

eliminiren und somit eine Gleichung herleiten von der Form:

$$(29.)\qquad \varphi\left(x_1, y_1, z_{\varkappa+1}, \dots z_{\varkappa+\lambda}, \frac{dz_{\varkappa+1}}{dx_1}, \dots \frac{dz_{\varkappa+\lambda}}{dx_1}, \dots \frac{d^{m_1}z_{\varkappa+1}}{dx_1^{m_1}}, \dots \frac{d^{m_1}z_{\varkappa+\lambda}}{dx_1^{m_1}}\right) = 0,$$

in welcher wir auch die nach $x_1$ genommenen Differentialquotienten vermöge der Formeln (*b.*) des vorigen Satzes durch die resp. nach $x_{\varkappa+1}, \dots x_{\varkappa+\lambda}$ genommenen ersetzt denken können.

Aber dieses Eliminationsresultat können wir noch auf eine andere Form bringen; bezeichnet man nämlich die Auflösungen der in Bezug auf $z_1$ als irreductibel vorausgesetzten Gleichung (27.) durch

$$(d.)\qquad z_1 = \psi_1(x_1, y_1, z_{\varkappa+1}, \dots z_{\varkappa+\lambda}), \quad \dots \quad z_1 = \psi_\varrho(x_1, y_1, z_{\varkappa+1}, \dots z_{\varkappa+\lambda}),$$

wenn $\varrho$ den Grad der Gleichung in Bezug auf diese Grösse angiebt, und setzt diese Werthe sowie deren Differentialquotienten

$$\frac{dz_1}{dx_1} = \frac{d\psi_1}{dx_1}, \quad \dots \quad \frac{dz_1}{dx_1} = \frac{d\psi_\varrho}{dx_1}, \quad \dots$$

in die Differentialgleichung (28.) ein, so erhält man für das vorher entwickelte Eliminationsresultat auch die folgende Form:

$$(30.)\qquad f_1\left(x_1, y_1, \psi_1, \frac{d\psi_1}{dx_1}, \dots \frac{d^{m_1}\psi_1}{dx_1^{m_1}}\right) \dots f_1\left(x_1, y_1, \psi_\varrho, \frac{d\psi_\varrho}{dx_1}, \dots \frac{d^{m_1}\psi_\varrho}{dx_1^{m_1}}\right) = 0,$$

in welcher die Integrale $z_{\varkappa+1}, \dots z_{\varkappa+\lambda}$ und deren Differentialquotienten nach $x_1$ oder auch nach den Variabeln $x_{\varkappa+1}, \dots x_{\varkappa+\lambda}$ genommen bis zur $m_1^{\text{ten}}$ Ordnung hin vorkommen.

Sind nun die Zahlen $n_1, n_2, \dots n_\lambda \leqq m_1$, so wird man aus den Gleichungen (17.) die Differentialquotienten, welche von der $n_1, n_2, \dots n_\lambda^{\text{ten}}$ oder einer höheren Ordnung sind, durch diejenigen, welche höchstens die $n_1-1, n_2-1, \dots (n_\lambda-1)^{\text{te}}$ Ordnung erreichen, algebraisch in der Form

$$(31.)\quad \begin{cases} \dfrac{d^{n_1} z_{\varkappa+1}}{dx_{\varkappa+1}^{n_1}} = \chi_1^{(\varrho_1)}\left(z_{\varkappa+1}, \dfrac{dz_{\varkappa+1}}{dx_{\varkappa+1}}, \dots \dfrac{d^{n_1-1} z_{\varkappa+1}}{dx_{\varkappa+1}^{n_1-1}}\right), \quad \dots \\ \dfrac{d^{n_\lambda} z_{\varkappa+\lambda}}{dx_{\varkappa+\lambda}^{n_\lambda}} = \chi_\lambda^{(\varrho_\lambda)}\left(z_{\varkappa+\lambda}, \dfrac{dz_{\varkappa+\lambda}}{dx_{\varkappa+\lambda}}, \dots \dfrac{d^{n_\lambda-1} z_{\varkappa+\lambda}}{dx_{\varkappa+\lambda}^{n_\lambda-1}}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

ausdrücken, in (29.) oder, was dasselbe ist, in (30.) einsetzen und das Product über die $\varrho_a$ genommen bilden, wodurch diese Gleichung in eine algebraische Beziehung zwischen $z_{\varkappa+1}, \dots z_{\varkappa+\lambda}$ und deren Ableitungen bis zur $n_1-1, n_2-1, \dots (n_\lambda-1)^{\text{ten}}$ Ordnung übergeht, welche, da die Annahme der Nichtexistenz einer solchen Beziehung gemacht war, eine identische sein, d. h. für jede Werthecombination von $z_{\varkappa+1}, \dots z_{\varkappa+\lambda}$ und deren Ableitungen befriedigt werden muss.

Setzt man nun für $z_{\varkappa+1}, \dots z_{\varkappa+\lambda}$ irgend ein System von particulären Integralen der Differentialgleichungen (17.), so wird vermöge der Annahme der Irreductibilität derselben die aus (29.) oder (30.) hergeleitete Gleichung durch eben diese Werthe befriedigt werden, oder es wird der Gleichung (28.) genügt werden, wenn man $z_1$ aus einer der Gleichungen (*d*.) bestimmt; zu dem beliebigen Systeme particulärer Integrale der Gleichungen (17.) gehört somit ein particuläres Integral der Gleichung (28.), welches mit jenen willkürlich gewählten Integralen in derselben algebraischen Beziehung (27.) steht.

Es folgt somit der nachstehende Satz:

***Besteht zwischen einem Systeme particulärer Integrale der Differentialgleichungen*** (16.) ***und*** (17.) ***eine algebraische Relation und sind die Differentialgleichungen des Systems*** (17.) ***irreductibel, besteht endlich zwischen den in die algebraische Relation eintretenden Integralen des zweiten Systems und den Ableitungen derselben bis zur resp.*** $n_1-1, n_2-1, \dots (n_\lambda-1)^{\text{ten}}$ ***Ordnung keine algebraische Beziehung, wobei*** $x_2, \dots x_\varkappa$ ***als Parameter betrachtet werden sollen, so wird die algebraische Beziehung erhalten bleiben, wenn man für*** $z_{\varkappa+1}, \dots z_{\varkappa+\lambda}$ ***ein beliebiges System anderer particulärer Integrale der***

*Differentialgleichungen* (17.) *setzt, wenn man nur für* $z_1$ *ein passendes particuläres Integral der Differentialgleichung* (16.) *substituirt.*

Als specieller Fall dieses Satzes kann derjenige hervorgehoben werden, für welchen das System der Differentialgleichungen (17.) aus irreductiblen Differentialgleichungen erster Ordnung besteht, wenn die Annahme gemacht wird, dass nicht schon zwischen den abhängigen Integralen eine algebraische Beziehung existirt — man erhält dann den Satz, den ich in meiner oben erwähnten Arbeit bewiesen und aus dem ich dort eine Reihe von Folgerungen über algebraische Relationen zwischen *Abel*schen Integralen und den Umkehrungsfunctionen derselben hergeleitet habe.

Die vorher bewiesenen allgemeinen Sätze mögen für den Fall specialisirt werden, dass die Differentialgleichungen (16.) und (17.) ein und dieselbe Differentialgleichung vorstellen, deren particuläre Integrale für die Variabeln $x_1, x_2, \dots x_\varkappa, x_{\varkappa+1}, x_{\varkappa+2}, \dots x_{\varkappa+\lambda}$, welche wiederum durch die Gleichungen (18.) algebraisch mit einander verbunden sind, in Betracht kommen, und wir erhalten sodann die beiden folgenden Sätze:

*Besteht zwischen* $\varkappa+\lambda$ *particulären Integralen einer irreductiblen Differentialgleichung* $m^{ter}$ *Ordnung*

$$f\left(x, y_1, y_2, \dots y_\varrho, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \dots \frac{d^mz}{dx^m}\right) = 0,$$

*in welcher* $y_1, y_2, \dots y_\varrho$ *irreductible algebraische Functionen von* $x$ *bedeuten, für die* $\varkappa$ *unabhängigen Variabeln* $x_1, x_2, \dots x_\varkappa$ *und die algebraisch davon abhängigen Variabeln* $x_{\varkappa+1}, x_{\varkappa+2}, \dots x_{\varkappa+\lambda}$ *eine algebraische Beziehung*

$$F(z_1, z_2, \dots z_\varkappa, z_{\varkappa+1}, \dots z_{\varkappa+\lambda}) = 0,$$

*in welche auch die Variabeln und die in der Differentialgleichung vorkommenden algebraischen Irrationalitäten eintreten dürfen, so wird diese algebraische Beziehung erhalten bleiben, wenn man statt der Integrale* $z_1, z_2, \dots z_\varkappa$ *beliebige andere particuläre Integrale derselben unabhängigen Variabeln, für die Integrale* $z_{\varkappa+1}, z_{\varkappa+2}, \dots z_{\varkappa+\lambda}$ *aber bestimmte andere particuläre Integrale derselben abhängigen Variabeln substituirt;*

und ferner:

*Ist eine Differentialgleichung* $m^{ter}$ *Ordnung irreductibel, und besteht ausserdem keine algebraische Beziehung zwischen den abhängigen Integralen* $z_{\varkappa+1}, \dots z_{\varkappa+\lambda}$ *und deren Ableitungen, sofern dieselben sich nur bis zur* $(m-1)^{ten}$ *Ordnung erstrecken, so wird eine algebraische Relation zwischen den Variabeln und allen diesen Integralen* $z_1, \dots z_\varkappa, z_{\varkappa+1}, \dots z_{\varkappa+\lambda}$ *noch bestehen bleiben, wenn*

***man für $z_{\varkappa+1}, \dots z_{\varkappa+\lambda}$ ein beliebiges System anderer particulärer Integrale der abhängigen Variabeln setzt, dagegen für eines der particulären Integrale $z_1, z_2, \dots z_\varkappa$ der unabhängigen Variabeln ein passendes Integral der zugehörigen Differentialgleichung substituirt.***

Zu den beiden eben ausgesprochenen Sätzen mag noch bemerkt werden, dass die in der angenommenen algebraischen Beziehung vorkommenden Integrale der Differentialgleichung $m^{\text{ter}}$ Ordnung dasselbe particuläre Integral dieser Differentialgleichung für die unabhängigen und abhängigen Variabeln genommen bedeuten können, und in dieser Form werden diese Sätze zur Ermittelung des *Abel*schen Theorems für die Integrale von Differentialgleichungen gebraucht werden.

Bevor wir jedoch dazu übergehen, soll an einigen Beispielen gezeigt werden, wie man diese Sätze benutzen kann, um zu entscheiden, ob eine Differentialgleichung irreductibel ist oder nicht.

Wir untersuchen zuerst die Differentialgleichung

$$(32.)\qquad \frac{d^2z}{dx^2} = f(x, y),$$

in welcher $y$ eine irreductible algebraische Function, $f$ eine rationale Function bedeutet, und suchen die Bedingungen aufzustellen, denen $f(x, y)$ unterliegen muss, damit ein Integral der Differentialgleichung (32.) zugleich einer Differentialgleichung erster Ordnung

$$(33.)\qquad F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}\right) = 0$$

Genüge leistet, die vorgelegte Differentialgleichung zweiter Ordnung also reductibel ist — und zwar wollen wir zur Entscheidung dieser Frage uns nicht eines der speciellen Form dieser Differentialgleichung angepassten Kunstgriffes bedienen, sondern nach einer den obigen Sätzen entnommenen allgemeinen Methode verfahren.

Setzen wir zur Abkürzung

$$(34.)\qquad \int f(x, y)\,dx = J, \quad \int J\,dx = E,$$

so dass die Integrale der Gleichung (32.) durch

$$(35.)\qquad \frac{dz}{dx} = J + c, \quad z = E + cx + c_1$$

dargestellt sind, so würde die Gleichung (33.) übergehen in eine algebraische

Beziehung zwischen $J$ und $E$ von der Form

$$(36.)\quad \varphi(x, y, J, E) = 0 \quad \text{oder} \quad E = \psi(J).$$

Betrachtet man diese Relation als eine zwischen zwei particulären Integralen der Differentialgleichungen

$$\frac{dz}{dx} = f(x, y), \quad \frac{d^2z}{dx^2} = f(x, y)$$

bestehende, von denen die erste als irreductibel bezeichnet werden darf, wenn wir annehmen, dass $J$ nicht selbst eine algebraische Function ist, so wird nach den oben bewiesenen Sätzen ausser (36.) noch die Beziehung

$$(37.)\quad E + mx + m_1 = \psi(J+\mu)$$

gelten, in welcher $\mu$ eine willkürliche, $m$ und $m_1$ von $\mu$ abhängige Constanten bedeuten, oder

$$(38.)\quad \psi(J+\mu) = \psi(J) + mx + m_1.$$

Da aber diese Gleichung eine identische sein muss, weil sonst $J$ selbst eine algebraische Function wäre, welcher Fall oben ausgeschlossen war, so darf man $J = 0$ setzen und erhält

$$mx + m_1 = \psi(\mu) - \psi(0),$$

also

$$\psi(J+\mu) = \psi(J) + \psi(\mu) - \psi(0),$$

aus welcher Functionalgleichung durch Differentiation nach $J$ und $\mu$ folgt

$$\psi'(J+\mu) = \psi'(J), \quad \psi'(J+\mu) = \psi'(\mu)$$

oder

$$\psi'(J) = \psi'(\mu)$$

und somit

$$\psi(J) = aJ + b,$$

worin $a$ und $b$ im Allgemeinen noch algebraische Functionen von $x$ und $y$ sein werden; setzt man diesen Werth in (38.) ein, so folgt

$$aJ + a\mu + b = aJ + b + mx + m_1,$$

also

$$a = \frac{m}{\mu} x + \frac{m_1}{\mu},$$

und daher

$$(39.)\quad \psi(J) = (\alpha x + \alpha_1) J + \beta,$$

worin $\alpha$ und $\alpha_1$ Constanten, $\beta$ eine algebraische Function von $x$ sein wird;

für den Fall der Reductibilität der Differentialgleichung (32.) müsste also die Beziehung bestehen:

$$(40.) \qquad E = (\alpha x + \alpha_1) J + \beta.$$

Da nun $E$ und $J$ den Differentialgleichungen

$$\frac{dE}{dx} = J, \quad \frac{dJ}{dx} = f(x, y)$$

genügen, so wird nach (40.)

$$(\alpha x + \alpha_1) f(x, y) + \alpha J + \frac{d\beta}{dx} = J$$

sein müssen, und daher, weil $J$ nicht algebraisch sein sollte,

$$\alpha = 1, \quad \beta = -\int (x + \alpha_1) f(x, y) \, dx$$

sein, also nach (40.)

$$(41.) \qquad E = (x + \alpha_1) J - \int (x + \alpha_1) f(x, y) \, dx;$$

wenn also die vorgelegte Differentialgleichung reductibel sein soll, so ist die nothwendige Bedingung die, dass $\beta$ oder

$$\int (x + \alpha_1) f(x, y) \, dx$$

eine algebraische Function von $x$ ist. Es ist aber auch leicht zu sehen, dass diese Bedingung die hinreichende ist; denn die partielle Integration ergiebt, wenn $\alpha_1$ eine Constante bedeutet,

$$E = \int J d(x + \alpha_1) = J(x + \alpha_1) - \int (x + \alpha_1) f(x, y) \, dx;$$

nehmen wir nun an, dass eine Constante $\alpha_1$ so bestimmt werden kann, dass

$$\int (x + \alpha_1) f(x, y) \, dx = F(x, y)$$

eine algebraische Function von $x$ ist, so folgt aus

$$E = J(x + \alpha_1) - F(x, y) \quad \text{und} \quad \frac{dE}{dx} = J,$$

dass $E$ ein Integral der Differentialgleichung

$$(x + \alpha_1) \frac{dz}{dx} - z = F(x, y)$$

ist, also einer Differentialgleichung erster Ordnung genügt.

Wir finden somit, dass *die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Irreductibilität der Differentialgleichung*

$$\frac{d^2z}{dx^2} = f(x, y)$$

*die ist, dass keine Constante* $\alpha_1$ *bestimmt werden kann, für welche*

$$\int (x+\alpha_1) f(x, y)\, dx$$

*algebraisch ist;* so werden die Differentialgleichungen

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{x-\varepsilon} \quad \text{und} \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{y}$$

reductibel sein, weil

$$\int (x-\varepsilon)\frac{dx}{x-\varepsilon} = x, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{x}{y}\, dx = -\int dy = -y,$$

und man erhält in der That die beiden Integrale

$$z = (x-\varepsilon)\log(x-\varepsilon)-(x-\varepsilon), \quad z = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} = x \arcsin x + y,$$

welche auch den Differentialgleichungen erster Ordnung genügen:

$$(x-\varepsilon)\frac{dz}{dx} - z = x-\varepsilon \quad \text{und} \quad x\frac{dz}{dx} - z = -\sqrt{1-x^2} = -y.$$

Dass jede homogene lineare Differentialgleichung mit constanten Coefficienten eine reductible ist, folgt einfach daraus, dass ihr particuläres Integral $e^{kx}$ das Integral der linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dz}{dx} - kz = 0$$

ist; nur die lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung mit constanten Coefficienten wird eine irreductible sein, da alle ihre Integrale transcendent sind.

Dass die nicht homogenen linearen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten reductibel und irreductibel sein können, geht aus dem oben behandelten Falle

$$\frac{d^2z}{dx^2} = f(x, y)$$

hervor.

Wir untersuchen endlich noch die Bedingungen für die Irreductibilität einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit variabeln Coefficienten von der Form

$$(42.) \qquad \frac{d^2z}{dx^2} - f(x, y)\frac{dz}{dx} = 0;$$

da

$$\frac{dz}{dx} = c e^{\int f(x,y)dx}, \quad z = c\int dx\, e^{\int f(x,y)dx} + c_1$$

ist, so handelt es sich um die Beantwortung der Frage, welches die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür sind, dass ein Integral der Form

$$(43.) \qquad z = \varkappa \int dx\, e^{\int f(x,y)dx} + \varkappa_1,$$

worin $\varkappa$ und $\varkappa_1$ zwei bestimmte Constanten bedeuten, zugleich ein Integral einer Differentialgleichung erster Ordnung von der Form

$$(44.) \qquad F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}\right) = 0$$

sein kann, oder auch anders ausgedrückt, wann zwischen zwei Integralen $z$ und $\zeta$ der beiden Differentialgleichungen

$$\frac{d^2z}{dx^2} - f(x, y)\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{d\zeta}{dx} - f(x, y)\zeta = 0$$

ein algebraischer Zusammenhang

$$(45.) \qquad F(x, y, z, \zeta) = 0 \quad \text{oder} \quad z = \varphi(\zeta)$$

stattfinden kann.

Schliessen wir den Fall aus, dass

$$\zeta = \varkappa e^{\int f(x,y)dx}$$

eine algebraische Function ist, wie es z. B. der Fall wäre, wenn $f(x, y) = \frac{1}{x}$, so ist die Differentialgleichung erster Ordnung für $\zeta$ eine irreductible, weil alle ihre Integrale transcendent sind, und man kann daher auf die Gleichung (45.) die oben bewiesenen allgemeinen Sätze anwenden. Da jedes andere Integral der Differentialgleichung für $\zeta$ durch $\mu\zeta$ dargestellt ist, während sämmtliche Integrale der Differentialgleichung zweiter Ordnung in $z$ in der Form $mz + m_1$ enthalten sind, so entspringt aus der Gleichung (45.) die Beziehung

$$mz + m_1 = \varphi(\mu\zeta)$$

oder

$$(46.) \qquad \varphi(\mu\zeta) = m\varphi(\zeta) + m_1,$$

wenn $\mu$ eine beliebige, $m$ und $m_1$ davon abhängige Constanten bedeuten. Da diese Gleichung, weil $\zeta$ nicht algebraisch sein sollte, wieder eine in

Bezug auf $\zeta$ identische sein muss, so folgen für $\zeta = 0$ und $\zeta = 1$ die beiden Bestimmungsgleichungen für $m$ und $m_1$:

$$(47.)\qquad m = \frac{\varphi(\mu)-\varphi(0)}{\varphi(1)-\varphi(0)},\quad m_1 = -\varphi(0)\frac{\varphi(\mu)-\varphi(1)}{\varphi(1)-\varphi(0)},$$

und somit die Functionalgleichung für $\varphi$:

$$(48.)\qquad \varphi(\mu\zeta) = \frac{\varphi(\mu)-\varphi(0)}{\varphi(1)-\varphi(0)}\varphi(\zeta) - \frac{\varphi(\mu)-\varphi(1)}{\varphi(1)-\varphi(0)}\varphi(0).$$

Differentiirt man dieselbe nach den von einander unabhängigen Grössen $\zeta$ und $\mu$, so ergiebt sich

$$\mu\varphi'(\mu\zeta) = \frac{\varphi(\mu)-\varphi(0)}{\varphi(1)-\varphi(0)}\varphi'(\zeta),$$

$$\zeta\varphi'(\mu\zeta) = \frac{\varphi'(\mu)}{\varphi(1)-\varphi(0)}\varphi(\zeta) - \frac{\varphi'(\mu)}{\varphi(1)-\varphi(0)}\varphi(0) = \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(0)}{\varphi(1)-\varphi(0)}\varphi'(\mu),$$

also durch Division

$$\frac{\zeta\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta)-\varphi(0)} = \frac{\mu\varphi'(\mu)}{\varphi(\mu)-\varphi(0)},$$

so dass

$$\frac{\zeta\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta)-\varphi(0)} = C$$

wird, worin $C$ eine von $\zeta$ unabhängige Grösse bedeutet. Die Integration der letzten Gleichung liefert

$$z = \varphi(\zeta) = \nu\zeta^C + \varphi(0),$$

worin $\nu$ eine von $\zeta$ unabhängige algebraische Function von $x$ bedeutet; setzt man diesen Werth für $\varphi(\zeta)$ in die Functionalgleichung (46.) ein, so folgt unmittelbar

$$\mu^C = m$$

und daher $C$ eine Constante, ebenso wie

$$\varphi(0) = \frac{m_1}{1-m} = C_1,$$

so dass sich

$$(49.)\qquad z = \nu\zeta^C + C_1$$

ergiebt; dies müsste also die algebraische Gleichung zwischen $z$ und $\zeta$ sein, wenn die vorgelegte Differentialgleichung zweiter Ordnung reductibel wäre. Nun folgt aber aus (49.) und der Differentialgleichung für $\zeta$:

$$\zeta = \frac{dz}{dx} = \nu C f(x,y)\zeta^C + \zeta^C\frac{d\nu}{dx},$$

und da $\zeta$ nicht eine algebraische Function von $x$ sein sollte, diese Gleichung

also in $\zeta$ identisch sein muss, so ergiebt sich für $\zeta = 1$

$$(50.) \qquad \nu C f(x, y) + \frac{d\nu}{dx} = 1, \quad C = 1,$$

woraus wiederum die Beziehung

$$(51.) \qquad z = \nu\zeta + C_1 = \nu \frac{dz}{dx} + C_1$$

folgt, in welcher $C_1$ eine Constante, und die Function $\nu$ als Integral der Differentialgleichung (50.) durch den Ausdruck bestimmt ist:

$$(52.) \qquad \nu = \varrho e^{-\int f(x,y)dx} + e^{-\int f(x,y)dx} \int e^{\int f(x,y)dx} dx;$$

die nothwendige Bedingung dafür, dass die gegebene Differentialgleichung (42.) reductibel ist, wird also die sein, dass der durch (52.) dargestellte Ausdruck von $\nu$ für irgend ein $\varrho$ eine algebraische Function von $x$ ist.

Nun folgt aber aus (43.)

$$z = \varkappa\left(\varrho e^{-\int f(x,y)dx} + e^{-\int f(x,y)dx} \int e^{\int f(x,y)dx} dx\right) e^{\int f(x,y)dx} + \varkappa_1 - \varkappa\varrho,$$

und man sieht, dass, wenn $\nu$ eine algebraische Function ist, auch in der That zwischen $z$ und

$$\zeta = e^{\int f(x,y)dx}$$

eine algebraische Gleichung stattfindet, d. h. $z$ einer Differentialgleichung erster Ordnung von der Form genügt

$$z = \nu \frac{dz}{dx} + C_1 \text{*)},$$

so dass *als nothwendige und hinreichende Bedingung für die Irreductibilität der Differentialgleichung*

$$\frac{d^2z}{dx^2} - f(x, y) \frac{dz}{dx} = 0$$

*sich ergiebt, dass für kein constantes* $\varrho$ *der Ausdruck*

$$\varrho e^{-\int f(x,y)dx} + e^{-\int f(x,y)dx} \int e^{\int f(x,y)dx} dx$$

*eine algebraische Function von* $x$ *ist.*

So wird z. B. für $f(x, y) = \frac{1+x}{x}$,

$$\nu = \varrho \frac{e^{-x}}{x} + \frac{x-1}{x},$$

---

*) Vergl. meine Note: „über algebraisch-logarithmische Integrale nicht homogener linearer Differentialgleichungen" in den Göttinger Nachrichten vom 14. Juli 1880.

es wird also $\nu$ für $\varrho = 0$ eine algebraische Fuuction, und somit muss die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{x+1}{x}\frac{dz}{dx} = 0$$

eine reductible sein; in der That ist deren allgemeines Integral

$$z = c(x-1)e^x + c_1,$$

welches der Differentialgleichung erster Ordnung

$$z = \frac{x-1}{x}\frac{dz}{dx} + c_1$$

genügt.

Es mag hier noch bemerkt werden, dass eine lineare homogene Differentialgleichung, wenn sie reductibel ist, nicht etwa ein Integral wieder mit einer homogenen linearen Differentialgleichung gemein haben muss; so wird das Integral

$$z = \tfrac{4}{15}x^{\frac{5}{2}} + e^x$$

der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 z}{dx^2}\left(\tfrac{2}{3}x - \tfrac{4}{15}x^2\right) + \frac{dz}{dx}\left(\tfrac{4}{15}x^2 - 1\right) + z\left(1 - \tfrac{2}{3}x\right) = 0$$

auch der Differentialgleichung erster Ordnung genügen:

$$\left(\frac{dz}{dx} - z\right)^2 = \tfrac{4}{9}x^3\left(1 - \tfrac{2}{5}x\right)^2.$$

Im Uebrigen will ich nur noch, diese Methode der Irreductibilitätsuntersuchung der Differentialgleichungen betreffend, hinzufügen, dass man dieselbe auch in weit allgemeineren Fällen anwenden kann, wenn man beachtet, dass jede Ableitung eines Integrals einer algebraischen Differentialgleichung $m^{\text{ter}}$ Ordnung wieder einer gleichartigen Differentialgleichung derselben Ordnung genügt, und dass somit für eine reductible Differentialgleichung auch die Differentialgleichungen der Ableitungen reductibel sein werden.

Nachdem dargelegt worden, in welcher Weise die oben für den algebraischen Zusammenhang von Integralen verschiedener Differentialgleichungen aufgestellten Sätze für die Untersuchung der Irreductibilität von Differentialgleichungen verwerthet werden können, gehe ich dazu über zu zeigen, wie eben diese Sätze zur Bestimmung der Form der algebraischen

Beziehung zwischen Integralen verschiedener Differentialgleichungen dienen und zur Ermittelung derjenigen Theoreme für die Integrale beliebiger Differentialgleichungen führen, welche dem *Abel*schen Theorem für die Integrale algebraischer Differentiale analog sind.

Sei zuerst das System von Differentialgleichungen vorgelegt:

$$(53.)\quad \begin{cases} \dfrac{dz}{dx_1} = zf_1(x_1, y_1), \quad \dfrac{dz}{dx_2} = zf_2(x_2, y_2), \quad \dots \\ \dfrac{dz}{dx_\varkappa} = zf_\varkappa(x_\varkappa, y_\varkappa) \\ \dfrac{dz}{dx_{\varkappa+1}} = zf_{\varkappa+1}(x_{\varkappa+1}, y_{\varkappa+1}), \quad \dfrac{dz}{dx_{\varkappa+2}} = zf_{\varkappa+2}(x_{\varkappa+2}, y_{\varkappa+2}), \quad \dots \\ \dfrac{dz}{dx_{\varkappa+\lambda}} = zf_{\varkappa+\lambda}(x_{\varkappa+\lambda}, y_{\varkappa+\lambda}), \end{cases}$$

worin $y_1, \dots y_\varkappa, y_{\varkappa+1}, \dots y_{\varkappa+\lambda}$ beliebig gegebene irreductible algebraische Functionen der resp. Variabeln $x_1, \dots x_\varkappa, x_{\varkappa+1}, \dots x_{\varkappa+\lambda}$ bedeuten sollen, und deren allgemeine Integrale in den Formen

$$(54.)\quad \begin{cases} z = c_1 e^{-\int f_1(x_1, y_1)dx_1}, \quad \dots \quad z = c_\varkappa e^{-\int f_\varkappa(x_\varkappa, y_\varkappa)dx_\varkappa}, \\ z = c_{\varkappa+1} e^{-\int f_{\varkappa+1}(x_{\varkappa+1}, y_{\varkappa+1})dx_{\varkappa+1}}, \quad \dots \quad z = c_{\varkappa+\lambda} e^{-\int f_{\varkappa+\lambda}(x_{\varkappa+\lambda}, y_{\varkappa+\lambda})dx_{\varkappa+\lambda}} \end{cases}$$

enthalten sind, seien ferner $x_1, x_2, \dots x_\varkappa$ unabhängige, $x_{\varkappa+1}, x_{\varkappa+2}, \dots x_{\varkappa+\lambda}$ von diesen algebraisch abhängige Variable,

$$z_1, \quad z_2, \quad \dots \quad z_\varkappa, \quad z_{\varkappa+1}, \quad z_{\varkappa+2}, \quad \dots \quad z_{\varkappa+\lambda}$$

zu diesen Variabeln gehörige particuläre Integrale der Differentialgleichungen (53.), und bestehe endlich zwischen den Variabeln, den von ihnen abhängigen algebraischen Functionen $y$ und den Integralen der Differentialgleichungen eine algebraische Beziehung

$$(55.)\quad F(z_1, z_2, \dots z_\varkappa, z_{\varkappa+1}, z_{\varkappa+2}, \dots z_{\varkappa+\lambda}) = 0,$$

wobei angenommen wird, dass nicht schon zwischen weniger particulären Integralen dieser Differentialgleichungen und den Variabeln ein algebraischer Zusammenhang existire; es soll auf Grund des zweiten oben bewiesenen Satzes die Form der algebraischen Gleichung (55.) festgestellt werden.

Da die Bedingungen des zweiten Satzes durch die gemachten Annahmen erfüllt sind, so wird, wenn die Gleichung (55.) kürzer durch

$$(56.)\quad z_1 = \varphi(z_{\varkappa+1})$$

bezeichnet wird, diese algebraische Beziehung auch bestehen müssen, wenn man für $z_{\varkappa+1}$ ein beliebiges anderes particuläres Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx_{\varkappa+1}} = z f_{\varkappa+1}(x_{\varkappa+1}, y_{\varkappa+1}),$$

also $\mu z_{\varkappa+1}$ setzt, worin $\mu$ eine willkürliche Constante bedeutet, wenn man nur zu gleicher Zeit $z_1$ durch ein bestimmtes anderes particuläres Integral $m z_1$ der resp. Differentialgleichung ersetzt, in welchem $m$ eine in bestimmter Weise von $\mu$ abhängige Constante vorstellt; es existirt somit auch die algebraische Relation

$$(57.) \qquad m z_1 = \varphi(\mu z_{\varkappa+1}),$$

woraus in Verbindung mit (56.)

$$(58.) \qquad \varphi(\mu z_{\varkappa+1}) = m\varphi(z_{\varkappa+1})$$

folgt.

Da in dieser algebraischen Gleichung $z_1$ nicht mehr enthalten ist, andererseits aber vorausgesetzt war, dass nicht schon zwischen weniger particulären Integralen eine algebraische Beziehung stattfinden sollte, so wird die Gleichung (58.) eine identische sein müssen, und ähnliche Schlüsse wie die auf die Gleichung (46.) angewandten führen zu der Bestimmungsgleichung

$$z_{\varkappa+1}\frac{\varphi'(z_{\varkappa+1})}{\varphi(z_{\varkappa+1})} = c_1,$$

worin $c_1$ von $z_{\varkappa+1}$ unabhängig ist. Bezeichnet $a_1$ eine von $z_{\varkappa+1}$ unabhängige Grösse, so ergiebt sich die $\varphi$-Function aus der vorhergehenden Gleichung in der Form

$$(59.) \qquad \varphi(z_{\varkappa+1}) = a_1 z_{\varkappa+1}^{c_1},$$

und setzt man diesen Werth in die Gleichung (58.) ein, so folgt aus

$$a_1\mu^{c_1} z_{\varkappa+1}^{c_1} = m a_1 z_{\varkappa+1}^{c_1},$$

dass

$$m = \mu^{c_1},$$

also $c_1$ nicht nur unabhängig von $z_{\varkappa+1}$ sondern eine Constante ist, da $\mu$ und $m$ constante Grössen waren.

Wir erhalten somit die Beziehung

$$z_1 = a_1 z_{\varkappa+1}^{c_1},$$

worin $c_1$ eine Constante und $a_1$ eine von den übrigen Integralen und den einzelnen Variabeln algebraisch abhängige Function ist; es mag gleich hier bemerkt werden, dass, weil man eine algebraische Function $\varphi(z_{\varkappa+1})$ sucht, die Constante $c_1$ als rationale Zahl betrachtet werden darf.

Ebenso würde folgen

$$z_1 = a_2 z_{\varkappa+2}^{c_2},$$

und daher

$$a_1 z_{\varkappa+1}^{c_1} = a_2 z_{\varkappa+2}^{c_2},$$

welche Gleichung wiederum, da $z_1$ in derselben nicht vorkommt, der gemachten Annahme zufolge eine identische sein muss; setzt man daher $z_{\varkappa+1} = 1$, so folgt

$$a_1 = A_2 z_{\varkappa+2}^{c_2},$$

wenn $A_2$ den Werth von $a_2$ für $z_{\varkappa+1} = 1$ bezeichnet, und es geht somit der oben gefundene Werth für $z_1$ über in

$$z_1 = A_2 z_{\varkappa+1}^{c_1} z_{\varkappa+2}^{c_2},$$

und ebenso allgemein

$$(60.)\qquad z_1 = A_\lambda z_{\varkappa+1}^{c_1} z_{\varkappa+2}^{c_2} \dots z_{\varkappa+\lambda}^{c_\lambda},$$

worin $c_1, c_2, \dots c_\lambda$ rationale Zahlen bedeuten und $A_\lambda$ eine algebraische Function von $z_2, z_3, \dots z_\varkappa$ und den einzelnen Variabeln darstellt.

Drückt man nunmehr in der Gleichung (60.) aus der algebraischen Function $A_\lambda$ das Integral $z_2$ in der folgenden Form aus:

$$(61.)\qquad z_2 = \psi\Big(\frac{z_1}{z_{\varkappa+1}^{c_1} z_{\varkappa+2}^{c_2} \dots z_{\varkappa+\lambda}^{c_\lambda}}\Big),$$

worin $\psi$ eine algebraische Function bedeutet, und bemerkt man, dass, wenn nach dem früheren allgemeinen Satze $z_{\varkappa+1}$ mit einem Factor versehen wird, auch $z_2$ einen davon abhängigen Multiplicator erhält, oder dass das letztere geschieht, wenn das Argument der $\psi$-Function mit einem constanten aber beliebigen Multiplicator versehen wird, so führt die Behandlung der Gleichung (61.) wieder auf die Discussion einer Functionalgleichung von der Form (58.) zurück, und man erhält somit nach dem dort gefundenen Resultate

$$z_2 = B_1\Big(\frac{z_1}{z_{\varkappa+1}^{c_1} z_{\varkappa+2}^{c_2} \dots z_{\varkappa+\lambda}^{c_\lambda}}\Big)^{C_1},$$

worin wieder $C_1$ eine rationale Constante und $B_1$ eine von den Integralen

$z_3, z_4, \dots z_\varkappa$ abhängige algebraische Function vorstellt, oder

$$z_1 = M_1 z_2^{\gamma_2} z_{\varkappa+1}^{\gamma_{\varkappa+1}} \dots z_{\varkappa+\lambda}^{\gamma_{\varkappa+\lambda}},$$

worin die Zahlen $\gamma$ sowie die Function $M_1$ den Charakter der früheren analogen Grössen haben. Fährt man so fort, so erhält man für die gesuchte Beziehung zwischen allen jenen particulären Integralen der verschiedenen Differentialgleichungen (53.) die folgende Gleichung:

$$(62.) \qquad z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_\varkappa^{\alpha_\varkappa} z_{\varkappa+1}^{\alpha_{\varkappa+1}} \dots z_{\varkappa+\lambda}^{\alpha_{\varkappa+\lambda}} = U,$$

worin die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{\varkappa+\lambda}$ rationale Zahlen, und $U$ eine algebraische Function der Grössen $x_1, x_2, \dots x_\varkappa$ bedeutet.

Dies ist somit die Form des allgemeinen Transformationsproblems der zu den Differentialgleichungen (53.) gehörigen Integrale, eine Form, zu der wir auch von der Bemerkung ausgehend, dass die Integrale sämmtlich in der Form

$$c e^{\int f(x,y) dx}$$

darstellbar sind, gelangt wären, wenn wir den Satz von der einzig möglichen additiven Relation zwischen *Abel*schen Integralen zu Grunde gelegt hätten — es lag uns jedoch daran, zu zeigen, wie man mit Hülfe der oben aufgestellten allgemeinen Sätze über Differentialgleichungen die Form der algebraischen Beziehung zwischen Integralen derselben unmittelbar auffinden kann.

Lassen wir nunmehr die einzelnen Differentialgleichungen (53.) sich nur durch die rationalen Functionen $f_1, f_2, \dots$ von einander unterscheiden, während die irreductibeln algebraischen Irrationalitäten in den einzelnen Gleichungen dieselben sein sollen, und setzen für alle Variabeln dieselbe Grösse $x$, so würde eine etwa stattfindende algebraische Beziehung zwischen den Integralen jener Differentialgleichungen ebenfalls in der Form (62.) enthalten sein, und damit die allgemeine Form der Zerlegung eines Integrales der Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = z f(x,y)$$

in Integrale von Differentialgleichungen

$$\frac{dz}{dx} = z f_1(x,y), \quad \frac{dz}{dx} = z f_2(x,y), \quad \dots$$

gegeben sein, für welche $f_1(x,y), f_2(x,y), \dots$ einfachere rationale Func-

tionen von $x$ und $y$ sein können, als die durch $f(x, y)$ dargestellte — und ein Satz der Art wäre das Analogon zu der Zerlegung *Abel*scher Integrale in Integrale der verschiedenen Gattungen. In der That lässt sich mit Benutzung der Zerlegung der *Abel*schen Integrale eine Zerlegung der Integrale jener Differentialgleichung in der oben gefundenen allgemeinen Form aufstellen.

Sei z. B. die Differentialgleichung

$$(63.)\qquad \frac{dz}{dx} = z\frac{f(x)}{\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2 x)}}$$

gegeben, so steht das particuläre Integral derselben

$$Z = e^{\int\frac{f(x)dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2 x)}}}$$

zu den Integralen

$$z_1 = e^{a_1\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2 x)}}},\qquad z_2 = e^{a_2\int\frac{xdx}{\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2 x)}}},$$

$$z_3^{(1)} = e^{a_3^{(1)}\int\frac{dx}{(x-\alpha_1)\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2 x)}}},\quad \dots\quad z_3^{(r)} = e^{a_3^{(r)}\int\frac{dx}{(x-\alpha_r)\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2 x)}}},$$

$$\zeta = e^{F(x)\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2 x)}}$$

der resp. Differentialgleichungen

$$\frac{dz}{dx} = \frac{a_1 z}{\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2 x)}},\qquad \frac{dz}{dx} = \frac{a_2 zx}{\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2 x)}},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{a_3^{(1)} z}{(x-\alpha_1)\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2 x)}},\quad \dots\quad \frac{dz}{dx} = \frac{a_3^{(r)} z}{(x-\alpha_r)\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2 x)}},$$

$$\frac{dz}{dx} = z\frac{d}{dx}[F(x)\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2 x)}],$$

in denen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r$ die Unstetigkeitswerthe von $f(x)$ vorstellen, und $F(x)$ eine rationale Function von $x$ bedeutet, nach bekannten Sätzen aus der Theorie der elliptischen Integrale in der Beziehung

$$(64.)\qquad Z = z_1 z_2 z_3^{(1)} \dots z_3^{(r)}.\zeta,$$

worin bekanntlich in üblichen Bezeichnungen, wenn

$$x(1-x)(1-\varkappa^2 x) = \varphi(x)$$

gesetzt wird:

$$(65.)\quad\begin{cases} a_1 = -\frac{x^2}{2}\left\{\sum_1^r{}_\varrho\left[\frac{f(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\int_{\alpha_\varrho}\frac{t\,dt}{\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{(t-\alpha_\varrho)^{-1}} - \left[\frac{f(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\int_\infty\frac{t\,dt}{\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{t^{-1}}\right\}, \\ a_2 = \quad\frac{x^2}{2}\left\{\sum_1^r{}_\varrho\left[\frac{f(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\int_{\alpha_\varrho}\frac{dt}{\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{(t-\alpha_\varrho)^{-1}} - \left[\frac{f(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\int_\infty\frac{dt}{\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{t^{-1}}\right\}, \\ a_3^{(1)} = \left[\frac{f(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{(t-\alpha_1)^{-1}}, \quad \ldots \quad a_3^{(r)} = \left[\frac{f(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{(t-\alpha_r)^{-1}}, \\ F(x) = \sum_1^r{}_\varrho\left[\frac{f(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\int_{\alpha_\varrho}\frac{dt}{(t-x)\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{(t-\alpha_\varrho)^{-1}} - \left[\frac{f(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\int_\infty\frac{dt}{(t-x)\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{t^{-1}} \\ \qquad = \sum_1^r{}_\varrho F_\varrho(x) - F_0(x). \end{cases}$$

Somit wäre die Zurückführung des Integrales der Differentialgleichung (63.) auf Integrale von Differentialgleichungen einfacherer Form, die aber zu derselben algebraischen Irrationalität gehören, der oben gefundenen allgemeinen Beziehung (62.) entsprechend, bewerkstelligt, und kann in die im Allgemeinen nicht algebraische Relation umgesetzt werden

$$Z = z_1^{a_1} z_2^{a_2} z_3^{(1)a_3^{(1)}} \ldots z_3^{(r)a_3^{(r)}} . \zeta,$$

wenn man nunmehr mit $z_1$, $z_2$, $z_3^{(1)}$, ... $z_3^{(r)}$ die Integrale der obigen, aber von den constanten Factoren $a_1$, $a_2$, $a_3^{(1)}$, ... $a_3^{(r)}$ befreiten Differentialgleichungen bezeichnet, wodurch erreicht wird, dass die einfacheren Differentialgleichungen, von den Unstetigkeitswerthen von $f(x)$ abgesehen, von der Form dieser Function unabhängig werden.

Zur Einsicht in die Bedeutung der Reductionsformel (64.) werde bemerkt, dass $z_1$, weil das elliptische Integral erster Gattung für endliche und unendliche $x$ stets endlich bleibt, ebenfalls eine stets endlich bleibende Function vorstellt; $z_2$ wird, da das Integral zweiter Gattung überall endlich, nur in dem unendlich entfernten Punkte, der ein Verzweigungspunkt der Irrationalität ist, von der ersten Ordnung also wie $x^{\frac{1}{2}}$ unendlich wird, für jedes endliche $x$ wiederum endlich sein, dagegen für $x = \infty$ in $e^{x^{\frac{1}{2}}}$ übergehen, also in diesem Punkte eine Discontinuität zweiter Gattung haben; weiter werden die Integrale $z_3^{(\varrho)}$ der obigen Differentialgleichungen sonst in allen Punkten, den unendlich entfernten eingeschlossen, endlich sein, nur in dem Punkte $\alpha_\varrho$ wird $z_3^{(\varrho)}$, weil das Integral dritter Gattung auf beiden Blättern der *Riemann*schen Fläche unendlich wird wie

$$\pm\frac{1}{\sqrt{\varphi(\alpha_\varrho)}}\log(x-\alpha_\varrho),$$

mit der Function

$$e^{\pm\frac{a_s^{(\varrho)}}{\sqrt{\varphi(\alpha_\varrho)}}\log(x-\alpha_\varrho)} = (x-\alpha_\varrho)^{\pm\frac{a_s^{(\varrho)}}{\sqrt{\varphi(\alpha_\varrho)}}}$$

zusammenfallen, also für einen der Exponenten unendlich werden. Endlich wird die Art der Discontinuität von

$$\zeta = e^{F(x)\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2 x)}}$$

leicht bestimmt werden können, wenn man erwägt, dass $F(x)$ als rationale Function von $x$ offenbar nur in den Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ und in $x = \infty$ und zwar ganzzahlig unendlich werden kann, da dies nur die Unstetigkeitspunkte des vorgelegten elliptischen Integrales waren; diese Punkte sind also offenbar dann wieder Discontinuitätspunkte zweiter Gattung für die Function $\zeta$. Wir erhalten somit als durch ihre Discontinuitäten wesentlich verschiedene Integralformen jener Differentialgleichungen nur solche, welche überall endlich sind und aus dem Integrale erster Gattung hervorgehen, ausserdem solche, welche in den Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ algebraische Discontinuitäten von der Form $(x-\alpha_\varrho)^{m_\varrho}$ haben und den Integralen dritter Gattung entspringen, ferner solche, welche in eben diesen Punkten eine Discontinuität zweiter Gattung haben und aus dem algebraischen Theile der Zerlegungsformel des elliptischen Integrales stammen, und endlich noch solche, welche nur in dem unendlich entfernten Verzweigungspunkte eine Discontinuität zweiter Gattung besitzen und sich zum Theil aus dem Integrale zweiter Gattung, zum Theil aus dem algebraischen Theile der Zerlegungsformel herleiten. Wir können aber auch leicht erkennen, welche Theile des algebraischen Ausdruckes die zu der zweiten und dritten Art gehörigen Formen jener Integrale der Differentialgleichungen liefern. Da nämlich

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi(t)}} = \varphi(\alpha_\varrho)^{-\frac{1}{2}} + a_1(t-\alpha_\varrho) + \cdots$$

$$\frac{1}{t-x} = -\frac{1}{x-\alpha_\varrho} - \frac{t-\alpha_\varrho}{(x-\alpha_\varrho)^2} - \cdots,$$

somit

$$\int_{\alpha_\varrho}\frac{dt}{(t-x)\sqrt{\varphi(t)}} = -\frac{\varphi(\alpha_\varrho)^{-\frac{1}{2}}}{x-\alpha_\varrho}(t-\alpha_\varrho) + \frac{\psi_1(x-\alpha_\varrho)}{(x-\alpha_\varrho)^2}(t-\alpha_\varrho)^2 + \frac{\psi_2(x-\alpha_\varrho)}{(x-\alpha_\varrho)^3}(t-\alpha_\varrho)^3 + \cdots,$$

worin $\psi_\lambda(x-\alpha_\varrho)$ eine ganze Function von $x-\alpha_\varrho$ vom Grade $\lambda$ bezeichnet;

da ferner, wenn $f(x)$ in $x=\alpha_\varrho$ von der $m_\varrho^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich wird wie $b_{m_\varrho}(x-\alpha_\varrho)^{-m_\varrho}$,

$$\frac{f(t)}{\sqrt{\varphi(t)}} = \varphi(\alpha_\varrho)^{-\frac{1}{2}} b_{m_\varrho}(t-\alpha_\varrho)^{-m_\varrho} + c_1(t-\alpha_\varrho)^{-m_\varrho+1} + \cdots,$$

so folgt

$$\frac{f(t)}{\sqrt{\varphi(t)}} \int_{\alpha_\varrho} \frac{dt}{(t-x)\sqrt{\varphi(t)}} =$$

$$-\frac{\varphi(\alpha_\varrho)^{-1} b_{m_\varrho}}{x-\alpha_\varrho}(t-\alpha_\varrho)^{-m_\varrho+1} + \frac{\varphi(\alpha_\varrho)^{-\frac{1}{2}} b_{m_\varrho}\psi_1(x-\alpha_\varrho) - c_1\varphi(\alpha_\varrho)^{-\frac{1}{2}}(x-\alpha_\varrho)}{(x-\alpha_\varrho)^2}(t-\alpha_\varrho)^{-m_\varrho+2} + \cdots,$$

woraus zu ersehen, dass

$$F_\varrho(x) = \left[\frac{f(t)}{\sqrt{\varphi(t)}} \int_{\alpha_\varrho} \frac{dt}{(t-x)\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{(t-\alpha_\varrho)^{-1}}$$

im Allgemeinen für $x=\alpha_\varrho$ und nur in diesem Punkte von einer endlichen ganzzahligen Ordnung unendlich ist, während sie wegen des Grades $\lambda$ von $\psi_\lambda(x-\alpha_\varrho)$ für $x=\infty$ endlich bleibt. Andererseits sieht man, dass aus

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi(t)}} = \varkappa^{-1} t^{-\frac{1}{2}} + \cdots,$$

$$\frac{1}{t-x} = t^{-1} + x t^{-2} + x^2 t^{-3} + \cdots$$

folgt

$$\int_\infty \frac{dt}{(t-x)\sqrt{\varphi(t)}} = -\tfrac{2}{3}\varkappa^{-1} t^{-\frac{3}{2}} + \psi_1(x) t^{-\frac{5}{2}} + \psi_2(x) t^{-\frac{7}{2}} + \cdots,$$

worin $\psi_\lambda(x)$ eine ganze Function von $x$ vom Grade $\lambda$ bedeutet; ist nun das höchste Glied des Zählers von $f(t)$: $a_0 t^\mu$ und das des Nenners: $b_0 t^\nu$, so wird

$$\frac{f(t)}{\sqrt{\varphi(t)}} = \frac{a_0}{b_0}\varkappa^{-1} t^{\mu-\nu-\frac{3}{2}} + d_1 t^{\mu-\nu-\frac{5}{2}} + \cdots,$$

und daher

$$\frac{f(t)}{\sqrt{\varphi(t)}} \int_\infty \frac{dt}{(t-x)\sqrt{\varphi(t)}} = -\tfrac{2}{3}\varkappa^{-2}\frac{a_0}{b_0} t^{\mu-\nu-3} + \left(\frac{a_0}{b_0}\varkappa^{-1}\psi_1(x) - \tfrac{2}{3} d_1 \varkappa^{-1}\right) t^{\mu-\nu-4} + \cdots,$$

woraus wiederum folgt, dass

$$F_0(x) = \left[\frac{f(t)}{\sqrt{\varphi(t)}} \int_\infty \frac{dt}{(t-x)\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{t^{-1}}$$

im Allgemeinen für $x=\infty$ und nur in diesem Punkte von einer endlichen ganzzahligen Ordnung unendlich ist.

Fasst man daher in der oben gefundenen algebraischen Beziehung (64.) das Integral $z_2$ mit dem zu $F_0(x)$ gehörigen Integrale zusammen, so folgt, dass das Integral $Z$ der Differentialgleichung

$$(66.)\qquad \frac{dz}{dx} = \frac{z f(x)}{\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2 x)}}$$

mit den Integralen

$$Z_1,\quad Z_3^{(1)},\quad \dots\quad Z_3^{(r)},\quad Z_2,\quad 'Z_3^{(1)},\quad \dots\quad 'Z_3^{(r)}$$

der resp. Differentialgleichungen

$$(67.)\qquad \frac{dz}{dx} = a_1 z \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2 x)}}$$

$$(68.)\qquad \frac{dz}{dx} = a_3^{(\varrho)} z \frac{dx}{(x-\alpha_\varrho)\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2 x)}}$$

$$(69.)\qquad \frac{dz}{dx} = z\left(\frac{a_2 x}{\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2 x)}} - \frac{d}{dx}\left[F_0(x)\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2 x)}\right]\right)$$

$$(70.)\qquad \frac{dz}{dx} = z\frac{d}{dx}[F_\varrho(x)\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2 x)}]$$

in der algebraischen Beziehung

$$(71.)\qquad Z = Z_1 . Z_3^{(1)} \dots Z_3^{(r)} . Z_2 . 'Z_3^{(1)} \dots 'Z_3^{(r)}$$

steht, worin $Z_1$ eine überall endlich bleibende Function bedeutet, $Z_3^{(\varrho)}$ im Punkte $\alpha_\varrho$ unendlich wird wie

$$(x-\alpha_\varrho)^{\pm\frac{a_3^{(\varrho)}}{\sqrt{\varphi(\alpha_\varrho)}}},$$

$Z_2$ im Endlichen stets endlich ist und nur für $x=\infty$ einen Discontinuitätspunkt zweiter Gattung hat, endlich $'Z_3^{(\varrho)}$ in $x=\alpha_\varrho$ eine Discontinuität zweiter Gattung erleidet, im Uebrigen stets endlich ist — und dies wäre das Analogon zur Zerlegung der *Abel*schen Integrale in Integrale derselben Art und verschiedener Gattung.

Gehen wir nunmehr wieder zu den Gleichungen (53.) zurück und lassen alle Differentialgleichungen in die eine zusammenfallen

$$\frac{dz}{dx} = z f(x, y),$$

von der ein System gleichartiger particulärer Integrale, welche den unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \dots x_\varkappa$ und den algebraisch von diesen abhängigen Variabeln $x_{\varkappa+1}, x_{\varkappa+2}, \dots x_{\varkappa+\lambda}$ entsprechen soll, mit

$$z_1,\quad z_2,\quad \dots\quad z_\varkappa,\quad z_{\varkappa+1},\quad \dots\quad z_{\varkappa+\lambda}$$

bezeichnet werden möge, so wird, wenn eine algebraische Beziehung zwischen diesen Integralen und deren Variabeln bestehen soll und angenommen wird, dass nicht schon zwischen weniger Integralen eine algebraische Relation existirt, dieselbe nach Gleichung (62.) die Form haben müssen

$$z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_\varkappa^{\alpha_\varkappa} z_{\varkappa+1}^{\alpha_{\varkappa+1}} \dots z_{\varkappa+\lambda}^{\alpha_{\varkappa+\lambda}} = U,$$

worin die $\alpha$ rationale Zahlen und $U$ eine algebraische Function der Variabeln bedeutet. Wir wollen jedoch diese Relation noch weiter ausdehnen, und verallgemeinern zu dem Zwecke den oben bewiesenen zweiten Satz von der Unveränderlichkeit einer algebraischen Relation zwischen particulären Integralen verschiedener Differentialgleichungen für unser specielles System von Differentialgleichungen.

Stellt man nämlich mit dem System (53.) noch das gleichzeitige System partieller Differentialgleichungen zusammen:

$$(72.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial a_1} = z\psi_1(a_1, a_2, \dots a_\varkappa), \\ \dfrac{\partial z}{\partial a_2} = z\psi_2(a_1, a_2, \dots a_\varkappa), \quad \dots \quad \dfrac{\partial z}{\partial a_\varkappa} = z\psi_\varkappa(a_1, a_2, \dots a_\varkappa), \end{cases}$$

worin $z$ die zu bestimmende abhängige Variable, $a_1, a_2, \dots a_\varkappa$ unabhängige Veränderliche bedeuten, welche rationale Functionen der Werthesysteme

$$x_1, y_1; \quad x_2, y_2; \quad \dots \quad x_\varkappa, y_\varkappa$$

darstellen, und die $\psi$-Functionen rationale Functionen von $a_1, a_2, \dots a_\varkappa$ sind, welche der Bedingung der Integrabilität genügen:

$$\frac{\partial \psi_r(a_1, a_2, \dots a_\varkappa)}{\partial a_s} = \frac{\partial \psi_s(a_1, a_2, \dots a_\varkappa)}{\partial a_r}.$$

Nimmt man nun eine algebraische Beziehung

$$(73.)\quad F(z_1, z_2, \dots z_\varkappa, z_{\varkappa+1}, \dots z_{\varkappa+\lambda}, \zeta) = 0$$

an, in welcher $\zeta$ ein Integral des Systems (72.) bedeutet, und welche noch die $x$- und $y$-Variabeln enthalten mag, so wird sich, wenn $F$ in Bezug auf $z_1$ vom $r^{\text{ten}}$ Grade ist, aus (73.)

$$(74.)\quad z_1 = \varphi_1(z_{\varkappa+1}, \dots z_{\varkappa+\lambda}, \zeta),\ z_1 = \varphi_2(z_{\varkappa+1}, \dots z_{\varkappa+\lambda}, \zeta),\ \dots\ z_1 = \varphi_r(z_{\varkappa+1}, \dots z_{\varkappa+\lambda}, \zeta)$$

ergeben, worin die nicht in die Bezeichnung aufgenommenen Integrale sowie ihre Variablen als Parameter zu betrachten sind. Bildet man mit Hülfe der ersten der Differentialgleichungen (53.):

$$(75.)\quad \frac{dz}{dx_1} = z f_1(x_1, y_1)$$

das Product

$$(76.)\quad \left(\frac{d\varphi_1}{dx_1}-\varphi_1 f_1(x_1, y_1)\right)\left(\frac{d\varphi_2}{dx_1}-\varphi_2 f_1(x_1, y_1)\right)\dots\left(\frac{d\varphi_r}{dx_1}-\varphi_r f_1(x_1, y_1)\right) = 0,$$

so erhält man, wenn für die Ableitungen der Integrale $z_{\varkappa+1}, \dots z_{\varkappa+\lambda}, \zeta$ ihre durch die Integrale und die Variabeln selbst vermöge der vorgelegten Differentialgleichungen gegebenen Werthe gesetzt werden, eine algebraische Gleichung, welche $z_1$ nicht mehr enthält, und die somit, wenn wieder angenommen wird, dass nicht schon zwischen weniger als den gegebenen Integralen der vorgelegten Differentialgleichungen eine algebraische Beziehung existire, identisch bestehen muss; setzt man also wieder für $z_{\varkappa+1}, z_{\varkappa+2}, \dots z_{\varkappa+\lambda}, \zeta$ beliebige particuläre Integrale der resp. Differentialgleichungen, so wird einer der Factoren des Productes verschwinden und daher die Gleichung statthaben

$$\frac{d\varphi_\sigma}{dx_1} = \varphi_\sigma f_1(x_1, y_1),$$

d. h. es wird ein anderes particuläres Integral der Differentialgleichung (75.) existiren, welches mit den neuen particulären Integralen in der algebraischen Beziehung (73.) steht. Es bleibt daher auch mit Hinzunahme des neuen Systems von Differentialgleichungen (72.) der frühere Satz bestehen, und somit auch die aus der Existenz des Satzes hergeleitete nothwendige Form der algebraischen Beziehung

$$(77.)\quad z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_\varkappa^{\alpha_\varkappa} z_{\varkappa+1}^{\alpha_{\varkappa+1}} \dots z_{\varkappa+\lambda}^{\alpha_{\varkappa+\lambda}} . \zeta^\beta = U,$$

worin $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{\varkappa+\lambda}, \beta$ rationale Zahlen und $U$ eine algebraische Function der Veränderlichen bedeutet. In der That stellt sich der dem *Abel*schen Theorem entsprechende Satz in der Form

$$e^{\int f(x_1, y_1)dx_1} . e^{\int f(x_2, y_2)dx_2} \dots e^{\int f(x_\varkappa, y_\varkappa)dx_\varkappa} . e^{\int f(x_{\varkappa+1}, y_{\varkappa+1})dx_{\varkappa+1}} \dots e^{\int f(x_{\varkappa+\lambda}, y_{\varkappa+\lambda})dx_{\varkappa+\lambda}} \times$$
$$e^{\int [\psi_1(a_1, a_2, \dots a_\varkappa)da_1 + \dots + \psi_\varkappa(a_1, a_2, \dots a_\varkappa)da_\varkappa]} = 1$$

oder

$$z_1 z_2 \dots z_\varkappa . z_{\varkappa+1} \dots z_{\varkappa+\lambda} . \zeta = 1$$

oder endlich

$$z_{\varkappa+1} \dots z_{\varkappa+\lambda} = z_1^{-1} z_2^{-1} \dots z_\varkappa^{-1} . \zeta^{-1}$$

dar, wonach also das Product der Integrale für die Werthepaare

$$x_{\varkappa+1}, y_{\varkappa+1}; \quad x_{\varkappa+2}, y_{\varkappa+2}; \quad \dots \quad x_{\varkappa+\lambda}, y_{\varkappa+\lambda},$$

welche nach den Formeln des *Abel*schen Theorems algebraisch mit $x_1$, $y_1$; $\dots$ $x_\varkappa$, $y_\varkappa$ verbunden sind, durch das Product der Integrale für eben

diese unabhängigen Werthepaare und eine Exponentialfunction darstellbar ist, deren Exponent sich rational-logarithmisch durch diese Werthe ausdrücken lässt oder welche selbst das Integral der totalen Differentialgleichung

$$dz = z\{\psi_1(a_1, \dots a_\varkappa)da_1 + \psi_2(a_1, \dots a_\varkappa)da_2 + \cdots + \psi_\varkappa(a_1, \dots a_\varkappa)da_\varkappa\}$$

ist, in welcher die $\psi$-Functionen rationale Functionen und die $a$-Grössen rational aus den unabhängigen Werthepaaren zusammengesetzt sind.

Gehen wir jetzt zur allgemeinen Differentialgleichung erster Ordnung von der Form

$$(78.) \qquad \frac{dz}{dx} + z\,\omega(x, y) = \Omega(x, Y)$$

über, in welcher $y$ und $Y$ wieder irreductible algebraische Functionen von $x$ bedeuten sollen, während $\omega(x, y)$ und $\Omega(x, Y)$ rationale Functionen von $x, y$ resp. $x, Y$ sind, so wird unter den für den vorigen Fall gemachten Annahmen und mit Beibehaltung der dort gebrauchten Bezeichnungen die für das System der Gleichungen

$$(79.) \qquad \begin{cases} \dfrac{dz}{dx_1} + z\,\omega_1(x_1, y_1) = \Omega_1(x_1, Y_1) \\ \dfrac{dz}{dx_2} + z\,\omega_2(x_2, y_2) = \Omega_2(x_2, Y_2) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{dz}{dx_{\varkappa+\lambda}} + z\,\omega_{\varkappa+\lambda}(x_{\varkappa+\lambda}, y_{\varkappa+\lambda}) = \Omega_{\varkappa+\lambda}(x_{\varkappa+\lambda}, Y_{\varkappa+\lambda}) \end{cases}$$

vorausgesetzte algebraische Relation zwischen den Integralen dieser Differentialgleichungen zu untersuchen sein; wir wollen jedoch aus später ersichtlichen Gründen die Frage hier etwas allgemeiner stellen, und zwar mit dem System der Gleichungen (79.) noch das System der reducirten Differentialgleichungen von (79.)

$$(80.) \qquad \begin{cases} \dfrac{dz}{dx_1} + z\,\omega_1(x_1, y_1) = 0 \\ \dfrac{dz}{dx_2} + z\,\omega_2(x_2, y_2) = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{dz}{dx_{\varkappa+\lambda}} + z\,\omega_{\varkappa+\lambda}(x_{\varkappa+\lambda}, y_{\varkappa+\lambda}) = 0 \end{cases}$$

verbinden und die Frage nach der Form einer möglicherweise stattfindenden algebraischen Beziehung zwischen particulären Integralen der Differentialgleichungen (79.) und (80.) und den einzelnen Variabeln aufwerfen, indem

wir gleich diejenige unter allen diesen Relationen suchen, welche die kleinste Anzahl von Integralen des Systemes (79.) enthält, und zugleich annehmen, dass in dieser Relation mindestens *zwei* Integrale des Differentialgleichungssystems (79.) vorkommen.

Bezeichnen wir wieder die Integrale der Differentialgleichungen (79.) mit $z_1, z_2, \dots z_\varkappa, z_{\varkappa+1}, \dots z_{\varkappa+\lambda}$ und setzen die hypothetisch angenommene Relation, welche auch die Integrale der reducirten Differentialgleichungen (80.) enthalten darf, in die Form

$$(81.)\qquad z_1 = \varphi(z_{\varkappa+\varrho}).$$

Da den Bedingungen des zweiten oben bewiesenen allgemeinen Satzes wieder genügt wird, so wird man für $z_{\varkappa+\varrho}$ ein beliebiges anderes particuläres Integral der zugehörigen Differentialgleichung setzen können, wenn nur für $z_1$ ein bestimmtes anderes particuläres Integral der resp. Differentialgleichung substituirt wird; bemerkt man aber, dass das allgemeine Integral einer Differentialgleichung (79.) die Form hat

$$z = ce^{-\int\omega(x,y)dx}+e^{-\int\omega(x,y)dx}\int\Omega(x,Y)e^{\int\omega(x,y)dx}dx,$$

worin $c$ die Integrationsconstante bedeutet, so wird sich aus (81.) die Gleichung

$$(82.)\qquad z_1+me^{-\int^{x_1}\omega_1(x,y_1)dx} = \varphi(z_{\varkappa+\varrho}+\mu e^{-\int^{x_{\varkappa+\varrho}}\omega_{\varkappa+\varrho}(x,y_{\varkappa+\varrho})dx})$$

ergeben, in der $\mu$ eine willkürliche, $m$ eine von $\mu$ abhängige Constante ist, oder

$$(83.)\qquad \varphi(z_{\varkappa+\varrho}+\mu e^{-\int^{x_{\varkappa+\varrho}}\omega_{\varkappa+\varrho}(x,y_{\varkappa+\varrho})dx}) = \varphi(z_{\varkappa+\varrho})+me^{-\int^{x_1}\omega_1(x,y_1)dx}.$$

Nun sind aber

$$e^{-\int^{x_{\varkappa+\varrho}}\omega_{\varkappa+\varrho}(x,y_{\varkappa+\varrho})dx},\quad e^{-\int^{x_1}\omega_1(x,y_1)dx}$$

Integrale des Systems reducirter Differentialgleichungen (80.), und es liefert daher die Gleichung (83.) zwischen weniger Integralen des Systems (79.) und Integralen des reducirten Systems eine algebraische Beziehung, was gegen die Annahme ist, es muss daher (83.) eine identische Gleichung sein, also auch bestehen, welchen Werth wir auch $z_{\varkappa+\varrho}$ unabhängig von $\mu$ beilegen. Setzt man $z_{\varkappa+\varrho} = 0$, so folgt

$$m = e^{\int^{x_1}\omega_1(x,y_1)dx}[\varphi(\mu e^{-\int^{x_{\varkappa+\varrho}}\omega_{\varkappa+\varrho}(x,y_{\varkappa+\varrho})dx})-\varphi(0)]$$

als Verbindungsgleichung zwischen $\mu$ und $m$, und die Gleichung (83.) nimmt in Folge dessen die Form an

$$(84.)\quad \begin{cases} \varphi\left(z_{\varkappa+\varrho}+\mu e^{-\int^{x_{\varkappa+\varrho}}\omega_{\varkappa+\varrho}(x,y_{\varkappa+\varrho})dx}\right) \\ = \varphi(z_{\varkappa+\varrho})+\varphi\left(\mu e^{-\int^{x_{\varkappa+\varrho}}\omega_{\varkappa+\varrho}(x,y_{\varkappa+\varrho})dx}\right)-\varphi(0), \end{cases}$$

die wieder unabhängig von $z_{\varkappa+\varrho}$, $\mu$ und den übrigen in dieser Gleichung vorkommenden Integralen gültig ist. Differentiiren wir die Gleichung (84.) successive nach $z_{\varkappa+\varrho}$ und $\mu$, so folgt leicht durch Zusammensetzung der beiden so entstehenden Gleichungen

$$(85.)\quad \varphi'(z_{\varkappa+\varrho}) = \varphi'\left(\mu e^{-\int^{x_{\varkappa+\varrho}}\omega_{\varkappa+\varrho}(x,y_{\varkappa+\varrho})dx}\right),$$

und daher wieder mit Benutzung der gemachten Annahme von der Nichtexistenz einer algebraischen Beziehung zwischen weniger $z$ und Integralen der reducirten Differentialgleichungen $\varphi'(z_{\varkappa+\varrho})$ von $z_{\varkappa+\varrho}$ unabhängig, oder

$$(86.)\quad \varphi(z_{\varkappa+\varrho}) = az_{\varkappa+\varrho}+b,$$

worin $a$ und $b$ nicht mehr von $z_{\varkappa+\varrho}$ abhängen. Setzt man den Werth (86.) in die Gleichung (83.) ein, so erhält man

$$a\left(z_{\varkappa+\varrho}+\mu e^{-\int^{x_{\varkappa+\varrho}}\omega_{\varkappa+\varrho}(x,y_{\varkappa+\varrho})dx}\right)+b = az_{\varkappa+\varrho}+b+me^{-\int^{x_1}\omega_1(x,y_1)dx}$$

oder

$$a\mu e^{-\int^{x_{\varkappa+\varrho}}\omega_{\varkappa+\varrho}(x,y_{\varkappa+\varrho})dx} = me^{-\int^{x_1}\omega_1(x,y_1)dx}$$

und daher, wenn die Constante

$$\frac{m}{\mu} = c_{\varkappa+\varrho}$$

gesetzt wird,

$$(87.)\quad a = c_{\varkappa+\varrho}e^{-\int^{x_1}\omega_1(x,y_1)dx}.e^{\int^{x_{\varkappa+\varrho}}\omega_{\varkappa+\varrho}(x,y_{\varkappa+\varrho})dx},$$

wonach die Gleichung (81.) die Form annimmt

$$(88.)\quad e^{\int^{x_1}\omega_1(x,y_1)dx}z_1 = c_{\varkappa+\varrho}e^{\int^{x_{\varkappa+\varrho}}\omega_{\varkappa+\varrho}(x,y_{\varkappa+\varrho})dx}z_{\varkappa+\varrho}+b_{\varkappa+\varrho},$$

in welcher $c_{\varkappa+\varrho}$ eine Constante und $b_{\varkappa+\varrho}$ weder $z_1$ noch $z_{\varkappa+\varrho}$ enthält.

Ebenso hätte man folgern können

$$(89.) \quad e^{\int^{x_1}\omega_1(x,y_1)dx} z_1 = c_{\varkappa+\sigma} e^{\int^{x_{\varkappa+\sigma}}\omega_{\varkappa+\sigma}(x,y_{\varkappa+\sigma})dx} z_{\varkappa+\sigma} + b_{\varkappa+\sigma},$$

wo $c_{\varkappa+\sigma}$ eine Constante, und $b_{\varkappa+\sigma}$ von $z_1$ und $z_{\varkappa+\sigma}$ unabhängig ist, und aus der Verbindung von (88.) und (89.)

$$(90.) \quad \begin{cases} c_{\varkappa+\varrho} e^{\int^{x_{\varkappa+\varrho}}\omega_{\varkappa+\varrho}(x,y_{\varkappa+\varrho})dx} z_{\varkappa+\varrho} + b_{\varkappa+\varrho} \\ = c_{\varkappa+\sigma} e^{\int^{x_{\varkappa+\sigma}}\omega_{\varkappa+\sigma}(x,y_{\varkappa+\sigma})dx} z_{\varkappa+\sigma} + b_{\varkappa+\sigma}, \end{cases}$$

welche Gleichung wiederum, weil $z_1$ in ihr fehlt, nach der ursprünglich gemachten Annahme eine identische sein muss; setzt man in (90.) $z_{\varkappa+\varrho} = 0$, so folgt

$$(91.) \quad b_{\varkappa+\varrho} = c_{\varkappa+\sigma} e^{\int^{x_{\varkappa+\sigma}}\omega_{\varkappa+\sigma}(x,y_{\varkappa+\sigma})dx} z_{\varkappa+\sigma} + \beta_{\varkappa+\sigma},$$

worin $\beta_{\varkappa+\sigma}$ nur noch die $z$-Grössen mit Ausnahme von $z_1$ und $z_{\varkappa+\varrho}$ algebraisch enthalten kann, und daher durch Zusammensetzung von (88.) und (91.)

$$(92.) \quad \begin{cases} e^{\int^{x_1}\omega_1(x,y_1)dx} z_1 = c_{\varkappa+\varrho} e^{\int^{x_{\varkappa+\varrho}}\omega_{\varkappa+\varrho}(x,y_{\varkappa+\varrho})dx} z_{\varkappa+\varrho} \\ \quad + c_{\varkappa+\sigma} e^{\int^{x_{\varkappa+\sigma}}\omega_{\varkappa+\sigma}(x,y_{\varkappa+\sigma})dx} z_{\varkappa+\sigma} + \beta_{\varkappa+\sigma}; \end{cases}$$

fährt man in diesen Schlüssen fort, so erhält man unter der Annahme, dass wir diejenige algebraische Relation zu Grunde legen, welche unter allen zwischen den Integralen der Differentialgleichungssysteme (79.) und (80.) bestehenden die kleinste Anzahl von Integralen des Systems (79.) enthält, als einzig mögliche Form dieser algebraischen Beziehung, in welche auch die Integrale der reducirten Differentialgleichungen eintreten,

$$(93.) \quad \begin{cases} \alpha_1 e^{\int^{x_1}\omega_1(x,y_1)dx} z_1 + \cdots + \alpha_\varkappa e^{\int^{x_\varkappa}\omega_\varkappa(x,y_\varkappa)dx} z_\varkappa \\ + \alpha_{\varkappa+1} e^{\int^{x_{\varkappa+1}}\omega_{\varkappa+1}(x,y_{\varkappa+1})dx} z_{\varkappa+1} + \cdots + \alpha_{\varkappa+\lambda} e^{\int^{x_{\varkappa+\lambda}}\omega_{\varkappa+\lambda}(x,y_{\varkappa+\lambda})dx} z_{\varkappa+\lambda} = U, \end{cases}$$

worin $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{\varkappa+\lambda}$ constante Grössen vorstellen, welche auch den Werth Null haben können, und $U$ eine algebraische Function der Integrale des Systems (80.) bedeutet.

Untersuchen wir nun, ob die Gleichung (93.) überhaupt bestehen kann; schreiben wir dieselbe, indem das Integral einer Differentialgleichung

des Systems (80.)

$$e^{-\int^{x_\varrho}\omega_\varrho(x,y_\varrho)dx}.$$

mit $\zeta_\varrho$ bezeichnet wird, in der Form

$$(94.)\qquad \alpha_1\frac{z_1}{\zeta_1}+\alpha_2\frac{z_2}{\zeta_2}+\cdots+\alpha_{\varkappa+\lambda}\frac{z_{\varkappa+\lambda}}{\zeta_{\varkappa+\lambda}} = U,$$

so wird, weil man durch Elimination von $z_1$ nach dem allgemeinen Satze eine Relation ohne diese Grösse, also gegen die Voraussetzung mit einer kleineren Anzahl von Integralen des Systems (79.) erhalten würde, wieder für $\zeta_1$ ein willkürliches Integral $\mu\zeta_1$ und für $z_1$ ein entsprechendes particuläres Integral, welches jedoch stets die Form hat

$$z_1+m\zeta_1,$$

gesetzt werden können, und es müsste dann, wenn (94.) bestehen könnte, die algebraische Beziehung erhalten bleiben. Dieselbe geht aber über — indem angenommen wird, dass $\alpha_1$ einer der von Null verschiedenen Multiplicatoren ist — in

$$(95.)\qquad \alpha_1\frac{z_1}{\mu\zeta_1}+\alpha_2\frac{z_2}{\zeta_2}+\cdots+\alpha_{\varkappa+\lambda}\frac{z_{\varkappa+\lambda}}{\zeta_{\varkappa+\lambda}} = U_1-\frac{\alpha_1 m}{\mu},$$

worin $U_1$ aus $U$ hervorgeht, indem überall, wo $\zeta_1$ vorkommt, $\mu\zeta_1$ gesetzt ist; man sieht aber sofort, dass die Gleichungen (94.) und (95.) nicht zugleich bestehen können, weil sich durch Subtraction eine nicht identische Gleichung ergeben würde, welche $z_1$ durch die Integrale des Systems (80.) ausdrückt, was nach der obigen Annahme, dass in der Gleichung (81.) mindestens zwei Integrale des Systems (79.) vorkommen und dass eine algebraische Relation mit weniger Integralen des Systems (79.) nicht existirt, unmöglich ist. Es bleibt somit nur noch der Fall zu betrachten, in dem die zwischen den Integralen der Systeme (79.) und (80.) angenommene algebraische Beziehung, welche unter allen bestehenden diejenige sein sollte, welche die kleinste Anzahl von Integralen des Systems (79.) enthält, nur *ein* Integral dieses Systems einschliesst. Fassen wir unter allen den algebraischen Relationen, welche zwischen *einem* $z$-Werthe und Integralen des Systems (80.) bestehen, diejenige auf, welche die kleinste Anzahl von Integralen des letzteren Systems enthält, die aber mindestens zwei sein soll, so werden wir die algebraische Relation zu untersuchen haben

$$(96.)\qquad F(z_1,\zeta_{\varrho_1},\zeta_{\varrho_2},\ldots\zeta_{\varrho_\lambda}) = 0,$$

welche wieder in die Form gesetzt werden kann

$$(97.)\quad \zeta_{\varrho_1} = \varphi(\zeta_{\varrho_2})$$

und für welche wieder mit Hülfe bekannter Schlüsse schon oben durchgeführte Rechnungen auf die Beziehung führen werden

$$(98.)\quad \zeta_{\varrho_1}^{\alpha_1}\zeta_{\varrho_2}^{\alpha_2}\dots\zeta_{\varrho_\lambda}^{\alpha_\lambda} = U,$$

worin $U$ eine algebraische Function von $z_1$ bedeutet; setzt man aber in (98.) für $z_1$ $z_1+\mu\zeta_1$, so wird $\zeta_{\varrho_1}$ in $m\zeta_{\varrho_1}$ übergehen, und man erhielte durch Division, indem alle $\zeta$-Grössen der linken Seite herausfallen, eine algebraische Relation zwischen $z_1$ und $\zeta_1$, die, weil mindestens zwei $\zeta$-Grössen vorkommen sollten, eine identische sein muss; wäre aber

$$\psi(z_1+\mu\zeta_1) = M\psi(z_1)$$

eine identische Gleichung, in der $\mu$ und $M$ constante Grössen bedeuten, so würde durch Differentiation nach $z_1$ und $\zeta_1$ folgen

$$\psi'(z_1+\mu\zeta_1) = M\psi'(z_1),\quad \mu\psi'(z_1+\mu\zeta_1) = 0,$$

also $\psi'(z_1)=0$, also $\psi(z_1)$ von $z_1$ unabhängig, und es würde somit in der angenommenen Relation (96.) das Integral $z_1$ garnicht vorkommen. Um also festzustellen, ob überhaupt eine Relation zwischen Integralen der Systeme (79.) und (80.) bestehen kann, in welche mindestens *ein* Integral der Differentialgleichungen (79.) eintritt, ist nur noch die Möglichkeit einer algebraischen Beziehung zwischen *einer* $z$- und *einer* $\zeta$-Grösse zu untersuchen, die wir in die Form setzen

$$(99.)\quad F(z_\varrho, \zeta_\sigma) = 0$$

oder

$$(99^a.)\quad \zeta_\sigma = \varphi(z_\varrho).$$

Da wir annehmen, dass weder $z_\varrho$ noch $\zeta_\sigma$ algebraische Functionen ihrer Variabeln sind, so werden wir wiederum folgern dürfen

$$(100.)\quad \varphi(z_\varrho+\mu\zeta_\varrho) = m\varphi(z_\varrho),$$

und diese Gleichung kann entweder identisch sein, dann muss ähnlich wie oben $\varphi'(z_\varrho)$, indem nach $z_\varrho$ und $\zeta_\varrho$ differentiirt wird, verschwinden und in Folge dessen $\varphi(z_\varrho)$ von $z_\varrho$ unabhängig sein, was nicht sein sollte, oder es liefert die Gleichung (100.) eine algebraische Beziehung zwischen einem Integrale des Systems (79.) und dem Integrale der zugehörigen reducirten

Differentialgleichung des Systems (80.) von der Form

$$(101.)\qquad f(\zeta_\varrho, z_\varrho) = 0$$

oder

$$z_\varrho = \psi(\zeta_\varrho);$$

aus dieser Gleichung folgt wieder

$$z_\varrho + m\zeta_\varrho = \psi(\mu\zeta_\varrho) = \psi(\zeta_\varrho) + m\zeta_\varrho$$

oder, da $\zeta_\varrho$ nicht algebraisch, die letztere Gleichung also eine identische sein muss, für $\zeta_\varrho = 1$

$$m = \psi(\mu) - \psi(1)$$

also

$$\psi(\mu\zeta_\varrho) = \psi(\zeta_\varrho) + \zeta_\varrho\psi(\mu) - \zeta_\varrho\psi(1),$$

und somit durch Differentiation nach $\zeta_\varrho$ und $\mu$

$$\mu\psi'(\mu\zeta_\varrho) = \psi'(\zeta_\varrho) + \psi(\mu) - \psi(1), \quad \zeta_\varrho\psi'(\mu\zeta_\varrho) = \zeta_\varrho\psi'(\mu),$$

oder nach der zweiten Gleichung

$$\psi'(\mu\zeta_\varrho) = \psi'(\mu),$$

d. h. $\psi'(\zeta_\varrho)$ von $\zeta_\varrho$ unabhängig, also

$$(102.)\qquad z_\varrho = \psi(\zeta_\varrho) = a\zeta_\varrho + b,$$

worin, wie leicht zu sehen, $a$ wiederum eine Constante sein muss, während $b$ eine algebraische Function bedeutet; die Gleichung (102.) liefert somit die einzig mögliche Elementarbeziehung zwischen Integralen der Systeme (79.) und (80.), die auch in der That existiren kann, wie man z. B. aus $\omega(x, y) = 1$, $\Omega(x, y) = x$ ersieht; eine Verbindungsgleichung zwischen $\zeta_\varrho$ und $\zeta_\sigma$ liefert dann in Verbindung mit (102.) die gesuchte Beziehung (99.) zwischen $z_\varrho$ und $\zeta_\sigma$.

Damit ist aber auch die Frage nach der algebraischen Beziehung von Integralen des Systems (79.) allein erledigt; denn greifen wir ebenfalls von den etwa bestehenden Relationen eine solche heraus, welche die kleinste Anzahl von Integralen enthält, so muss diese Anzahl mindestens gleich zwei sein, da sonst eins der Integrale selbst eine algebraische Function wäre, welcher Fall von vornherein ausgeschlossen ist; wäre nun aber

$$z_1 = \varphi(z_{x+\varrho}),$$

so würden wir ebenso wie von der Gleichung (81.) ausgehend zu der Gleichung (83.) gelangen

$$\varphi\Big(z_{x+\varrho} + \mu e^{-\int^{x_{x+\varrho}} \omega_{x+\varrho}(x, y_{x+\varrho})dx}\Big) = \varphi(z_{x+\varrho}) + m e^{-\int^{x_1} \omega_1(x, y_1)dx};$$

diese Gleichung enthält freilich nicht das Integral $z_1$, dafür sind aber Integrale von zwei reducirten Differentialgleichungen eingetreten, und wir können hieraus noch nicht wie oben schliessen, dass diese Gleichung eine identische sein muss. Ist sie eine identische, dann gelten die früher gemachten Schlüsse, und wir gelangen zu der nicht auf unsern Fall bezüglichen Relation (94.); ist dieselbe dagegen nicht identisch, so liefert sie eine algebraische Beziehung zwischen einigen Integralen des Systems (79.) und zwei Integralen des Systems (80.); diese Relation kann nach den früheren Auseinandersetzungen nicht aus solchen zusammengesetzt sein, welche zwei der Integrale des Systems (79.) enthalten, ausserdem ergiebt sich, dass sie auch nicht aus den Relationen entstehen kann, welche z. B. nur $z_{\varkappa+1}$ und als geringste Anzahl von Integralen des Systems (80.) zwei enthalten, also grade der Fall der obigen Gleichung; es werden somit die Relationen, aus denen sich eine etwaige Beziehung zwischen Integralen des Systemes (79.) zusammensetzt, aus den durch die Gleichung (102.) gegebenen Fundamentalrelationen bestehen. In der That wird, weil

$$\zeta_\varrho = \frac{z_\varrho - b}{a}$$

ist, eine jede algebraische Beziehung zwischen den $\zeta$-Grössen eine analoge zwischen den $z$-Grössen nach sich ziehen.

Es mag noch bemerkt werden, dass die Annahme, einige der Integrale des Systems (80.), d. h. Ausdrücke der Form

$$e^{-\int \omega_\varrho(x_\varrho, y_\varrho)dx_\varrho}$$

seien algebraisch, nothwendig für die Integrale der entsprechenden Differentialgleichungen des Systems (79.) nach sich zieht, dass diese, welche die Form haben

$$ce^{-\int \omega_\varrho(x_\varrho, y_\varrho)dx_\varrho} + e^{-\int \omega_\varrho(x_\varrho, y_\varrho)dx_\varrho} \int \Omega(x_\varrho, y_\varrho) e^{\int \omega_\varrho(x_\varrho, y_\varrho)dx_\varrho} dx_\varrho,$$

nichts anderes als das Product einer algebraischen Function in ein *Abel*sches Integral sind, und die Relation zwischen solchen Integralformen gehört in die Untersuchung der algebraischen Beziehungen zwischen *Abel*schen Integralen, für die als *allgemeinste* Form die additive lineare Relation für das Transformationsproblem und im speciellen Falle für das *Abel*sche Theorem und den Reductionssatz früher hergeleitet wurden.

Betrachten wir nunmehr irreductible Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{d^2z}{dx^2} = f(x, y),$$

für welche $f(x, y)$ der oben entwickelten Bedingung unterworfen ist, und stellen wir hier, ohne erst auf die algebraischen Beziehungen zwischen den Integralen eines Systems ähnlicher Differentialgleichungen für verschiedene $f$ und verschiedene algebraische Functionen $y$ näher einzugehen, gleich die Frage nach dem dem *Abel*schen Theoreme analogen Satze, suchen also eine algebraische Beziehung von der Form

$$(103.) \qquad F(z_1, z_2, \dots z_\varkappa, \ z_{\varkappa+1}, z_{\varkappa+2} \dots z_{\varkappa+\lambda}) = 0,$$

die wir in die Form setzen wollen

$$(104.) \qquad z_1 = \varphi(z_{\varkappa+1}, \dots z_{\varkappa+\lambda}).$$

Wir wenden hier den ersten der beiden obigen Sätze an, aus dem hervorgeht, dass dann auch die Gleichung

$$(105.) \qquad z_1 + \mu = \varphi(z_{\varkappa+1} + m_1 x_{\varkappa+1} + n_1, \dots z_{\varkappa+\lambda} + m_\lambda x_{\varkappa+\lambda} + n_\lambda)$$

bestehen muss, in welcher $m_1, n_1, \dots m_\lambda, n_\lambda$ von $\mu$ abhängige Constanten bedeuten; aus (104.) und (105.) folgt

$$(106.) \qquad \varphi(z_{\varkappa+1} + m_1 x_{\varkappa+1} + n_1, \dots z_{\varkappa+\lambda} + m_\lambda x_{\varkappa+\lambda} + n_\lambda) = \varphi(z_{\varkappa+1}, \dots z_{\varkappa+\lambda}) + \mu.$$

Nehmen wir nun an, dass nicht schon zwischen $z_2, \dots z_\varkappa, z_{\varkappa+1}, \dots z_{\varkappa+\lambda}$ eine algebraische Beziehung besteht, so wird die Gleichung (106.) eine identische sein müssen und somit nach $z_{\varkappa+1}, z_{\varkappa+2}, \dots z_{\varkappa+\lambda}, \mu, \nu$ differentiirt werden dürfen; differentiirt man nach $z_{\varkappa+\varrho}$, so folgt

$$\frac{\partial \varphi(z_{\varkappa+1} + m_1 x_{\varkappa+1} + n_1, \dots z_{\varkappa+\lambda} + m_\lambda x_{\varkappa+\lambda} + n_\lambda)}{\partial(z_{\varkappa+\varrho} + m_\varrho x_{\varkappa+\varrho} + n_\varrho)} = \frac{\partial \varphi(z_{\varkappa+1}, \dots z_{\varkappa+\lambda})}{\partial z_{\varkappa+\varrho}},$$

und differentiirt man nach $\mu$, so ergiebt sich

$$\sum_1^\lambda {}_\varrho \frac{\partial \varphi(z_{\varkappa+1} + m_1 x_{\varkappa+1} + n_1, \dots z_{\varkappa+\lambda} + m_\lambda x_{\varkappa+\lambda} + n_\lambda)}{\partial(z_{\varkappa+\varrho} + m_\varrho x_{\varkappa+\varrho} + n_\varrho)} \left( x_{\varkappa+\varrho} \frac{\partial m_\varrho}{\partial \mu} + \frac{\partial n_\varrho}{\partial \mu} \right) = 1,$$

und daher aus den beiden Beziehungen die Gleichung

$$(107.) \qquad \sum_1^\lambda {}_\varrho \frac{\partial \varphi(z_{\varkappa+1}, \dots z_{\varkappa+\lambda})}{\partial z_{\varkappa+\varrho}} \left( x_{\varkappa+\varrho} \frac{\partial m_\varrho}{\partial \mu} + \frac{\partial n_\varrho}{\partial \mu} \right) = 1,$$

welche, da sie für beliebige Werthe von $z_{\varkappa+1}, \dots z_{\varkappa+\lambda}$ bestehen muss, als eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung zur Bestimmung der Function $\varphi$ mit den unabhängigen Variabeln $z_{\varkappa+1}, \dots z_{\varkappa+\lambda}$ und von den

Variabeln unabhängigen Coefficienten (also für die Integration constanten Coefficienten) aufgefasst werden kann. Bekanntlich wird das Integral derselben aus dem System der totalen Differentialgleichungen

$$\frac{d\varphi}{1} = \frac{dz_{\varkappa+1}}{x_{\varkappa+1}\frac{\partial m_1}{\partial\mu}+\frac{\partial n_1}{\partial\mu}} = \cdots = \frac{dz_{\varkappa+\lambda}}{x_{\varkappa+\lambda}\frac{\partial m_\lambda}{\partial\mu}+\frac{\partial n_\lambda}{\partial\mu}}$$

gefunden, deren Integrale

$$(108.)\quad \begin{cases} \left(x_{\varkappa+\varrho}\frac{\partial m_\varrho}{\partial\mu}+\frac{\partial n_\varrho}{\partial\mu}\right)z_{\varkappa+1}-\left(x_{\varkappa+1}\frac{\partial m_1}{\partial\mu}+\frac{\partial n_1}{\partial\mu}\right)z_{\varkappa+\varrho} = \alpha_1 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \left(x_{\varkappa+\varrho}\frac{\partial m_\varrho}{\partial\mu}+\frac{\partial n_\varrho}{\partial\mu}\right)z_{\varkappa+\lambda}-\left(x_{\varkappa+\lambda}\frac{\partial m_\lambda}{\partial\mu}+\frac{\partial n_\lambda}{\partial\mu}\right)z_{\varkappa+\varrho} = \alpha_\lambda \\ \left(x_{\varkappa+\varrho}\frac{\partial m_\varrho}{\partial\mu}+\frac{\partial n_\varrho}{\partial\mu}\right)\varphi - z_{\varkappa+\varrho} = \alpha_\varrho \end{cases}$$

sind, worin $\varrho$ irgend eine bestimmte der Zahlen $1, 2 \dots \lambda$ bedeutet, und welche das allgemeine Integral der Gleichung (107.), indem $\varphi = z_1$ gesetzt wird, in der Form liefern:

$$(109.)\quad \begin{cases} F\Big\{\left(x_{\varkappa+\varrho}\frac{\partial m_\varrho}{\partial\mu}+\frac{\partial n_\varrho}{\partial\mu}\right)z_1 - z_{\varkappa+\varrho}, \\ \left(x_{\varkappa+\varrho}\frac{\partial m_\varrho}{\partial\mu}+\frac{\partial n_\varrho}{\partial\mu}\right)z_{\varkappa+1}-\left(x_{\varkappa+1}\frac{\partial m_1}{\partial\mu}+\frac{\partial n_1}{\partial\mu}\right)z_{\varkappa+\varrho}, \dots \\ \left(x_{\varkappa+\varrho}\frac{\partial m_\varrho}{\partial\mu}+\frac{\partial n_\varrho}{\partial\mu}\right)z_{\varkappa+\lambda}-\left(x_{\varkappa+\lambda}\frac{\partial m_\lambda}{\partial\mu}+\frac{\partial n_\lambda}{\partial\mu}\right)z_{\varkappa+\varrho}\Big\} = 0. \end{cases}$$

Da diese Beziehung, also auch, wie leicht zu erkennen, die einzelnen Argumente unverändert bleiben sollen, wenn $z_1$ um $\mu$ und $z_{\varkappa+\sigma}$ um $m_\sigma x_{\varkappa+\sigma}+n_\sigma$ vermehrt werden, so folgt aus der Form des ersten Argumentes die identische Gleichung

$$\left(x_{\varkappa+\varrho}\frac{\partial m_\varrho}{\partial\mu}+\frac{\partial n_\varrho}{\partial\mu}\right)\mu-(m_\varrho x_{\varkappa+\varrho}+n_\varrho) = 0$$

oder

$$\frac{dm_\varrho}{m_\varrho} = \frac{d\mu}{\mu}, \quad \frac{dn_\varrho}{n_\varrho} = \frac{d\mu}{\mu},$$

und aus den anderen Argumenten

$$\left(x_{\varkappa+\varrho}\frac{\partial m_\varrho}{\partial\mu}+\frac{\partial n_\varrho}{\partial\mu}\right)(m_\sigma x_{\varkappa+\sigma}+n_\sigma)-\left(x_{\varkappa+\sigma}\frac{\partial m_\sigma}{\partial\mu}+\frac{\partial n_\sigma}{\partial\mu}\right)(m_\varrho x_{\varkappa+\varrho}+n_\varrho) = 0$$

oder

$$\frac{dm_\varrho}{m_\varrho} = \frac{dm_\sigma}{m_\sigma}, \quad \frac{dn_\varrho}{n_\varrho} = \frac{dm_\sigma}{m_\sigma}, \quad \frac{dm_\varrho}{m_\varrho} = \frac{dn_\sigma}{n_\sigma}, \quad \frac{dn_\varrho}{n_\varrho} = \frac{dn_\sigma}{n_\sigma},$$

und somit die Abhängigkeiten der $m$- und $n$-Grössen von der $\mu$-Grösse:

$$(110.)\qquad m_\sigma = c_\sigma . \mu, \quad n_\sigma = \varkappa_\sigma . \mu$$

für $\sigma = 1, 2, \dots \lambda$, wenn $c_\sigma$ und $\varkappa_\sigma$ von $\mu$ unabhängige Constanten bedeuten, so dass die Gleichung (109.) in die folgende übergeht:

$$(111.)\qquad \begin{cases} F\{(c_\varrho x_{\varkappa+\varrho}+\varkappa_\varrho)z_1 - z_{\varkappa+\varrho},\ (c_\varrho x_{\varkappa+\varrho}+\varkappa_\varrho)z_{\varkappa+1}-(c_1 x_{\varkappa+1}+\varkappa_1)z_{\varkappa+\varrho}, \dots \\ \qquad (c_\varrho x_{\varkappa+\varrho}+\varkappa_\varrho)z_{\varkappa+\lambda}-(c_\lambda x_{\varkappa+\lambda}+\varkappa_\lambda)z_{\varkappa+\varrho}\} = 0, \end{cases}$$

welche Gleichung die allgemeinste algebraische Relation zwischen Integralen der vorgelegten Differentialgleichung für algebraisch unter einander zusammenhängende Argumente liefert.

War die Differentialgleichung zweiter Ordnung eine reductible, so dass nach den obigen Ausführungen

$$(112.)\qquad E = J(x+\alpha_1) - F(x, y)$$

ist, worin $E$ ein Integral der Differentialgleichung, $J$ das erste Differential desselben also ein *Abel*sches Integral, $F(x, y)$ eine algebraische Function bedeutet, so wird wegen

$$J = \frac{E}{x+\alpha_1} + \frac{F(x, y)}{x+\alpha_1}$$

die dem *Abel*schen Theorem entsprechende algebraische Relation offenbar die Form haben

$$\frac{1}{x_1+\alpha_1}\int^{x_1} dx \int f(x, y)\,dx + \frac{1}{x_2+\alpha_1}\int^{x_2} dx \int f(x, y)\,dx + \cdots$$
$$\cdots + \frac{1}{x_{\varkappa+\lambda}+\alpha_1}\int^{x_{\varkappa+\lambda}} dx \int f(x, y)\,dx = U.$$

Wir gehen endlich dazu über, die Frage nach dem dem *Abel*schen Theoreme analogen Satze für die allgemeinen homogenen linearen irreductiblen Differentialgleichungen aufzuwerfen.

Sei

$$(113.)\qquad \frac{d^m z}{dx^m} + y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + y_2 \frac{d^{m-2} z}{dx^{m-2}} + \cdots + y_{m-1}\frac{dz}{dx} + y_m z = 0$$

vorgelegt, worin $y_1, y_2, \dots y_m$ irreductible algebraische Functionen bedeuten sollen, seien ferner

$$z_1, \quad z_2, \quad \dots \quad z_m$$

$m$ particuläre Fundamentalintegrale dieser Differentialgleichung, und mögen die Werthe von $z_\varrho$ für die Argumente

$$x_1, \quad x_2, \quad \dots \quad x_\varkappa, \quad x_{\varkappa+1}, \quad \dots \quad x_{\varkappa+\lambda}$$

mit

$$z_{\varrho 1},\quad z_{\varrho 2},\quad \dots\quad z_{\varrho\varkappa},\quad z_{\varrho\varkappa+1},\quad \dots\quad z_{\varrho\varkappa+\lambda}$$

bezeichnet werden, so soll die Form einer algebraischen Beziehung untersucht werden, die zwischen den particulären Integralen $z_1,\ z_2,\ \dots\ z_m$ für die bezeichneten Argumente stattfindet.

Setzt man diese Beziehung in die Form

$$(114.)\quad F(z_{11}, z_{21}, \dots z_{m1}, z_{1\varkappa+1}, z_{2\varkappa+1}, \dots z_{m\varkappa+1}, \dots z_{1\varkappa+\lambda}, z_{2\varkappa+\lambda}, \dots z_{m\varkappa+\lambda}) = 0,$$

indem man die Werthe der Integrale für die anderen unabhängigen Variabeln $x_2,\ \dots\ x_\varkappa$ in die Bezeichnung nicht aufnimmt, so folgt aus der Annahme der Irreductibilität der Differentialgleichung mit Hülfe des ersten Satzes von der Erhaltung der algebraischen Beziehung, dass, wenn statt $z_{11}$ resp. $z_{21},\ \dots\ z_{m1}$ gesetzt werden, statt der Grössen $z_{\alpha\varkappa+\varrho}$ Grössen von der Form

$$a_{1\varrho} z_{1\varkappa+\varrho} + a_{2\varrho} z_{2\varkappa+\varrho} + \cdots + a_{m\varrho} z_{m\varkappa+\varrho}$$

zu substituiren sind, so dass sich $m$ Gleichungen ergeben, aus denen sich die Grössen $z_{11},\ z_{21},\ \dots\ z_{m1}$ in der Form darstellen lassen:

$$(115.)\quad \begin{cases} z_{11} = \varphi_1(z_{1\varkappa+1},\ z_{2\varkappa+1},\ \dots\ z_{m\varkappa+1},\ \dots\ z_{1\varkappa+\lambda},\ \dots\ z_{m\varkappa+\lambda}) \\ z_{21} = \varphi_2(z_{1\varkappa+1},\ z_{2\varkappa+1},\ \dots\ z_{m\varkappa+1},\ \dots\ z_{1\varkappa+\lambda},\ \dots\ z_{m\varkappa+\lambda}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_{m1} = \varphi_m(z_{1\varkappa+1},\ z_{2\varkappa+1},\ \dots\ z_{m\varkappa+1},\ \dots\ z_{1\varkappa+\lambda},\ \dots\ z_{m\varkappa+\lambda}). \end{cases}$$

Setzt man nun in der Gleichung

$$(116.)\quad z_{\varrho 1} = \varphi_\varrho(z_{1\varkappa+1},\ z_{2\varkappa+1},\ \dots\ z_{m\varkappa+1},\ \dots\ z_{1\varkappa+\lambda},\ \dots\ z_{m\varkappa+\lambda})$$

$\mu_\varrho z_{\varrho 1}$ statt $z_{\varrho 1}$, so wird man wieder statt $z_{\alpha\varkappa+\beta}$ zu substituiren haben:

$$m_{1\beta}^{(\alpha)} z_{1\varkappa+\beta} + m_{2\beta}^{(\alpha)} z_{2\varkappa+\beta} + \cdots + m_{m\beta}^{(\alpha)} z_{m\varkappa+\beta}$$

und erhält somit

$$(117.)\quad \mu_\varrho z_{\varrho 1} = \varphi_\varrho(m_{11}^{(1)} z_{1\varkappa+1} + m_{21}^{(1)} z_{2\varkappa+1} + \cdots + m_{m1}^{(1)} z_{m\varkappa+1},\ \dots)$$

und daher aus (116.) und (117.) die Functionalgleichung

$$(118.)\quad \begin{cases} \varphi_\varrho(m_{11}^{(1)} z_{1\varkappa+1} + \cdots + m_{m1}^{(1)} z_{m\varkappa+1},\ \dots\ m_{1\lambda}^{(m)} z_{1\varkappa+\lambda} + \cdots + m_{m\lambda}^{(m)} z_{m\varkappa+\lambda}) \\ \quad = \mu_\varrho \varphi_\varrho(z_{1\varkappa+1},\ z_{2\varkappa+1},\ \dots\ z_{m\varkappa+1},\ \dots\ z_{1\varkappa+\lambda},\ \dots\ z_{m\varkappa+\lambda}), \end{cases}$$

in welcher $\mu_\varrho$ eine willkürliche und die Grössen $m_{\alpha\beta}^{(\gamma)}$ von dieser abhängige Constanten bedeuten.

Nimmt man nun an, dass die der Untersuchung zu Grunde gelegte Gleichung (114.) eine algebraische Beziehung zwischen den particulären

21*

Integralen der linearen Differentialgleichung für die kleinste Anzahl $\lambda+1$ der algebraisch von einander abhängigen Argumente liefert, so wird die Gleichung (118.), weil in ihr nicht mehr die particulären Integrale für das Argument $x_1$ vorkommen, eine identische sein müssen und daher für willkürliche $z_{\alpha\beta}$-Werthe und willkürliche Werthe von $\mu_\varrho$ gültig sein. Bezeichnet man nun zur Abkürzung die Argumente der auf der linken Seite der Gleichung (118.) befindlichen $\varphi$-Function mit

$$\mathrm{I}_1,\ \mathrm{II}_1,\ \dots\ \mathrm{M}_1,\ \mathrm{I}_2,\ \mathrm{II}_2,\ \dots\ \mathrm{M}_2,\ \dots\ \mathrm{I}_\lambda,\ \mathrm{II}_\lambda,\ \dots\ \mathrm{M}_\lambda$$

und diese zugehörige $\varphi$-Function mit $\Phi_\varrho$, so folgt durch Differentiation der Gleichung (118.) resp. nach $z_{1\,\varkappa+1},\ \dots\ z_{m\varkappa+1},\ \dots\ z_{1\,\varkappa+\lambda},\ \dots\ z_{m\varkappa+\lambda}$

$$(119.)\quad \begin{cases} m_{1\sigma}^{(1)}\dfrac{\partial\Phi_\varrho}{\partial\mathrm{I}_\sigma}+m_{1\sigma}^{(2)}\dfrac{\partial\Phi_\varrho}{\partial\mathrm{II}_\sigma}+\cdots+m_{1\sigma}^{(m)}\dfrac{\partial\Phi_\varrho}{\partial\mathrm{M}_\sigma} = \mu_\varrho\dfrac{\partial\varphi_\varrho}{\partial z_{1\,\varkappa+\sigma}}, \\ m_{2\sigma}^{(1)}\dfrac{\partial\Phi_\varrho}{\partial\mathrm{I}_\sigma}+m_{2\sigma}^{(2)}\dfrac{\partial\Phi_\varrho}{\partial\mathrm{II}_\sigma}+\cdots+m_{2\sigma}^{(m)}\dfrac{\partial\Phi_\varrho}{\partial\mathrm{M}_\sigma} = \mu_\varrho\dfrac{\partial\varphi_\varrho}{\partial z_{2\,\varkappa+\sigma}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ m_{m\sigma}^{(1)}\dfrac{\partial\Phi_\varrho}{\partial\mathrm{I}_\sigma}+m_{m\sigma}^{(2)}\dfrac{\partial\Phi_\varrho}{\partial\mathrm{II}_\sigma}+\cdots+m_{m\sigma}^{(m)}\dfrac{\partial\Phi_\varrho}{\partial\mathrm{M}_\sigma} = \mu_\varrho\dfrac{\partial\varphi_\varrho}{\partial z_{m\varkappa+\sigma}}, \end{cases}$$

und wenn man (118.) nach $\mu_\varrho$ differentiirt,

$$(120.)\quad \begin{cases} \sum_1^\lambda{}_\sigma\Big\{\dfrac{\partial\Phi_\varrho}{\partial\mathrm{I}_\sigma}\Big(z_{1\varkappa+\sigma}\dfrac{dm_{1\sigma}^{(1)}}{d\mu_\varrho}+z_{2\,\varkappa+\sigma}\dfrac{dm_{2\sigma}^{(1)}}{d\mu_\varrho}+\cdots+z_{m\varkappa+\sigma}\dfrac{dm_{m\sigma}^{(1)}}{d\mu_\varrho}\Big) \\ +\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ +\dfrac{\partial\Phi_\varrho}{\partial\mathrm{M}_\sigma}\Big(z_{1\varkappa+\sigma}\dfrac{dm_{1\sigma}^{(m)}}{d\mu_\varrho}+z_{2\,\varkappa+\sigma}\dfrac{dm_{2\sigma}^{(m)}}{d\mu_\varrho}+\cdots+z_{m\varkappa+\sigma}\dfrac{dm_{m\sigma}^{(m)}}{d\mu_\varrho}\Big)\Big\} = \varphi_\varrho. \end{cases}$$

Die aus dem Gleichungsysteme (119.) sich ergebenden Werthe für

$$\frac{\partial\Phi_\varrho}{\partial\mathrm{I}_\sigma},\quad \frac{\partial\Phi_\varrho}{\partial\mathrm{II}_\sigma},\quad \dots\quad \frac{\partial\Phi_\varrho}{\partial\mathrm{M}_\sigma}$$

haben die Form

$$A_{1\sigma}^{(\lambda)}\frac{\partial\varphi_\varrho}{\partial z_{1\,\varkappa+\sigma}}+A_{2\sigma}^{(\lambda)}\frac{\partial\varphi_\varrho}{\partial z_{2\,\varkappa+\sigma}}+\cdots+A_{m\sigma}^{(\lambda)}\frac{\partial\varphi_\varrho}{\partial z_{m\,\varkappa+\sigma}},$$

worin $A_{1\sigma}^{(\lambda)}$, $A_{2\sigma}^{(\lambda)}$, ... $A_{m\sigma}^{(\lambda)}$ von $\mu$ abhängige Constanten bedeuten, und, wenn diese Werthe in die Gleichung (120.) eingesetzt werden, so ergiebt sich

$$(121.)\quad \begin{cases} \sum_1^\lambda{}_\sigma\Big\{\dfrac{\partial\varphi_\varrho}{\partial z_{1\varkappa+\sigma}}(a_{1\sigma}^{(1)}z_{1\varkappa+\sigma}+a_{2\sigma}^{(1)}z_{2\,\varkappa+\sigma}+\cdots+a_{m\sigma}^{(1)}z_{m\varkappa+\sigma}) \\ +\dfrac{\partial\varphi_\varrho}{\partial z_{2\,\varkappa+\sigma}}(a_{1\sigma}^{(2)}z_{1\varkappa+\sigma}+\cdots+a_{m\sigma}^{(2)}z_{m\varkappa+\sigma})+\cdots \\ \cdots+\dfrac{\partial\varphi_\varrho}{\partial z_{m\,\varkappa+\sigma}}(a_{1\sigma}^{(m)}z_{1\varkappa+\sigma}+\cdots+a_{m\sigma}^{(m)}z_{m\varkappa+\sigma})\Big\} = \varphi_\varrho, \end{cases}$$

somit eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung zur Bestimmung von $\varphi_\varrho$.

Bekanntlich reducirt sich die Integration dieser partiellen Differentialgleichung auf die Integration des gleichzeitigen Systems totaler Differentialgleichungen

$$(122.)\quad \begin{cases} \dfrac{d\varphi_\varrho}{\varphi_\varrho} = \dfrac{dz_{1\,\varkappa+1}}{a_{11}^{(1)} z_{1\,\varkappa+1} + \cdots + a_{m1}^{(1)} z_{m\,\varkappa+1}} = \cdots = \dfrac{dz_{m\,\varkappa+1}}{a_{11}^{(m)} z_{1\,\varkappa+1} + \cdots + a_{m1}^{(m)} z_{m\,\varkappa+1}}, \\ \quad = \dfrac{dz_{1\,\varkappa+2}}{a_{12}^{(1)} z_{1\,\varkappa+2} + \cdots + a_{m2}^{(1)} z_{m\,\varkappa+2}} = \cdots = \dfrac{dz_{m\,\varkappa+2}}{a_{12}^{(m)} z_{1\,\varkappa+2} + \cdots + a_{m2}^{(m)} z_{m\,\varkappa+2}}, \\ \quad = \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \quad = \dfrac{dz_{1\,\varkappa+\lambda}}{a_{1\lambda}^{(1)} z_{1\,\varkappa+\lambda} + \cdots + a_{m\lambda}^{(1)} z_{m\,\varkappa+\lambda}} = \cdots = \dfrac{dz_{m\,\varkappa+\lambda}}{a_{1\lambda}^{(m)} z_{1\,\varkappa+\lambda} + \cdots + a_{m\lambda}^{(m)} z_{m\,\varkappa+\lambda}}, \end{cases}$$

oder mit Hülfe einer Variabeln $u$ auf das System:

$$(123.)\quad \begin{cases} \dfrac{dz_{1\,\varkappa+1}}{du} = a_{11}^{(1)} z_{1\,\varkappa+1} + \cdots + a_{m1}^{(1)} z_{m\,\varkappa+1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \dfrac{dz_{m\,\varkappa+1}}{du} = a_{11}^{(m)} z_{1\,\varkappa+1} + \cdots + a_{m1}^{(m)} z_{m\,\varkappa+1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \dfrac{dz_{1\,\varkappa+\lambda}}{du} = a_{1\lambda}^{(1)} z_{1\,\varkappa+\lambda} + \cdots + a_{m\lambda}^{(1)} z_{m\,\varkappa+\lambda} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \dfrac{dz_{m\,\varkappa+\lambda}}{du} = a_{1\lambda}^{(m)} z_{1\,\varkappa+\lambda} + \cdots + a_{m\lambda}^{(m)} z_{m\,\varkappa+\lambda} \\ \dfrac{d\varphi_\varrho}{du} = \varphi_\varrho. \end{cases}$$

Bezeichnet man die Lösungen der Gleichung

$$(124.)\quad \begin{vmatrix} a_{1\sigma}^{(1)} - \mu_\sigma & a_{2\sigma}^{(1)} & \cdots & a_{m\sigma}^{(1)} \\ a_{1\sigma}^{(2)} & a_{2\sigma}^{(2)} - \mu_\sigma & \cdots & a_{m\sigma}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1\sigma}^{(m)} & a_{2\sigma}^{(m)} & \cdots & a_{m\sigma}^{(m)} - \mu_\sigma \end{vmatrix} = 0$$

mit

$$\mu_\sigma^{(1)} \quad \mu_\sigma^{(2)} \quad \ldots \quad \mu_\sigma^{(m)},$$

und bestimmt eine Reihe von Grössen $A$ als Lösungen des Systemes linearer Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mu_\sigma^{(\varrho)} A_{1\sigma}^{(\varrho)} &= a_{1\sigma}^{(1)} A_{1\sigma}^{(\varrho)} + a_{2\sigma}^{(1)} A_{2\sigma}^{(\varrho)} + \cdots + a_{m\sigma}^{(1)} A_{m\sigma}^{(\varrho)} \\ \mu_\sigma^{(\varrho)} A_{2\sigma}^{(\varrho)} &= a_{1\sigma}^{(2)} A_{1\sigma}^{(\varrho)} + a_{2\sigma}^{(2)} A_{2\sigma}^{(\varrho)} + \cdots + a_{m\sigma}^{(2)} A_{m\sigma}^{(\varrho)} \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \mu_\sigma^{(\varrho)} A_{m\sigma}^{(\varrho)} &= a_{1\sigma}^{(m)} A_{1\sigma}^{(\varrho)} + a_{2\sigma}^{(m)} A_{2\sigma}^{(\varrho)} + \cdots + a_{m\sigma}^{(m)} A_{m\sigma}^{(\varrho)}, \end{aligned}$$

so ergeben sich bekanntlich für das System der Differentialgleichungen (123.) die Integrale

$$(125.)\quad \begin{cases} z_{1\varkappa+\sigma} = c_{1\sigma}A^{(1)}_{1\sigma}e^{\mu^{(1)}_\sigma u}+c_{2\sigma}A^{(2)}_{1\sigma}e^{\mu^{(2)}_\sigma u}+\cdots+c_{m\sigma}A^{(m)}_{1\sigma}e^{\mu^{(m)}_\sigma u} \\ z_{2\varkappa+\sigma} = c_{1\sigma}A^{(1)}_{2\sigma}e^{\mu^{(1)}_\sigma u}+c_{2\sigma}A^{(2)}_{2\sigma}e^{\mu^{(2)}_\sigma u}+\cdots+c_{m\sigma}A^{(m)}_{2\sigma}e^{\mu^{(m)}_\sigma u} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{m\varkappa+\sigma} = c_{1\sigma}A^{(1)}_{m\sigma}e^{\mu^{(1)}_\sigma u}+c_{2\sigma}A^{(2)}_{m\sigma}e^{\mu^{(2)}_\sigma u}+\cdots+c_{m\sigma}A^{(m)}_{m\sigma}e^{\mu^{(m)}_\sigma u} \end{cases}$$

und

$$(126.)\quad \varphi_\varrho = c e^u$$

oder

$$(127.)\quad \begin{cases} z_{1\varkappa+\sigma} = c_{1\sigma}A^{(1)}_{1\sigma}\left(\frac{\varphi_\varrho}{c}\right)^{\mu^{(1)}_\sigma}+c_{2\sigma}A^{(2)}_{1\sigma}\left(\frac{\varphi_\varrho}{c}\right)^{\mu^{(2)}_\sigma}+\cdots+c_{m\sigma}A^{(m)}_{1\sigma}\left(\frac{\varphi_\varrho}{c}\right)^{\mu^{(m)}_\sigma} \\ z_{2\varkappa+\sigma} = c_{1\sigma}A^{(1)}_{2\sigma}\left(\frac{\varphi_\varrho}{c}\right)^{\mu^{(1)}_\sigma}+c_{2\sigma}A^{(2)}_{2\sigma}\left(\frac{\varphi_\varrho}{c}\right)^{\mu^{(2)}_\sigma}+\cdots+c_{m\sigma}A^{(m)}_{2\sigma}\left(\frac{\varphi_\varrho}{c}\right)^{\mu^{(m)}_\sigma} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{m\varkappa+\sigma} = c_{1\sigma}A^{(1)}_{m\sigma}\left(\frac{\varphi_\varrho}{c}\right)^{\mu^{(1)}_\sigma}+c_{2\sigma}A^{(2)}_{m\sigma}\left(\frac{\varphi_\varrho}{c}\right)^{\mu^{(2)}_\sigma}+\cdots+c_{m\sigma}A^{(m)}_{m\sigma}\left(\frac{\varphi_\varrho}{c}\right)^{\mu^{(m)}_\sigma}. \end{cases}$$

Da diese Gleichungen nach den Constanten aufgelöst Ausdrücke von der Form liefern:

$$(128.)\quad c_{\tau\sigma} = \varphi_\varrho^{-\mu^{(\tau)}_\sigma}\{B^{(\tau)}_{1\sigma}z_{1\varkappa+\sigma}+B^{(\tau)}_{2\sigma}z_{2\varkappa+\sigma}+\cdots+B^{(\tau)}_{m\sigma}z_{m\varkappa+\sigma}\},$$

worin die $B$ wiederum Constanten bedeuten, so wird das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung (121.), wenn $\varphi_\varrho$ wieder durch $z_{\varrho 1}$ ersetzt wird, durch die Gleichung gegeben sein

$$(129.)\quad \begin{cases} F\{z_{\varrho 1}^{-\mu^{(1)}_1}[B^{(1)}_{11}z_{1\varkappa+1}+B^{(1)}_{21}z_{2\varkappa+1}+\cdots+B^{(1)}_{m1}z_{m\varkappa+1}], \\ \quad z_{\varrho 1}^{-\mu^{(2)}_1}[B^{(2)}_{11}z_{1\varkappa+1}+B^{(2)}_{21}z_{2\varkappa+1}+\cdots+B^{(2)}_{m1}z_{m\varkappa+1}], \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad z_{\varrho 1}^{-\mu^{(m)}_1}[B^{(m)}_{11}z_{1\varkappa+1}+\cdots\qquad+B^{(m)}_{m1}z_{m\varkappa+1}], \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad z_{\varrho 1}^{-\mu^{(1)}_\lambda}[B^{(1)}_{1\lambda}z_{1\varkappa+\lambda}+\cdots\qquad+B^{(1)}_{m\lambda}z_{m\varkappa+\lambda}], \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad z_{\varrho 1}^{-\mu^{(m)}_\lambda}[B^{(m)}_{1\lambda}z_{1\varkappa+\lambda}+\cdots\qquad+B^{(m)}_{m\lambda}z_{m\varkappa+\lambda}] = 0, \end{cases}$$

wenn $F$ eine willkürliche Function bezeichnet, und die Grössen $B$ von den anderen unabhängigen Variabeln $x_2, \dots x_\varkappa$ und den zugehörigen Integralen algebraisch abhängen werden. In dieser Form wird also das dem *Abel*schen

Satze analoge Theorem für eine algebraische Beziehung zwischen den particulären Integralen einer homogenen linearen Differentialgleichung für algebraisch unter einander verbundene Argumente enthalten sein. Es mag noch bemerkt werden, dass vermöge der oben aufgestellten Functionalgleichung, wie leicht zu sehen, die Beziehungen werden statthaben müssen

$$
\begin{aligned}
m_{1\sigma}^{(1)} B_{1\sigma}^{(\tau)} + m_{1\sigma}^{(2)} B_{2\sigma}^{(\tau)} + \cdots + m_{1\sigma}^{(m)} B_{m\sigma}^{(\tau)} &= \mu_\varrho^{-\mu_\sigma^{(\tau)}} B_{1\sigma}^{(\tau)} \\
m_{2\sigma}^{(1)} B_{1\sigma}^{(\tau)} + m_{2\sigma}^{(2)} B_{2\sigma}^{(\tau)} + \cdots + m_{2\sigma}^{(m)} B_{m\sigma}^{(\tau)} &= \mu_\varrho^{-\mu_\sigma^{(\tau)}} B_{2\sigma}^{(\tau)} \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
m_{m\sigma}^{(1)} B_{1\sigma}^{(\tau)} + m_{m\sigma}^{(2)} B_{2\sigma}^{(\tau)} + \cdots + m_{m\sigma}^{(m)} B_{m\sigma}^{(\iota)} &= \mu_\varrho^{-\mu_\sigma^{(\tau)}} B_m,
\end{aligned}
$$

welche, da die Grössen $B$ und $\mu_\varrho$ vermöge der Gleichungen (119.), (120.), (121.) durch die $m$ und deren nach $\mu_\varrho$ genommene Differentialquotienten ausgedrückt sind, die Functionalbeziehungen zwischen $\mu_\varrho$ und den $m$-Grössen liefern werden.

Wien, im April 1880.

---

# Zur Theorie der Discriminanten.

(Von Herrn *E. Netto* in Strassburg i. E.)

Herr *Kronecker* gab in seinen Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Gleichungen im Wintersemester 1870—71 Untersuchungen über die Discriminanten der Functionen, welche einer und derselben Gattung angehören. Es wurde dabei eine irreductible Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades

$$f(x, v) \equiv x^n - f_1(v) . x^{n-1} + f_2(v) . x^{n-2} - \cdots = 0$$

zwischen $x$ und $v$ zu Grunde gelegt; ihre Wurzeln mögen $x_1, \ldots x_n$ lauten. Aus diesen $n$ Grössen wird eine ganze rationale Function $\varphi(x_1, \ldots x_n)$ gebildet. Hat $\varphi$ bei den Vertauschungen der $x$ unter einander $\varrho$ Werthe, so ist $\varphi$ die Wurzel einer algebraischen Gleichung $\varrho^{\text{ten}}$ Grades, deren Coefficienten ganz in $v$ sind. Alle rationalen Functionen von $\varphi$ sind gleichfalls Wurzeln von Gleichungen, deren Grad gleich $\varrho$ oder gleich einem Theiler von $\varrho$ wird. Im ersteren Falle gehören die Functionen zu derselben Gattung wie $\varphi$, im zweiten stehen sie unter der Gattung von $\varphi$. Charakteristisch für die Functionen einer Gattung ist die gegenseitige rationale Ausdrückbarkeit jeder einzelnen durch jede andere*). Durch rein algebraische Betrachtungen lässt sich dann nachweisen, dass die Discriminanten aller Functionen einer und derselben Gattung einen gemeinsamen Theiler besitzen, welcher eine Potenz der Discriminante von $f(x, v)$ also von

$$(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 \ldots (x_{n-1} - x_n)^2$$

ist. In einzelnen Fällen gelingt es auch, den Exponenten auf dem eingeschlagenen Wege wirklich zu berechnen.

Die allgemeine Bestimmung dieser Zahl ist der Zweck der folgenden Arbeit. Trotzdem die Substitutionentheorie am wenigsten für eine Untersuchung geeignet schien, bei welcher durch Gleichsetzung von Elementen der Begriff einer Gruppe zwischen diesen Elementen zerstört wird, so ergab sich doch das Resultat durch einen nahe liegenden Kunstgriff auf die ein-

*) Vgl. *Kronecker* „Zur Theorie der algebraischen Gleichungen"; Monatsbericht der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom 3. März 1879, S. 211—212.

fachste Weise. Zugleich zeigte sich, dass zwar, wie aus den *Kronecker*schen Untersuchungen bereits hervorging, jene Potenz der Discriminante von $f(x, v) = 0$ der einzige constante *Factor* für alle Discriminanten der Gattung sei, dass aber noch andere für die Gattung constante *Eigenschaften* der Discriminante bestehen, welche sich beim Verschwinden derselben durch Gleichsetzung von Wurzeln oder Wurzelsystemen der Gleichung $f(x, v) = 0$ herausstellen. Von diesem Standpunkte aus wird dann die Constanz jenes Factors als specielle Eigenthümlichkeit einer einfachen Eigenschaft ganzer Functionen erkannt. Der eingeschlagene Weg führt endlich auch zur Einsicht über die Zerfällbarkeit der Discriminanten von Functionsgattungen in Factoren.

---

## §. 1.

Es mögen $x_1, x_2, \dots x_n$ beliebige Elemente sein, welche von einander als unabhängig angesehen werden, falls nicht ausdrücklich das Gegentheil festgesetzt ist. Sie mögen als Wurzeln die Grundgleichung

$$f(x) \equiv x^n - f_1 x^{n-1} + f_2 x^{n-2} - \cdots \pm f_n = 0$$

befriedigen, so dass also die ganzen symmetrischen Functionen der $x_1, x_2, \dots x_n$ ganze rationale Functionen der $f_1, f_2, \dots f_n$ sind. Wir bezeichnen ferner mit

$$\varDelta = (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 \dots (x_{n-1} - x_n)^2$$

die Discriminante der Grundgleichung $f(x) = 0$.

Ist nun eine Substitutionsgruppe

$$G = (s_1, s_2, s_3, \dots s_r), \quad (s_1 = 1)$$

des Grades $n$ und der Ordnung $r$ zwischen den $x$ gegeben, so besteht, da $r$ ein Theiler von $n!$ ist, eine ganze Zahl $\varrho$, welche durch die Beziehung

$$r . \varrho = n!$$

bestimmt ist. Alle diejenigen ganzen Functionen der $x_1, \dots x_n$, welche für sämmtliche Substitutionen von $G$ ungeändert bleiben, bei jeder anderen Substitution jedoch ihren Werth ändern, sind $\varrho$-werthig. Sie bilden zusammen *die zu G gehörige Gattung**). Charakteristisch für alle Functionen einer Gattung ist es, dass eine jede rational, aber nicht nothwendig ganz, durch jede andere ausdrückbar ist.

An diese Festsetzungen knüpft sich die folgende elementare Aufgabe: „Gegeben ist die Gruppe $G$, es soll eine zur Gattung $G$ gehörige Function construirt werden“.

---

*) *Kronecker:* l. c.; S. 213.

Für die Lösung dieser Aufgabe wird fast überall folgende Vorschrift gegeben. Man bilde aus den $x_1, x_2, \ldots x_n$ und den unbestimmten Grössen $u, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ den linearen Ausdruck

$$h_1 = u+\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots+\alpha_n x_n;$$

dieser gehört zur Gruppe $G_1=1$, d. h. er ist $n!$-werthig, oder auch, er ändert für jede Substitution der $x$ seinen Werth. Wendet man auf ihn alle Substitutionen $s_1=1, s_2, s_3, \ldots s_r$ der gegebenen Gruppe $G$ an, und bildet aus den Resultaten

$$h_1, \quad h_2, \quad h_3, \quad \ldots \quad h_r$$

das Product

$$\varphi = h_1.h_2\ldots h_r,$$

so ist dies eine zur Gattung $G$ gehörige Function. Denn, wie leicht erkannt wird, vertauschen die $s_1=1, s_2, \ldots s_r$ nur die Factoren $h$ unter einander, während jede andere Substitution fremde Factoren hervorruft.

Bei dieser Art der Bildung treten aber mancherlei Unzuträglichkeiten auf. Vor allem ist die wirkliche Berechnung von $\varphi$ sehr langwierig. Dieser Umstand erklärt sich zum Theil daraus, dass jene Vorschrift im Allgemeinen nicht eine, sondern mehrere Functionen liefert, welche für $G$ ungeändert bleiben, nämlich die Coefficienten der Potenzen von $u$ einzeln für sich. Es ist aber nicht von vorn herein bekannt, welche von diesen Coefficienten eben auch nur für die Substitutionen von $G$ ihren Werth behalten, also wirklich zur Gattung $G$ gehören; nur von dem Coefficienten von $u^0$ ist dies direct nachweisbar. Aber selbst die Berechnung dieses einen ist noch umständlich, und zwar aus demselben Grunde; er zerfällt in einzelne nach $\alpha_1^{\mu_1}\alpha_2^{\mu_2}\ldots\alpha_n^{\mu_n}$ zu ordnende Aggregate, welche nicht in einander übergehen können, da die $\alpha$ willkürlich sind; sie müssen daher einzeln für $G$ ungeändert bleiben, ohne dass man wüsste, welche von ihnen auch wirklich zur Gattung $G$ gehören.

Es ist jedoch leicht, das Prinzip der obigen Regel zu einem neuen, bequemeren Vorgehen zu benutzen.

Es wurde eine $n!$-werthige Function $h_1$ mit Hülfe der Addition hergestellt; aus ihr wurden die Grössen $h_2, \ldots h_r$ durch $G$ hergeleitet, und $h_1, h_2, \ldots h_r$ wurden durch eine neue mit der Addition nicht vertauschbare Operation, die Multiplication, symmetrisch verbunden. Wir wollen jetzt Addition und Multiplication vertauschen.

Wir wählen

$$h_1 = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$$

als Function von $n!$ Werthen, leiten aus ihr durch die Substitutionen von $G$ $h_2, h_3, \dots h_r$ ab und verbinden sämmtliche Werthe durch Addition; dann wird

$$\varphi = h_1+h_2+\cdots+h_i+\cdots+h_r = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}+\cdots+x_{i_1}^{\alpha_1}x_{i_2}^{\alpha_2}\dots x_{i_n}^{\alpha_n}+\cdots$$

den Bedingungen genügen, und die Bildung von $\varphi$ wird sich jetzt ohne Schwierigkeiten vollziehen. Ja, es ist ersichtlich, dass jede zu $G$ gehörige Function $\chi$ in Summanden von der Form $c\varphi$ zerlegt werden kann, welche entweder zu $G$ selbst gehören, oder *unter der Gattung G enthalten* sind, d. h. ausser für alle Substitutionen von $G$ auch noch für andere Substitutionen ungeändert bleiben.

Unterwirft man die bei der Bildung von $h_1$ benutzten Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ der Bedingung, dass die Gleichung

$$\sum_{\varkappa} \alpha_{\varkappa} = \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda}$$

nur dann bestehen kann, wenn auf beiden Seiten dieselben Grössen $\alpha$ stehen, so erhält man eine Function $\Psi$ der Gruppe von besonders wichtigen Eigenschaften. (Die vorgeschriebene Bedingung ist z. B. durch die Annahme

$$\alpha_{\varkappa} > \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{\varkappa-1},$$

speciell durch

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 2^1, \quad \alpha_4 = 2^2, \quad \alpha_5 = 2^3, \quad \dots$$

zu erfüllen.) $\Psi_1$ sei die zu $G$ gehörige Function, welche man auf diese Weise erlangt hat; $\Psi_1$ besitzt nur positive Summanden.

$$\Psi_1, \quad \Psi_2, \quad \Psi_3, \quad \dots \quad \Psi_\varrho$$

seien die $\varrho$ verschiedenen Werthe der Function. Dann vertheilen sich die $n!$ Terme $h$ zu je $r$ auf die $\varrho$ Werthe, und da alle $h$ von einander verschieden sind, so ist jedes der $\Psi_1, \dots \Psi_\varrho$ bereits durch einen einzelnen Term vollkommen bestimmt.

Es möge nun

$$\Psi_1 - \Psi_2 = 0$$

werden, wenn zwischen den $x$ die Gleichsetzungen

(1.) $\quad x_a = x_{a'} = x_{a''} = \cdots; \quad x_b = x_{b'} = x_{b''} = \cdots; \quad x_c = x_{c'} = x_{c''} = \cdots; \quad \dots$

bestehen. Dann erkennt man:

*A*) Da noch immer $x_a, x_b, x_c, \dots$ von einander unabhängig sind, und da $\Psi_1-\Psi_2$ gleichviele positive und negative Summanden enthält, so kann bei $\Psi_1-\Psi_2=0$ nur immer ein Glied von $\Psi_1$ gegen eins von $\Psi_2$ wegfallen und zwar nur dann, wenn in beiden die Summen der Exponenten der $x_a, x_{a'}, x_{a''}, \dots$, ebenso die der $x_b, x_{b'}, x_{b''}, \dots$ u. s. w. einander gleich sind. Hieraus lässt sich wegen der Wahl der $\alpha$ schliessen, dass die ein-

zelnen Exponenten je zweier sich aufhebender Glieder bei den $x_a$ unter sich vertauscht sind, ebenso bei den $x_b$ unter sich u. s. w. Es kann daher eine Substitution $\sigma$ construirt werden, welche nur die $x_a$ unter sich, nur die $x_b$ unter sich u. s. w. versetzt, und das eine der beiden sich aufhebenden Glieder in das andere überführt. Wendet man $\sigma$ auf $\Psi_1$ an, so wird ein Summand dieser Function in einen von $\Psi_2$ übergehen, folglich, da der neue Werth von $\Psi$ schon durch einen einzigen Summanden bestimmt ist, wird $\Psi_1$ in $\Psi_2$ übergehen, oder $\Psi_2 = \Psi_\sigma$ sein. Die so construirte Function $\Psi$ hat also die Eigenthümlichkeit, dass wenn zwei ihrer Werthe $\Psi_1$ und $\Psi_2$ durch die Festsetzung (1.) einander gleich werden, der eine in den andern durch $\sigma$ verwandelt werden kann.

Dass dies nicht bei jeder Function der Gattung $G$ eintritt, zeigt das Beispiel von

$$\Psi_1 = (x_1-x_2)(x_3-x_4)+\sum_{\alpha,\beta}^{1,\dots 5} x_\alpha x_\beta$$
$$\Psi_2 = (x_1-x_2)(x_3-x_5)+\sum_{\alpha,\beta}^{1,\dots 5} x_\alpha x_\beta$$
$$\Psi_1-\Psi_2 = (x_1-x_2)(x_5-x_4),$$

wobei

$$\Psi_1-\Psi_2 = 0 \quad \text{für} \quad x_1 = x_2$$

wird, ohne dass eine Substitution, die nur $x_1$ und $x_2$ versetzt, $\Psi_1$ in $\Psi_2$ überführen könnte. Die symmetrische Summe war in dem Ausdrucke für $\Psi_1$ nur hinzugefügt, damit nicht $\Psi_1 = 0$ für $x_1 = x_2$ werden sollte.

*B*) Setzen wir in $\Psi_1-\Psi_2$

$$x_b = x_{b'} = x_{b''} = \cdots; \quad x_c = x_{c'} = x_{c''} = \cdots;$$
$$x_a \gtrless x_{a'}, \quad x_{a'} = x_{a''} = x_{a'''} = \cdots,$$

so wird $\Psi_1-\Psi_2$ für $x_a = x_{a'}$ verschwinden, also durch $x_a - x_{a'}$ theilbar werden. Dieser Factor wird aber auch nur in der ersten Potenz auftreten, weil die einzelnen Terme von der Form

$$x_b^\beta x_c^\gamma \dots (x_a^\alpha x_{a'}^{\alpha'} - x_a^{\alpha'} x_{a'}^\alpha)$$

werden, jeder von ihnen für sich verschwinden muss, und die Klammer eben nur durch die erste Potenz von $x_a - x_{a'}$ theilbar ist.

§. 2.

Wir betrachten jetzt eine beliebige zur Gattung $G$ gehörige Function $\varphi$ und deren $\varrho$ Werthe $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_\varrho$. Ist $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2$ eine Substitution,

welche $\varphi_1$ in $\varphi_2$ überführt, also nicht zu $G$ gehört, so werden

$$\sigma_2, \quad s_2\sigma_2, \quad s_3\sigma_2, \quad \ldots \quad s_r\sigma_2$$

alle Substitutionen sein, welche $\varphi_1$ in $\varphi_2$ umwandeln, und alle diese sind unter sich und von den $s_1, s_2, \ldots s_r$ verschieden. Geht man in derselben Weise von $\varphi_1$ mittels $\sigma_3$ zu $\varphi_3$ über, und fährt so fort, bis alle $\varrho$ Werthe von $\varphi$ einerseits und alle $r.\varrho = n!$ überhaupt möglichen Substitutionen zwischen $n$ Elementen andrerseits erschöpft sind, so gelangt man zu folgender Tabelle:

$$(T_1.) \quad \begin{cases} \varphi_1; & 1, \; s_2, \; s_3, \; \ldots \; s_r \quad (G_1.\sigma_1) \\ \varphi_2 = \varphi_{\sigma_2}; & \sigma_2, \; s_2\sigma_2, \; s_3\sigma_2, \; \ldots \; s_r\sigma_2, \quad (G_1.\sigma_2) \\ \varphi_3 = \varphi_{\sigma_3}; & \sigma_3, \; s_2\sigma_3, \; s_3\sigma_3, \; \ldots \; s_r\sigma_3, \quad (G_1.\sigma_3) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varphi_\varrho = \varphi_{\sigma_\varrho}; & \sigma_\varrho, \; s_2\sigma_\varrho, \; s_3\sigma_\varrho, \; \ldots \; s_r\sigma_\varrho, \quad (G_1.\sigma_\varrho). \end{cases}$$

Ebensogut wie von $\varphi_1$ hätten wir von einem andern Werthe von $\varphi$, z. B. von $\varphi_2$ ausgehen können; wir wären dann zu einer zweiten Tabelle gelangt, zu der wir von $T_1$ aber auch direct übergehen können, falls wir uns daran erinnern, dass die Gruppe von $\varphi_{\sigma_2}$ die Transformirte von $G_1$ durch $\sigma_2$, also

$$1, \quad \sigma_2^{-1}s_2\sigma_2, \quad \sigma_2^{-1}s_3\sigma_2, \; \ldots \quad \sigma_2^{-1}s_r\sigma_2, \quad (\sigma_2^{-1}G_1\sigma_2)$$

ist. Danach erhält man die Tabellen $T_2, T_3, \ldots T_\varrho$ von der Form

$$(T_\alpha.) \quad \begin{cases} \varphi_{\sigma_\alpha} & 1, \quad \sigma_\alpha^{-1}.s_2.\sigma_\alpha, \; \ldots \; \sigma_\alpha^{-1}.s_r.\sigma_\alpha, \quad (\sigma_\alpha^{-1}G_1\sigma_\alpha) \\ \varphi_{\sigma_2\sigma_\alpha} & \sigma_\alpha^{-1}\sigma_2\sigma_\alpha, \quad \sigma_\alpha^{-1}.s_2\sigma_2.\sigma_\alpha, \; \ldots \; \sigma_\alpha^{-1}.s_r\sigma_2.\sigma_\alpha, \quad (\sigma_\alpha^{-1}G_1\sigma_\alpha.\sigma_2) \\ \varphi_{\sigma_3\sigma_\alpha} & \sigma_\alpha^{-1}\sigma_3\sigma_\alpha, \quad \sigma_\alpha^{-1}.s_2\sigma_3.\sigma_\alpha, \; \ldots \; \sigma_\alpha^{-1}.s_r\sigma_3.\sigma_\alpha, \quad (\sigma_\alpha^{-1}G_1\sigma_\alpha.\sigma_3) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varphi_{\sigma_\varrho\sigma_\alpha} & \sigma_\alpha^{-1}\sigma_\varrho\sigma_\alpha, \quad \sigma_\alpha^{-1}.s_2\sigma_\varrho.\sigma_\alpha, \; \ldots \; \sigma_\alpha^{-1}.s_r\sigma_\varrho.\sigma_\alpha, \quad (\sigma_\alpha^{-1}G_1\sigma_\alpha.\sigma_\varrho), \end{cases}$$

deren jede alle $\varrho$ Werthe $\varphi$ und alle $\varrho.r = n!$ Substitutionen enthält.

Als explicite Ausdrucksweise für die Substitutionen sei die gewöhnliche gewählt, welche alle sich cyklisch folgenden Elemente in eine Klammer und zwar in derselben Reihenfolge zusammenfasst, in welcher sie cyklisch vertauscht werden. Es deutet daher z. B.

$$(1'.) \qquad \sigma = (x_a x_{a'} x_{a''} \ldots x_{a^{\nu}})(x_b x_{b'} x_{b''} \ldots)(x_c x_{c'} x_{c''} \ldots) \ldots$$

die cyklische Vertauschung der $x_a$ in der Folge $x_a x_{a'} x_{a''} \ldots x_{a^{\nu}} x_a \ldots$ an, u. s. w. In den nächsten Paragraphen wird eine derartige Substitution häufig mit

der Annahme

(1.) $x_a = x_{a'} = x_{a''} = \cdots;\quad x_b = x_{b'} = x_{b''} = \cdots;\quad x_c = x_{c'} = x_{c''} = \cdots;\quad \ldots$

in Verbindung gebracht. Der Kürze wegen mögen die Wurzelgleichsetzungen, welche durch (1.) constituirt werden, ***die zu $\sigma$ gehörigen Cykelgleichungen*** heissen.

Hierbei ist zu bemerken, dass verschiedene Substitutionen dieselben Cykelgleichungen liefern können; so entspringt (1.) auch aus

$$\sigma' = (x_a x_{a''} x_{a'} \ldots)(x_b x_{b'} x_{b''} \ldots)\ldots$$

Ferner ist zu beachten, dass durch die Cykelgleichung die Differenz der beiden Werthe $\varphi_1$ und $\varphi_\sigma$ gleich Null gemacht wird. Denn da $\varphi_\sigma$ durch Anwendung von $\sigma$ aus $\varphi_1$ hervorgeht, $\sigma$ aber lediglich eine veränderte Anordnung der $x_a$ unter sich, der $x_b$ unter sich u. s. w. bewirkt, und (1.) endlich diese Aenderung im Schlussresultate tilgt, so wird $\varphi_1 = \varphi_\sigma$ werden, falls (1.) gilt.

Dass umgekehrt das Verschwinden von $\varphi_1 - \varphi_\sigma$ für (1.) nicht auf eine Substitution hinweist, welche $\varphi_\sigma$ aus $\varphi_1$ ableitet durch blosse Vertauschung der $x_a$ unter sich u. s. w., ist schon durch das im §. 1 gegebene Beispiel ersichtlich.

## §. 3.

Gesetzt, in der ersten Zeile von $T_1$, d. h. in $G$ kämen nicht alle möglichen $\frac{n(n-1)}{2}$ Transpositionen vor, oder mit anderen Worten, $G$ wäre weder die alternirende noch die symmetrische Gruppe, dann führt irgend eine der übrigen Transpositionen z. B.

$$\sigma_2 = (x_a x_{a'})$$

den Werth $\varphi_1$ in $\varphi_{\sigma_2} = \varphi_2$ über. Die zugehörige Cykelgleichung

$$x_a = x_{a'}$$

macht dann

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 0,$$

d. h. es ist $\varphi_1 - \varphi_2$ durch $x_a - x_{a'}$ theilbar. Dasselbe gilt für jede andere nicht in $G$ enthaltene Transposition, so dass, wenn $G$ deren $q$ enthält, aus

$$(\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_1 - \varphi_3)\ldots(\varphi_1 - \varphi_\varrho)$$

$\frac{n(n-1)}{2} - q$ Factoren von der Form

$$x_a - x_{a'}$$

heraustreten. Dasselbe gilt für die der Tabelle $T_a$ entsprechende Function

$$(\varphi_a - \varphi_1)(\varphi_a - \varphi_2)\ldots(\varphi_a - \varphi_{a-1})(\varphi_a - \varphi_{a+1})\ldots(\varphi_a - \varphi_\varrho).$$

Denn da $T_a$ durch Transformation aus $T_1$ entsteht, so werden die einzelnen Substitutionen des ersteren Schemas mit denen des letzteren von gleichem Typus; sie werden einander ähnlich sein.

Es enthält also die Discriminante

$$D_\varphi = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{\alpha,\beta}^{1,\dots\varrho} (\varphi_\alpha - \varphi_\beta) \qquad (\alpha \gtrless \beta)$$

$\varrho\left(\frac{n(n-1)}{2} - q\right)$ derartige Factoren. $D_\varphi$ ist in den $x_1, \dots x_n$ symmetrisch, und jede durch $(x_a - x_{a'})$ theilbare symmetrische Function hat

$$\varDelta = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{a,b}^{1,\dots n} (x_a - x_b) \qquad (a \gtrless b)$$

zum Theiler. $\varDelta$ enthält $n(n-1)$ Factoren $(x_a - x_b)$; $\varDelta^g$ enthält deren $gn(n-1)$. Ist also $\varDelta^g$ die höchste in $D_\varphi$ aufgehende Potenz von $\varDelta$, so wird

$$g(n-1).n \geqq \varrho\left(\frac{n(n-1)}{2} - q\right),$$

$$g \geqq \tfrac{1}{2}\varrho - \frac{\varrho q}{n(n-1)}.$$

Dies heisst:

*Ist G eine Gruppe von Substitutionen zwischen $x_1, x_2, \dots x_n$, welche q Transpositionen enthält, $\varphi$ irgend eine zur Gattung G gehörige Function von $\varrho$ Werthen, so enthält die Discriminante $D_\varphi$ den Factor*

$$\varDelta^{\frac{1}{2}\varrho - \frac{\varrho q}{n(n-1)}}.$$

Der allgemeinen Theorie wegen müssen wir diesen Satz noch in folgender Ausdrucksweise wiederholen:

*Für keine Gleichsetzung zweier Wurzeln*

$$x_a = x_{a'}$$

*wird der Quotient*

$$D_\varphi : \varDelta^{\frac{1}{2}\varrho - \frac{\varrho q}{n(n-1)}}$$

*unendlich gross.*

Wenn die Gruppe $G$ in der alternirenden Gruppe $n^{\text{ten}}$ Grades enthalten ist, dann kommen in ihr keine Transpositionen vor, ebensowenig wie in der alternirenden selbst; in diesem Falle ist $q = 0$, und das Theorem lautet:

*Ist $\varphi$ eine $\varrho$-werthige Function von $x_1, x_2, \dots x_n$, durch welche $\sqrt{\varDelta}$ rational darstellbar ist, so enthält $D_\varphi$ den Factor*

$$\varDelta^{\frac{1}{2}\varrho}.$$

*Gehört $\varphi$ zur Gattung der Galoisschen Resolvente, so enthält $D_\varphi$ den Factor*

$$\varDelta^{\frac{1}{2}n!}.$$

Mit Hülfe der im ersten Paragraphen abgeleiteten speciellen Function kann man zeigen, dass es in der Gattung $G$ Functionen giebt, bei denen $\Delta$ in keiner höheren als der angegebenen $\left(\frac{1}{2}\varrho-\frac{\varrho q}{n(n-1)}\right)^{\text{ten}}$ Potenz vorkommt. Hat nämlich die Function $\psi$ die Eigenschaft, dass

$$\psi_\alpha-\psi_\beta=0 \quad \text{für} \quad x_a=x_{a'}$$

nur dann wird, wenn $\psi_\beta$ aus $\psi_\alpha$ durch die Substitution $\sigma=(x_a x_{a'})$ abgeleitet werden kann, und dass $(\psi_\alpha-\psi_\beta):(x_a-x_{a'})^2$ für $x_a=x_{a'}$ unendlich wird, dann entspricht nicht nur (wie bei jeder Function der Gattung) jeder Transposition $(x_b x_{b'})$ ein Factor $x_b-x_{b'}$, sondern auch umgekehrt jedem Factor $x_a-x_{a'}$ eine Transposition $\sigma=(x_a x_{a'})$, so dass die Anzahl der Factoren $x_a-x_{a'}$ mit dem der Transpositionen übereinstimmt, dass also genau

$$g = \tfrac{1}{2}\varrho-\frac{\varrho q}{n(n-1)}$$

wird. Die in §. 1 construirte Function

$$\Psi_1 = \sum_{(G)} x_{i_1}^0 x_{i_2}^1 x_{i_3}^2 x_{i_4}^4 \ldots$$

hat wegen der dort in $A$), $B$) auseinandergesetzten Verhältnisse die hier verlangten Eigenschaften und liefert also den geforderten Nachweis.

Dass es aber auch Functionen giebt, welche $\Delta$ in höherer Potenz enthalten, mögen zwei Beispiele zeigen. $\sqrt{\Delta^3}$ gehört wie $\sqrt{\Delta}$ zur alternirenden Gruppe. Für diese ist $\varrho=2$ und

$$g=\tfrac{1}{2}\varrho=1,$$

wie dies auch

$$D_{\sqrt{\Delta}}=([+\sqrt{\Delta}]-[-\sqrt{\Delta}])^2=4\Delta$$

zeigt. Dagegen ist

$$\begin{aligned} D_{\sqrt{\Delta^3}+\Sigma x} &= ([\sqrt{\Delta^3}+\sum_1^n x_\lambda]-[-\sqrt{\Delta^3}+\sum_1^n x_\lambda])^2 \\ &= 4\Delta^3. \end{aligned}$$

Ein zweites Beispiel liefert die im ersten Paragraphen gegebene Function

$$\begin{aligned} \psi_1 &= (x_1-x_2)(x_3-x_4)+\sum_{\alpha,\beta}^{1,\ldots 5} x_\alpha x_\beta \\ \sigma &= (x_4 x_5) \\ \psi_\sigma &= (x_1-x_2)(x_3-x_5)+\sum_{\alpha,\beta}^{1,\ldots 5} x_\alpha x_\beta, \end{aligned}$$

da ja

$$\psi_1-\psi_\sigma = 0 \quad \text{für} \quad x_1-x_2,$$

trotzdem kein $s_\lambda \sigma$ gleich $(x_1 x_2)$ wird. Es ist nämlich

$$G = \big(1,\ (x_1 x_2)(x_3 x_4),\ (x_1 x_3)(x_2 x_4),\ (x_1 x_4)(x_2 x_3)\big),$$

$$G.\sigma = \big((x_4 x_5),\ (x_1 x_2)(x_3 x_5 x_4),\ (x_1 x_3)(x_2 x_5 x_4),\ (x_1 x_5 x_4)(x_2 x_3)\big),$$

so dass der Factor $(x_1 - x_2)$ in einer Zeile von $T_1$ auftritt, welche kein $(x_1 x_2)$ hat, nämlich in der zweiten.

Die beiden Beispiele erschöpfen zugleich die Möglichkeiten, in denen eine höhere Potenz von $\Delta$ vorkommen kann: einmal geschieht dies dann, wenn $\varphi_1 - \varphi_\sigma$ durch eine höhere als die erste Potenz von $(x_\alpha - x_{\alpha'})$ theilbar ist; zweitens dann, wenn $\varphi_1 - \varphi_\alpha$ durch $(x_\alpha - x_{\alpha'})$ theilbar ist, ohne dass $\sigma = (x_\alpha x_{\alpha'})$ die Function $\varphi_1$ in $\varphi_\alpha$ überführte.

Im ersten Falle ist ersichtlich, dass die Potenz, durch welche $\varphi_1 - \varphi_\sigma$ wirklich theilbar ist, eine ungerade sein muss. Denn aus

$$\varphi_1 - \varphi_\sigma = (x_\alpha - x_{\alpha'})^\gamma \varpi(x_1, \ldots x_\alpha, x_{\alpha'}, \ldots x_n)$$

folgt durch Anwendung von $\sigma = (x_\alpha x_{\alpha'})$, da $\sigma^2 = 1$ ist,

$$\varphi_\sigma - \varphi_{\sigma^2} = \varphi_\sigma - \varphi_1 = (-1)^\gamma (x_\alpha - x_{\alpha'})^\gamma \varpi(x_1, \ldots x_{\alpha'}, x_\alpha, \ldots x_n)$$

und durch Addition

$$0 = (x_\alpha - x_{\alpha'})^\gamma \{\varpi(x_1 \ldots x_\alpha, x_{\alpha'}, \ldots) + (-1)^\gamma \varpi(x_1, \ldots x_{\alpha'}, x_\alpha, \ldots)\}.$$

Wäre $\gamma$ gerade, so müsste $\varpi(x_1, \ldots x_\alpha, x_{\alpha'}, \ldots)$ bei Anwendung von $\sigma$ lediglich sein Zeichen ändern, für $x_\alpha = x_{\alpha'}$ also verschwinden und daher durch $x_\alpha - x_{\alpha'}$ theilbar sein, so dass $\gamma$ nicht der Maximalwerth sein könnte. Es ist also $\gamma$ ungerade, und daher wird die Anzahl des überschüssigen Vorkommens von $(x_\alpha - x_{\alpha'})$ eine gerade Zahl sein; wird also die Potenz $\Delta^g$ überschritten, so muss der Exponent um ein Vielfaches von zwei die Zahl $g$ übertreffen.

Es sei zweitens

$$\varphi_1 - \varphi_\alpha = 0 \quad \text{für} \quad x_\alpha = x_{\alpha'},$$

ohne dass $\varphi_\alpha = \varphi_\sigma$ ist, wo $\sigma$ die Transposition $(x_\alpha x_{\alpha'})$ bedeuten soll. Dann ist auch $\varphi_{\alpha\sigma}$ von $\varphi_\sigma$ verschieden, weil aus der Gleichung

$$\varphi_{\alpha\sigma} = \varphi_\sigma$$

folgen würde

$$\varphi_\alpha = \varphi_{\sigma.\sigma^{-1}} = \varphi_1;$$

und ebenso ist $\varphi_{\alpha\sigma}$ von $\varphi_1$ verschieden, da wegen $\sigma^2 = 1$ sonst

$$\varphi_{\alpha\sigma.\sigma} = \varphi_\alpha = \varphi_{1.\sigma} = \varphi_\sigma$$

d. h. $\varphi_\alpha = \varphi_\sigma$ wäre. Dagegen ist (gleichgültig ob $\varphi_\sigma = \varphi_1$ oder von $\varphi_1$ verschieden ist)

$$\varphi_{\sigma^2} = \varphi_1, \quad \varphi_{\alpha\sigma^2} = \varphi_\alpha;$$

und endlich ist

$$\varphi_\sigma - \varphi_1 = 0, \quad \varphi_{\alpha\sigma} - \varphi_\alpha = 0 \quad \text{für} \quad x_\alpha = x_{\alpha'};$$

daher gelten die acht Gleichungen

$$\varphi_1-\varphi_\alpha=0,\quad \varphi_\alpha-\varphi_1=0,\quad \varphi_\sigma-\varphi_\alpha=0,\quad \varphi_{\alpha\sigma}-\varphi_1=0$$
$$\varphi_1-\varphi_{\alpha\sigma}=0,\quad \varphi_\alpha-\varphi_\sigma=0,\quad \varphi_\sigma-\varphi_{\alpha\sigma}=0,\quad \varphi_{\alpha\sigma}-\varphi_\alpha=0$$
$$\text{für } x_\alpha=x_{\alpha'},$$

deren keine in den allgemeinen Tabellen $T_1, T_2, \ldots T_\varrho$ ein $(x_\alpha-x_{\alpha'})$ hervorgerufen hätte. Tritt also $(x_\alpha-x_{\alpha'})$ überhaupt einmal auf, ohne dass die betreffende Functionendifferenz bei $\sigma=(x_\alpha x_{\alpha'})$ die Form $\varphi_1-\varphi_\sigma$ hat, so tritt es mindestens achtmal auf. Es wird wegen der symmetrischen Bildung von $D_\varphi$ und von $\varDelta$ eine Potenz der letzteren Discriminante zu $\varDelta^g$ hinzutreten, deren Exponent durch vier theilbar ist.

Vereinigen wir also beide überhaupt möglichen Fälle, so folgt:
*Ist $\varphi$ eine zur Gattung $G$ gehörige Function, und bedeutet $g$ den höchsten Exponenten, für welchen der Quotient*

$$D_\varphi:\varDelta^{g'}$$

*bei Gleichsetzung zweier Wurzeln $x$ nicht unendlich wird, so ist*

$$g'=\tfrac{1}{2}\varrho-\frac{\varrho q}{n(n-1)}+2m,\quad m\geqq 0.$$

Zum Schlusse möge noch bemerkt werden, dass aus den Betrachtungen dieses und des vorigen Paragraphen ein neuer Beweis für den Satz fliesst, dass eine Function, welche weniger als $n$ Werthe besitzt $(n>4)$, alternirend oder symmetrisch sein muss.

Enthält die Functionsgruppe $G$ keine Transpositionen, so betrachten wir alle Transpositionen, welche das Element $x_1$ enthalten:

$$(x_1x_2),\quad (x_1x_3),\quad \ldots\quad (x_1x_n).$$

Wären zwei von diesen in einer Zeile von $T_1$ enthalten, dann würde aus

$$\sigma=(x_1x_\alpha),\quad s_\lambda\sigma=(x_1x_\beta)$$

folgen, dass in $G$ vorkäme

$$s_\lambda\sigma.\sigma^{-1}=(x_1x_\beta)(x_1x_\alpha)=(x_1x_\beta x_\alpha).$$

Soll dies nicht der Fall sein, so hat die Tabelle mindestens $n$ Zeilen und die Function $n$ Werthe. Wir sehen daher:

*Eine Function von $n$ Elementen $(n>4)$, welche weniger als $n$ Werthe besitzt, enthält entweder Transpositionen $(q>0)$ oder cyklische Vertauschungen von drei Elementen $(q=0)$ in ihrer Gruppe.*

Dass und wie hieraus das angeführte Theorem folgt, habe ich in der Arbeit über die Anzahl der Werthe mehrdeutiger Functionen gezeigt.

§. 4.

Wir gehen zu einem zweiten speciellen Falle über, zu demjenigen, welcher aus $\sigma=(x_a x_{a'} x_{a''})$ entspringt und die Cykelgleichungen der Form

$$x_a = x_{a'} = x_{a''}$$

umfasst. Hierbei treten einige Schwierigkeiten auf.

*A*) Wenn in einer Zeile von $T_1$ ein $\sigma=(x_a x_{a'} x_{a''})$ enthalten ist, so wird zwar $\varphi_1-\varphi_\sigma$ für die entsprechende Cykelgleichung Null werden; wenn aber dieselbe Zeile von $T_1$ auch ein $s_\lambda \sigma=(x_a x_{a'})$ enthält, so wird bereits für $x_a=x_{a'}$ der Werth von $\varphi_1-\varphi_\sigma$ verschwinden; möglicherweise bleibt daher

$$\frac{\varphi_1-\varphi_\sigma}{x_a-x_{a'}}$$

für

$$x_a = x_{a'} = x_{a''}$$

von Null verschieden. Ist z. B. $n=3$, $\varphi_1=x_1$, $\varphi_2=x_2$, $\varphi_3=x_3$, so wird $G_1=(1,(x_2 x_3))$ die erste Zeile von $T_1$ werden. Die zweite lautet

$$G_1.\sigma=((x_1 x_2 x_3),(x_1 x_2)), \quad \text{und} \quad \frac{\varphi_1-\varphi_2}{x_1-x_2}=\frac{x_1-x_2}{x_1-x_2}$$

bleibt für die Cykelgleichung $x_1=x_2=x_3$ endlich.

Wir müssen daher zwischen reductibeln und irreductibeln Cykelgleichungen unterscheiden, die in einer und derselben Zeile vorkommen, damit wir den Sätzen des vorigen Paragraphen die richtigen Erweiterungen zur Seite stellen können.

Irreductibel soll ein aus $\sigma$ entspringendes System von Cykelgleichungen sein, wenn keine andere Substitution $\sigma'=s_\lambda \sigma$ ein System ergiebt, welches in jenem ersten enthalten oder auch, durch jenes erste nothwendig erfüllt ist. So wäre z. B.

$$x_a = x_{a'} = x_{a''} = x_{a'''}; \quad x_b = x_{b'} = x_{b''}$$

reductibel, wenn es für dieselbe Zeile das System:

$$x_a = x_{a'}; \quad x_{a''} = x_{a'''}; \quad x_b = x_{b''},$$

oder auch das folgende:

$$x_a = x_{a'} = x_{a''}$$

gäbe, weil jedes der letzten beiden Systeme erfüllt ist, falls das erste besteht. Wir ziehen im Folgenden lediglich die irreductibeln Systeme in Betracht.

*B*) Während aus dem Verschwinden von $\varphi_1-\varphi_\sigma$ für $x_a=x_{a'}$ auf die Existenz des Factors $x_a-x_{a'}$ in der Function $\varphi_1-\varphi_\sigma$ geschlossen werden konnte, ist etwas Aehnliches hier nicht möglich. Der Grund liegt darin, dass es unendlich viele Formen jeden Grades giebt, die für $x_a=x_{a'}=x_{a''}$

verschwinden, wie z. B. $x_a + x_{a'} - 2x_{a''}$, $x_a x_{a'} - x_{a'}^2$ u. s. w. Es wird also auf die Existenz eines constanten Factors, wie $\Delta$ es für die Transpositionen war, hier nicht mehr geschlossen werden können: es wird sich aber zeigen, dass wenigstens eine Eigenschaft, als charakteristisch für alle Discriminanten der Gattung gewahrt bleibt. Hat nämlich $\Delta$ dieselbe Bedeutung wie früher, und ist $\Delta_1$ eine Function der $c_1, c_2, \dots c_n$, welche für jedes $x_a = x_{a'} = x_{a''}$ verschwindet, ohne schon bei der Gleichsetzung zweier der $x$ zu Null gemacht zu werden, so kann aus $G$ eine Zahl $g_1$ bestimmt werden, derart dass der Quotient

$$D_\varphi : (\Delta^g . \Delta_1^{g_1}), \quad g = \tfrac{1}{2}\varrho - \frac{\varrho q}{n(n-1)}$$

endlich bleibt, falls drei Wurzeln $x$ einander gleich gesetzt werden, welche Function $\varphi$ der Gattung auch zu Grunde gelegt ist.

$C$) In ein und derselben Zeile von $T_1$ könnten möglicherweise die beiden Substitutionen $\sigma = (x_a x_{a'} x_{a''})$ und $s_\lambda \sigma = (x_a x_{a''} x_{a'})$ auftreten, und hieraus würden Complicationen bei der Bildung von $\Delta_1$ entstehen, da dieselbe Cykelgleichung einer Zeile mehr als einmal angehören würde. Im allgemeinen Falle kann dies auch wirklich eintreten, wie das Beispiel bei $n = 5$

$$(G_1) \qquad 1, (x_1 x_3)(x_2 x_4),$$
$$(G_1 \sigma) \quad \sigma = (x_1 x_2 x_3 x_4 x_5), \quad s . \sigma = (x_1 x_4 x_3 x_2 x_5)$$

zeigt; hier kann es aber noch nicht geschehen. Denn wäre

$$\sigma = (x_a x_{a'} x_{a''}), \quad s_\lambda \sigma = (x_a x_{a''} x_{a'}),$$

so würde durch Multiplication der zweiten mit dem reciproken Werthe der ersten Substitution

$$s_\lambda = s_\lambda \sigma . \sigma^{-1} = (x_a x_{a''} x_{a'})(x_a x_{a'} x_{a''})^{-1} = (x_a x_{a''} x_{a'})(x_a x_{a''} x_{a'}) = (x_a x_{a'} x_{a''})$$

folgen, und es befände sich daher sowohl

$$s_\lambda = (x_a x_{a'} x_{a''}) \quad \text{wie} \quad s_\lambda^2 = (x_a x_{a''} x_{a'})$$

bereits in der ersten Zeile von $T_1$, nämlich in der Gruppe $G_1$ gegen unsere Voraussetzung. Es ist also $\varphi_\sigma$ von $\varphi_{\sigma^2}$ verschieden und die Cykelgleichung

$$x_a = x_{a'} = x_{a''}$$

kommt in $T_1$, wenn überhaupt, dann sicher zweimal vor.

$D$) Es wird $\varphi_1 - \varphi_\sigma$ bei der Anwendung der Substitution $\sigma$, durch welche $\varphi_\sigma$ aus $\varphi_1$ hervorgeht, seinen Werth in $\varphi_\sigma - \varphi_{\sigma^2}$ ändern; diese Differenz gehört der Tabelle $T_\sigma$ an und liefert dieselbe Cykelgleichung. Ebenso entsteht bei Anwendung von $\sigma^2$ auf $\varphi_1 - \varphi_\sigma$ die Form $\varphi_{\sigma^2} - \varphi_1$ in $T_{\sigma^2}$, da $\sigma^3 = 1$ ist. Man erhält demnach dieselbe Cykelgleichung aus

$$\varphi_1 - \varphi_\sigma, \quad \varphi_\sigma - \varphi_{\sigma^2}, \quad \varphi_{\sigma^2} - \varphi_1,$$
$$\varphi_1 - \varphi_{\sigma^2}, \quad \varphi\ - \varphi_1, \quad \varphi_{\sigma^2} - \varphi_\sigma.$$

Ist die zu $\varphi_1 - \varphi_\sigma$ gehörige Cykelgleichung irreductibel, so sind die beiden anderen für $\varphi_\sigma - \varphi_{\sigma'}$, $\varphi_{\sigma'} - \varphi_1$ es auch, da die entsprechenden Zeilen in $T_\sigma$, $T_{\sigma'}$ der in $T_1$, aus welcher sie durch Transformation entstehen, ähnlich sind.

Ebenso folgt die Irreductibilität der Cykelgleichung von $\varphi_1 - \varphi_{\sigma'}$ aus der von $\varphi_1 - \varphi_\sigma$. Denn wäre erstere nicht irreductibel, so gäbe es in der zu $\varphi_{\sigma'}$ gehörigen Zeile von $T_1$ zwei Substitutionen

$$\sigma^2 = (x_a x_{a''} x_{a'}), \quad s_\lambda \sigma^2 = (x_a x_{a'}) \quad [\text{oder } (x_a x_{a''}) \text{ oder } (x_{a'} x_{a''})],$$

deren Combination liefern müsste

$$s_\lambda = (s_\lambda \sigma^2)\,\sigma^{-2} = (x_a x_{a'})(x_a x_{a''} x_{a'})^{-1} = (x_a x_{a'})(x_a x_{a'} x_{a''}) = (x_a x_{a''}),$$

so dass in $G_1$ vorhanden wäre $s_\lambda = (x_a x_{a''})$. Dann käme aber in der Zeile von $T_1$, welche $\sigma$ enthält, auch noch vor

$$s_\lambda \sigma = (x_a x_{a''})(x_a x_{a'} x_{a''}) = (x_{a'} x_{a''}),$$

und es wäre also mit $\sigma^2$ gleichzeitig auch $\sigma$ reductibel, da $\varphi_1 - \varphi_\sigma = 0$ schon durch $x_{a'} = x_{a''}$ befriedigt würde.

Aus $C$) und $D$) erhellt, dass, *wenn eine irreductible Cykelgleichung*

$$x_a = x_{a'} = x_{a''}$$

*in dem Systeme $T_1, T_2, \dots T_\varrho$ überhaupt einmal auftritt, die Anzahl ihres Vorkommens ein Vielfaches von sechs sein wird.*

Nach dieser Vorbereitung bilden wir mit von Null verschiedenen, sonst aber willkürlichen unbestimmten Coefficienten $m$, $m'$ die lineare Function

$$k(x_a, x_{a'}, x_{a''}) = m\,x_a + m'\,x_{a'} - (m+m')\,x_{a''}.$$

Dieser Ausdruck verschwindet für $x_a = x_{a'} = x_{a''}$, ohne bereits beim Gleichsetzen zweier der $x_a$, $x_{a'}$, $x_{a''}$ zum Verschwinden gebracht zu werden. Setzt man für von einander verschiedene $d_a$, $d_{a'}$, $d_{a''}$

$$x_a = \mathfrak{x}_a + d_a \xi, \quad x_{a'} = \mathfrak{x}_a + d_{a'} \xi, \quad x_{a''} = \mathfrak{x}_a + d_{a''} \xi,$$

so wird durch $\xi = 0$ die Cykelgleichung befriedigt, und $k$ wird mit $\xi$ gleichzeitig von erster Ordnung gleich Null.

Jetzt möge aus Factoren $k$ ein Product derart formirt werden, dass einer jeden der in $T_1, T_2, \dots T_\varrho$ auftretenden Cykelgleichung der betrachteten Art ein Factor $k$ zugeordnet wird, welcher dieselben $x$ enthält, und zwar mögen, da dieselbe Cykelgleichung sechsmal erscheint, die sechs nothwendig vorhandenen Factoren folgende werden:

$$k(x_a, x_{a'}, x_{a''}), \quad k(x_a, x_{a''}, x_{a'}), \quad \dots \quad k(x_{a''}, x_{a'}, x_a).$$

Sollte dieselbe Gleichung mehrere Male auftreten, so werden jedenfalls immer sechs derartige Factoren zusammen erscheinen. Es ist also das Gesammtproduct derselben eine in $x_a$, $x_{a'}$, $x_{a''}$ symmetrische Function, und

es folgt aus der symmetrischen Bildung von $D_\varphi$, dass die auf alle möglichen Tripel von Wurzeln bezüglichen Factoren $k$, welche in $T_1, \dots T_\varrho$ auftreten, ein in allen $x_1, \dots x_n$ symmetrisches Product haben. Dies ist demnach eine Potenz von

$$\Delta_1 = \prod_{a,b,c}^{1,\dots n} (m x_a + m' x_b - [m+m'] x_c) \qquad (a \gtrless b \gtrless c).$$

Der Exponent möge den Werth $g_1$ haben.

Dann folgt der Satz:

*Ist $\varphi$ eine beliebige Function der Gattung $G$, und setzt man drei der Wurzeln $x$ einander gleich ($\mathfrak{x}_a$), indem man in*

$$x_a = \mathfrak{x}_a + d_a \xi, \quad x_{a'} = \mathfrak{x}_a + d_{a'} \xi, \quad x_{a''} = \mathfrak{x}_a + d_{a''} \xi, \qquad (d_a \gtrless d_{a'} \gtrless d_{a''})$$

*die Variable $\xi$ gleich Null werden lässt, so bleibt der Quotient*

$$D_\varphi : (\Delta^g . \Delta_1^{g_1}), \quad g = \tfrac{1}{2}\varrho - \frac{\varrho q}{n(n-1)}$$

*für einen aus der Gruppe $G$ ableitbaren und daher von der Wahl von $\varphi$ unabhängigen Werth der Zahl $g_1$ noch endlich.*

Die Bestimmung von $g_1$ kann folgendermassen geliefert werden. Diejenigen Elemente $x$, welche in $G$ mit einem unter ihnen durch Transpositionen zusammenhängen, mögen für den Augenblick mit

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \dots \quad \alpha_i$$

bezeichnet werden, so dass $G$ also die Transpositionen

$$(\alpha_1 \alpha_2), \quad (\alpha_1 \alpha_3), \quad (\alpha_2 \alpha_3), \quad \dots \quad (\alpha_{i-1} \alpha_i)$$

und daher auch die symmetrische Gruppe der $\alpha$ enthält. Ebenso seien untereinander auch die Elemente

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \dots \quad \beta_j$$

ebenso untereinander

$$\gamma_1, \quad \gamma_2, \quad \dots \quad \gamma_k$$

und

$$\delta_1, \quad \delta_2, \quad \dots \quad \delta_l$$

u. s. w. durch Transpositionen verbunden. $G$ enthält in Folge dessen auch die symmetrische Gruppe der $\beta$, die der $\gamma$ u. s. w. als Untergruppen. Demgemäss erscheinen in $G$ auch alle Substitutionen der Formen

$$(\alpha_\varkappa \alpha_\lambda \alpha_\mu), \quad (\beta_\varkappa \beta_\lambda \beta_\mu), \quad (\gamma_\varkappa \gamma_\lambda \gamma_\mu), \quad (\delta_\varkappa \delta_\lambda \delta_\mu), \quad \text{u. s. w.};$$

dagegen keine von der Form

$$(\alpha_\varkappa \alpha_\lambda \beta_\mu), \quad (\alpha_\varkappa \alpha_\lambda \gamma_\mu), \quad (\beta_\varkappa \beta_\lambda \gamma_\mu), \quad \text{u. s. w.},$$

weil mit $(\alpha_\varkappa \alpha_\lambda \beta_\mu)$ und $(\alpha_\varkappa \alpha_\lambda)$ in $G$ auch deren Product

$$(\alpha_\varkappa \alpha_\lambda \beta_\mu)(\alpha_\varkappa \alpha_\lambda) = (\alpha_\lambda \beta_\mu)$$

entgegen den gemachten Annahmen vorkommen würde. Alle Substitutionen $(\alpha_\varkappa \alpha_\lambda \beta_\mu)$ kommen in $T_1$, folglich ausserhalb der ersten Zeile vor. Sie könnten zu Cykelgleichungen der behandelten Form Veranlassung geben, falls dieselben irreductibel wären. Dies ist jedoch nicht der Fall. Denn dieselbe Zeile, welche $(\beta_\varkappa \beta_\lambda \alpha_\mu)$ enthält, wird auch jedes $s_\lambda.(\beta_\varkappa \beta_\lambda \alpha_\mu)$ enthalten, und da es ein $s_\lambda = (\beta_\varkappa \beta_\lambda)$ giebt, auch

$$(\beta_\varkappa \beta_\lambda).(\beta_\varkappa \beta_\lambda \alpha_\mu) = (\beta_\varkappa \alpha_\mu),$$

woraus die Reductibilität von $(\beta_\varkappa \beta_\lambda \alpha_\mu)$ folgt.

Es bleiben daher als möglicherweise irreductibel nur noch die Substitutionen

$$(\alpha_\varkappa \beta_\lambda \gamma_\mu), \quad (\alpha_\varkappa \beta_\lambda \delta_\mu), \quad (\beta_\varkappa \gamma_\lambda \delta_\mu), \quad \ldots$$

zurück, soweit diese nicht schon in $G$ vorkommen. Hier findet denn auch wirklich Irreductibilität statt. Denn wären z. B.

$$\sigma = (\alpha_\varkappa \beta_\lambda \gamma_\mu) \quad \text{und} \quad s_\lambda \sigma = (\beta_\lambda \gamma_\mu)$$

in ein und derselben Zeile von $T_1$ enthalten, so käme

$$s_\lambda = s_\lambda \sigma . \sigma^{-1} = (\beta_\lambda \gamma_\mu)(\alpha_\varkappa \beta_\lambda \gamma_\mu)^{-1} = (\beta_\lambda \gamma_\mu)(\alpha_\varkappa \gamma_\mu \beta_\lambda) = (\alpha_\varkappa \gamma_\mu)$$

entgegen den Voraussetzungen in $G_1$ vor.

Es sei nun $q'$ die Anzahl aller in $G$ vorkommenden Cykel von drei Elementen. Da die Anzahl aller überhaupt möglichen Substitutionen dieser Art $\frac{1}{3}n(n-1)(n-2)$ ist, so kommen in $T_1$ ausserhalb der ersten Zeile noch $\frac{1}{3}n(n-1)(n-2)-q'$ vor. Von diesen sind als reductibel alle von der Form $(\alpha_\varkappa \alpha_\lambda \beta_\mu)$, $(\alpha_\varkappa \alpha_\lambda \gamma_\mu)$, ... noch auszuscheiden. Derartige giebt es

$$i(i-1)(j+k+l)+j(j+1)(k+l+i)+\cdots$$

und es bleiben folglich als irreductibel in $T_1$ zurück

$$m = \tfrac{1}{3}n(n-1)(n-2)-q'-i(i-1)(j+k+l)-j(j-1)(i+k+l)-\cdots$$

In allen $\varrho$ Tabellen kommen $m\varrho$ irreductible Gleichungen vor; da ferner $\Delta_1$ vom Grade $n(n-1)(n-2)$ wird, so ist

$$g_1 = \frac{m\varrho}{n(n-1)(n-2)} = \tfrac{1}{3}\varrho - \frac{q'\varrho}{n(n-1)(n-2)} - \frac{i(i-1)(j+k+l)+j(j-1)(k+l+i)+\cdots}{n(n-1)(n-2)}.$$

In der alternirenden Gruppe sind alle Cykel von drei Elementen enthalten. Hierfür ist

$$q' = \tfrac{1}{3}n(n-1)(n-2); \quad i = j = k = \cdots = 0,$$

und daher

$$g_1 = 0.$$

Für alle in der alternirenden Gruppe enthaltenen Untergruppen ist gleichfalls

$$i = j = k = \cdots = 0,$$

weil in der alternirenden Gruppe eine symmetrische Verbindung irgend welcher Elemente unmöglich ist.

Wir haben daher den Specialsatz:

***Für jede beliebige Function $\varphi$ einer Gattung $G$, unter welcher $\sqrt{\Delta}$ enthalten ist, wird der Quotient***

$$D_\varphi : \left(\Delta^{\frac{1}{2}\varrho} . \Delta_1^{\frac{1}{3}\varrho - \frac{\varrho q'}{n(n-1)(n-2)}}\right)$$

***bei der Gleichsetzung dreier Wurzeln $x$ nicht mehr unendlich werden.** $q'$ **bedeutet dabei die Anzahl der in $G$ vorkommenden Substitutionen von der Form** $(x_\alpha x_{\alpha'} x_{\alpha''})$.*

Dass der gefundene Werth für $g_1$ wirklich ein Maximalwerth sei, wenn es sich um die gesammte Gattung $G$ handelt, kann mit Hülfe der besonderen im §. 1 aufgestellten Function $\Psi$ genau so bewiesen werden, wie im vorigen Paragraphen der entsprechende Satz für Transpositionen bewiesen wurde.

## §. 5.

Bei der Behandlung des allgemeinen Falles, in welchem $\sigma$ eine beliebige Substitution bedeutet, umgeht man am einfachsten alle die Schwierigkeiten, welche am Anfange des vorigen Paragraphen aufgezählt wurden, dadurch, dass man bei der Bildung des $\Delta_\sigma$ der Natur der im ersten Paragraphen gebildeten und eben erst wieder gebrauchten Function $\Psi = \psi$ folgt.

Tritt $\sigma$ als irreductible Substitution bei $\varphi_\sigma$ in der ersten Tabelle auf, so betrachten wir $\psi_1 - \psi_\sigma$. Diese Differenz wird für die zu $\sigma$ gehörigen Cykelgleichungen von möglichst niedriger Potenz verschwinden. Wenden wir auf $\psi_1 - \psi_\sigma$ alle möglichen Substitutionen der $n$ Elemente $x_1, \dots x_n$ an, so erhalten wir eine Anzahl von Differenzen

$$\psi_1 - \psi_\sigma, \quad \psi_\alpha - \psi_{\sigma\alpha}, \quad \psi_\beta - \psi_{\sigma\beta}, \quad \dots$$

welche bezüglich in der ersten, der $\alpha^{\text{ten}}$, der $\beta^{\text{ten}}$ u. s. w. Tabelle stehen. Es sind dies alle möglichen Werthe, welche $\psi_1 - \psi_\sigma$ annehmen kann, so dass nach den Auseinandersetzungen des ersten Paragraphen

$$(u + \psi_1 - \psi_\sigma)(u + \psi_\alpha - \psi_{\sigma\alpha})(u + \psi_\beta - \psi_{\sigma\beta}), \quad \dots$$

in den $x_1, \dots x_n$ ganz und symmetrisch wird. Es ist leicht zu beweisen, dass die zu $\psi_\alpha - \psi_{\sigma\alpha}$ gehörige Zeile der $\alpha^{\text{ten}}$ Tabelle derjenigen ähnlich ist, welche in der ersten Tabelle zu $\varphi_1 - \varphi_\sigma$ gehört. Denn tritt unter den angeführten Differenzen ausser $\psi_1 - \psi_\sigma$ z. B. noch $\psi_1 - \psi_\tau$ in der ersten Tabelle auf, so wird $\tau = \sigma . s_\alpha$ sein, weil $\psi_1 - \psi_\sigma$ nur durch eine Substitution $s_\alpha$, welche

$\psi_1$ ungeändert lässt, in $\psi_1-\psi_\tau$ übergeführt werden kann. Demnach besteht die Zeile $\sigma$ der ersten Tabelle aus den $s_\lambda\sigma$ und die Zeile $\tau$ aus den

$$s_\lambda.\sigma s_\alpha = s_\alpha^{-1}(s_\alpha s_\lambda)\sigma s_\alpha = s_\alpha^{-1}.(s_\mu\sigma)s_\alpha;$$

es ist also in der That die eine Zeile der anderen ähnlich, da jedem

$s_\lambda\sigma$ der einen ein $s_\alpha^{-1}(s_\lambda\sigma)s_\alpha$ der anderen

entspricht. Die durch die Differenzen

$$\psi_1-\psi_\sigma,\quad \psi_\alpha-\psi_{\sigma\alpha},\quad \psi_\beta-\psi_{\sigma\beta},\quad \ldots$$

erhaltenen Zeilen haben also sämmtlich ähnliche irreductible Substitutionen; umgekehrt brauchen sämmtliche irreductiblen Substitutionen einer Art aber nicht durch eine solche Differenzenreihe erschöpft zu werden. Wir behandeln zuerst alle dem $\sigma$ ähnlichen irreductiblen Substitutionen, welche aus einer einzigen Differenzenreihe entspringen.

Es sei z. B.

$$\sigma = (x_a x_{a'})(x_b x_{b'} x_{b''})(x_c x_{c'} x_{c''} x_{c'''}),$$

dann nehmen wir bei willkürlichen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ für $u$ den Werth, der aus

$$\alpha(x_a-x_{a'})+\beta(x_b+x_{b'}-2x_{b''})+\gamma(x_c+x_{c'}+x_{c''}-3x_{c'''})$$

durch Multiplication aller möglichen derartigen linearen Functionen entsteht, also eine symmetrische Function der $x_1, \ldots x_n$. Dann ist das Product

$$(u+\psi_1-\psi_\sigma)(u+\psi_\alpha-\psi_{\sigma\alpha})(u+\psi_\beta-\psi_{\sigma\beta})\ldots$$

erstens symmetrisch in den $x$, wie dies aus der Bildung hervorgeht; zweitens verschwindet es für jede Cykelgleichung, welche $\sigma$ selbst, oder einer dem $\sigma$ ähnlichen Substitution entspricht, da dies für $u$ und sicher für mindestens eine der Differenzen $\psi_\delta-\psi_{\sigma\delta}$ stattfindet; drittens verschwindet es auch nur für die Cykelgleichungen, die dem $\sigma$ und ähnlichen Substitutionen entsprechen, weil wegen der Willkürlichkeit von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... nothwendig $u$ zugleich mit dem Producte verschwinden muss, und dies eben nur für jene Gleichungen geschieht; viertens endlich verschwindet das Product von keiner höheren Ordnung, als das Product

$$(\varphi_1-\varphi_\sigma)(\varphi_\alpha-\varphi_{\sigma\alpha})(\varphi_\beta-\varphi_{\sigma\beta})\ldots,$$

welches der Discriminante $D_\varphi$ einer beliebigen Function der Gattung angehört, da jeder Factor des letzteren Productes mindestens von derselben Ordnung Null wird, wie der entsprechende Factor von

$$(\psi_1-\psi_\sigma)(\psi_\alpha-\psi_{\sigma\alpha})(\psi_\beta-\psi_{\sigma\beta})\ldots,$$

welcher als letzter Summand des obigen Productes auftritt und für sich verschwinden muss. Käme also $\sigma$ weiter nicht in unseren Tabellen vor, so könnte das obige Product entweder direct für $\Delta_\sigma$ oder, wenn es eine in den $x$ rationale

Wurzel haben sollte, für eine Potenz von $\Delta_\sigma$ genommen werden. Käme dagegen $\sigma$ oder eine ähnliche irreductible Substitution auch noch in einer neuen Reihe vor, welche etwa zu $\psi_1 - \psi_\vartheta$ gehörte, so würde ein ähnlich wie oben gebildetes Product als zweiter Factor zu jenem ersten hinzuzufügen sein, und das Gesammtproduct wäre dann als $\Delta_\sigma$ oder als eine Potenz von $\Delta_\sigma$ zu behandeln. In dieser Weise fährt man fort, bis alle dem $\sigma$ ähnlichen irreductiblen Substitutionen verbraucht worden sind.

Wir können demnach jetzt den allgemeinen Satz aufstellen:

***Ist G eine Gruppe der n Elemente $x_1, x_2, \dots x_n$, welche die Functionen-Gattung G charakterisirt, so kann für alle möglichen Typen von Substitutionen***

$$(x_a x_{a'}); \qquad (x_a x_{a'} x_{a''}); \qquad (x_a x_{a'})(x_b x_{b'}); \qquad \dots \ \sigma; \ \dots$$

***eine Reihe von ganzen symmetrischen Functionen der n Elemente x***

$$\Delta; \qquad \Delta_1; \qquad \Delta_2; \qquad \dots \ \Delta_\sigma; \ \dots$$

***aufgestellt werden, welche durch die entsprechenden Cykelgleichungen***

$$x_\lambda = x_\mu; \quad x_\lambda = x_\mu = x_\nu; \quad x_\varkappa = x_\lambda, \ x_\mu = x_\nu; \quad \dots$$

***und auch nur durch diese gleich Null gemacht werden; diesen Functionen Δ lassen sich gewisse aus der Gruppe G ableitbare Zahlen***

$$g; \qquad g_1; \qquad g_2; \qquad \dots \ g_\sigma; \ \dots$$

***zuordnen, so dass der Quotient***

$$D_\varphi : [\Delta^g . \Delta_1^{g_1} . \Delta_2^{g_2} \dots \Delta_\sigma^{g_\sigma} \dots],$$

***in welchem $D_\varphi$ die Discriminante irgend einer Function der Gattung G bedeutet, für irgend welche Gleichsetzungen von Wurzeln x untereinander, nicht mehr unendlich gross wird. Die aus der Gruppe G abgeleiteten Zahlen g, $g_1, g_2, \dots g_\sigma, \dots$ sind Maximalzahlen für die Gattung. Die erste der Functionen hat die Form***

$$\Delta = (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 \dots (x_{n-1} - x_n)^2;$$

***sie tritt in der Potenz g als Factor aus $D_\varphi$ heraus.***

Aus den vorhergehenden Betrachtungen kann der fernere Schluss gezogen werden, dass, wenn die Gruppe $G'$ der $\varrho\tau$-werthigen Function $\varphi'$ in der Gruppe $G$ der $\varrho$-werthigen Function $\varphi$ enthalten ist, dass dann die zu $G'$ gehörigen Zahlen $g'$, $g'_1$ mindestens $\tau$-mal so gross sind, als die zu $G$ gehörigen entsprechenden Zahlen $g$, $g_1$. Denn die neuen $\varrho\tau$ Tabellen $T'_1$, $T'_2$, ... $T'_{\varrho\tau}$ enthalten je $\tau$-mal so viele Zeilen als $T_1$, $T_2$, ... $T_\varrho$; diese Zeilen entstehen dadurch, dass eine jede Zeile von $T_1$, $T_2$, ... in je $\tau$ Abtheilungen zerlegt wird, entsprechend den Zerlegungen die $G_1$ erfährt. Hierbei kann die Zahl der reductibeln Substitutionen nur vermehrt, nicht vermindert

werden, da jede irreductible nach der Zerlegung der Zeile sicher den Charakter der Irreductibilität bewahrt hat. Andrerseits wird die Zahl der Tabellen auf das $\tau$-fache gebracht, und da $\varrho$, bezüglich $\varrho\tau$ als Factoren bei der Bestimmung der Zahlen $g$, $g_1$ bezüglich $g'$, $g_1'$ erscheinen, so folgt die angegebene Beziehung.

Wahrscheinlich geht die Richtigkeit dieses Satzes über den für $g$ und $g_1$ bewiesenen Fall hinaus. Um den allgemeinen Beweis liefern zu können, müsste $\varDelta_\sigma$ unabhängig von der gerade betrachteten Gattung, welche sich durch das Auftreten von $\psi$ documentirt, und nur abhängig von der Beschaffenheit der Substitution $\sigma$ aufgestellt werden. Dies scheint sich aber nicht ohne Schwierigkeiten bewerkstelligen zu lassen.

## §. 6.

Aus der Constitution der Tabellen $T$ lassen sich weitere Schlüsse auf die Beschaffenheit der Gruppe $G$ und der Discriminante $D_\varphi$ ziehen.

Das einfachste symmetrische Product, welches $\varphi_1 - \varphi_\sigma$ enthält, umfasst nothwendig alle Werthe, die $\varphi_1 - \varphi_\sigma$ durch Transformationen annehmen kann. Die Gruppe, die zu $\varphi_1 - \varphi_\sigma$ gehört, umschliesst alle Substitutionen, welche $G_1$ und $G_\sigma$ gemeinsam haben; die Anzahl derselben, ein Theiler von $r$, sei $\frac{r}{k}$, dann ist die Anzahl der Werthe von $\varphi_1 - \varphi_\sigma$ gleich $\varrho k$. Es müssen also mindestens $\varrho k$ Differenzen $\varphi_\alpha - \varphi_\beta$ vorhanden sein; nun sind deren $\varrho(\varrho-1)$ vorhanden. Ist $k = r$, so ist $\varrho k = n!$ und es folgt: ***Hat eine Gruppe $G_1$ mit einer anderen aus ihr transformirten Gruppe $G_\alpha$ nur die identische Substitution* 1 *gemeinsam, so ist $\varrho(\varrho-1) \geqq n!$; und ist umgekehrt $\varrho(\varrho-1) < n!$, so hat $G_1$ mit jeder anderen Gruppe $G_\alpha$ Substitutionen gemeinsam, die von $s_1 = 1$ verschieden sind.***

Wir wollen jetzt untersuchen, unter welchen Umständen der Fall eintreten kann, dass alle $\varrho(\varrho-1)$ Differenzen $\varphi_\alpha - \varphi_\beta$ die verschiedenen Werthe einer einzigen unter ihnen $\varphi_1 - \varphi_\sigma$ sind, aus dieser also durch Transformation erlangt werden können. Zuerst können wir voraussetzen, dass nicht alle Transpositionen der $x$ in der Gruppe $G_1$ von $\varphi_1$ enthalten sind; denn sonst wäre $G_1$ symmetrisch, und $\varphi_1$ einwerthig. Da nach dem vorigen Paragraphen alle Zeilen der Tabellen $T$, welche zu den verschiedenen Werthen einer Differenz $\varphi_1 - \varphi_\sigma$ gehören, einander ähnlich sind, und da hier nur die Werthe ein und derselben Differenz vorkommen, so werden alle Zeilen aller Tabellen $T$ (natürlich immer mit Ausnahme der ersten Zeilen, welche die Gruppen $G_1$, $G_2$, ... $G_\varrho$ bilden) einander ähnlich sein; speciell wird also jede Zeile

von $T_1$ eine Transposition enthalten, da dies bei einer Zeile der Fall ist. Denn $G_1$ enthält nicht alle Transpositionen, $\varphi_1$ kann folglich in alle seine Werthe $\varphi_2, \varphi_3, \dots \varphi_\varrho$ durch Anwendung von je einer Transposition übergeführt werden, oder auch: $G_1$ kann in jede andere transformirte Gruppe $G_2$, $G_3, \dots G_\varrho$ durch Transformation mit je einer Transposition umgeformt werden.

Wir nehmen nun an, $G_1$ verbände symmetrisch eine Reihe der $x$ und zwar mehr als zwei und weniger als $n-1$; ferner sei $n > 4$. Dann enthält $G_1$ z. B. die symmetrische Gruppe von $x_1, x_2, x_3, \dots x_6$, während weder $(x_1 x_7)$ noch $(x_1 x_8)$ vorkommt. Dann giebt es unter den Transformirten $G_2, \dots G_\varrho$ eine andere Gruppe, $G_\gamma$, welche $x_7, x_8, x_3, \dots x_6$ enthält, während weder $(x_1 x_7)$ noch $(x_2 x_7)$ vorkommt. Soll nun das in $G_\gamma$ vorkommende $(x_3 x_7)$ aus einer in $G_1$ vorkommenden Substitution durch Transformation mit einer Transposition entstanden sein, so kann diese nur aus $(x_3 x_\alpha)$ $\alpha = 1, 2, 4, 5, 6$ durch $(x_\alpha x_7)$ gewesen sein, da $G_1$ $(x_\alpha x_7)$ nicht enthält. Die Transposition $(x_\alpha x_7)$ ist also nothwendig; sie reicht aber nicht aus, um auch $(x_3 x_6)$ in $G_\gamma$ hervorzurufen; also ist es nicht möglich, durch eine Transposition von $G_1$ zu $G_\gamma$ zu kommen. Daraus folgt: $G_1$ verbindet entweder überhaupt keine Elemente symmetrisch, d. h. $G_1$ gehört unter die alternirende Gruppe; oder nur je zwei; oder $n-1$.

Der letzte Fall lässt sich sofort erledigen. $G_1$ ist dann symmetrisch in $n-1$ Elementen z. B. in $x_2, x_3, \dots x_n$, und $\varrho$ wird $= n$; als $\varphi_1$ nehmen wir $x_1$ und erhalten $D_\varphi = \Delta$.

Im zweiten Falle kommen für $n > 4$ in der Gruppe $G_1$ vor

$$(x_1 x_2), \quad (x_3 x_4)$$

und in einer anderen Gruppe $G_\gamma$ die Transpositionen

$$(x_1 x_3), \quad (x_2 x_5);$$

auch hier ist eine Ueberführung durch Transposition unmöglich; oder es kommt in $G_1$ nur vor $(x_1 x_2)$, und in einer anderen Gruppe $(x_3 x_4)$, und auch dies lässt keine Ueberführung durch eine einzige Transposition zu. Ist dagegen $n = 4$, so sind die beiden Gruppen

$$G_1 = (1, (x_1 x_2)(x_3 x_4), (x_1 x_2), (x_3 x_4)) \quad r = 4, \quad \varrho = 6$$

$$G_1' = (1, (x_1 x_2)(x_3 x_4), (x_1 x_2), (x_3 x_4)$$
$$(x_1 x_3 x_2 x_4), (x_1 x_4 x_2 x_3), (x_1 x_3)(x_2 x_4), (x_1 x_4)(x_2 x_3)) \quad r = 8, \quad \varrho = 3$$

möglich. Für die erste finden wir die Tabelle $T_1$ von folgender Beschaffenheit:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\varphi_1 = x_1 + x_2,$ | $1,$ | $(x_1 x_2),$ | $(x_3 x_4),$ | $(x_1 x_2)(x_3 x_4),$ |
| $\varphi_2 = x_2 + x_3,$ | $(x_1 x_3),$ | $(x_1 x_2 x_3),$ | $(x_1 x_3 x_4),$ | $(x_1 x_2 x_3 x_4),$ |
| $\varphi_3 = x_2 + x_4,$ | $(x_1 x_4),$ | $(x_1 x_2 x_4),$ | $(x_1 x_4 x_3),$ | $(x_1 x_2 x_4 x_3),$ |
| $\varphi_4 = x_1 + x_3,$ | $(x_2 x_3),$ | $(x_1 x_3 x_2),$ | $(x_2 x_3 x_4),$ | $(x_1 x_3 x_4 x_2),$ |
| $\varphi_5 = x_1 + x_4,$ | $(x_2 x_4),$ | $(x_1 x_4 x_2),$ | $(x_2 x_4 x_3),$ | $(x_1 x_4 x_3 x_2),$ |
| $\varphi_6 = x_3 + x_4,$ | $(x_1 x_3)(x_2 x_4),$ | $(x_1 x_4)(x_2 x_3),$ | $(x_1 x_3 x_2 x_4),$ | $(x_1 x_4 x_2 x_3).$ |

Diese Gruppe genügt also den gestellten Bedingungen nicht, da die letzte Zeile keine Transposition in sich schliesst. Es findet dies jedoch für die zweite Gruppe $G_1'$ statt, und wenn wir für sie setzen

$$\varphi_1' = x_1 x_2 + x_3 x_4,$$

so erhalten wir

$$\varphi_2' = x_1 x_3 + x_2 x_4, \quad \varphi_3' = x_1 x_4 + x_2 x_3 \quad \text{und} \quad D_{\varphi'} = \varDelta.$$

Im ersten Falle endlich verbindet $G$ überhaupt keine Elemente der Gruppe symmetrisch, ist also eine Untergruppe der alternirenden Gruppe, oder die alternirende Gruppe selber. Im letzteren Falle haben wir wieder

$$D_\varphi = \varDelta;$$

der erstere ist unmöglich, da die einzelnen Zeilen von $T_1$ abwechselnd ganz der alternirenden Gruppe angehören oder gar nicht, und daher nicht sämmtlich einander ähnlich sein können.

Bedenkt man, dass wenn nicht alle Differenzen $\varphi_\alpha - \varphi_\beta$ die Werthe einer einzigen $\varphi_1 - \varphi_\sigma$ sind, dann nothwendig die Discriminante $D_\varphi$ in Factoren zerfallen muss, so folgt:

*Die Discriminante $D_\varphi$ jeder Gattung $G$ zerfällt in Factoren, wenn nicht $G$ entweder symmetrisch in $n-1$ Elementen, also $\varphi = x_\lambda$; oder $G$ alternirend in den $n$ Elementen, also $\varphi = \prod_{\lambda,\mu}(x_\lambda - x_\mu)$, $\lambda > \mu$; oder endlich $G$ die Ausnahmegruppe der Ordnung $r = 8$ und des Grades $n = 4$, also $\varphi = x_1 x_2 + x_3 x_4$ ist. In allen diesen Fällen wird*

$$D_\varphi = \varDelta.$$

*Abgesehen davon hat also $D_\varphi$ mindestens zwei Factoren, deren einer eine Potenz von $\varDelta$ ist.*

Strassburg i. E., den 14. Mai 1880.

---

# Sur quelques théorèmes relatifs au développement des fonctions et aux covariants.

(Note par M. *Faà de Bruno* à Turin.)

Dans ma *Théorie des formes binaires* j'ai donné un théorème nouveau sur le développement des fonctions que l'on peut énoncer ainsi. Si l'on a une fonction de $x$ representée par la fonction

$$(1.)\qquad \Phi = \varphi[A_0,\ A_1,\ A_2,\ \dots\ A_i],$$

où

$$(2.)\qquad \begin{cases} A_0 = a_0, \\ A_1 = a_1 + a_0 x, \\ A_2 = a_2 + 2a_1 x + a_0 x^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{i-1} = a_{i-1} + (i-1)a_{i-2}x + \cdots + a_0 x^{i-1}, \\ A_i = a_i + i a_{i-1} x + \cdots + a_0 x^i, \end{cases}$$

on aura

$$(3.)\qquad \Phi = \varphi + x\delta\varphi + \frac{x^2}{1.2}\delta^2\varphi + \cdots + \frac{x^i}{1.2\dots i}\delta^i\varphi + \cdots;$$

où

$$(4.)\qquad \delta = a_0\frac{d}{da_1} + 2a_1\frac{d}{da_2} + 3a_2\frac{d}{da_3} + \cdots$$

en supposant que, après avoir effectué les différentiations, on réduise $x = 0$.

Ma démonstration s'appuyait d'une part sur la forme symbolique qu'on peut donner à $A_i$, à savoir $(a+x)^i$, et d'autre part sur un théorème très général donné par M. *Sylvester* en 1866 dans le *Philosophical Magazine.*

M. *Sylvester* avait cru un moment dans le *Philosophical Magazine* (1877 p. 136) que M. *Salmon* avait donné le premier ce théorème dans son ouvrage *Lessons on higher algebra* (page 59 nº. 63). Mais M. *Salmon* ne fait qu'observer d'après M. *Cayley* que le coefficient de $\lambda^2$ dans l'invariant de la forme en $x+\lambda$ peut se déduire de celui de $\lambda$ par une double différentation, comme je l'ai fait voir aussi dans mon ouvrage en 1875. Par induction il avance qu'il en sera de même des autres coefficients. Ainsi il paraît que jusque-là le théorème n'existait pas; aussi M. *Sylvester* dans l'excellent Journal américain de mathématiques de Baltimore revient-il sur son opinion, et il écrit page 351 du vol. II ces lignes: *The theorem as far as I have been able to ascertain seems first to have been stated and proved in a complete form by C. Faà de Bruno in his valuable Thesaurus Théorie des formes binaires.*

Ce théorème pouvant être employé avec avantage dans plusieurs questions, je crois utile d'en donner ici une démonstration plus simple avec quelques applications.

En effet en développant, selon le théorème de *Maclaurin*, la fonction $\Phi$, il viendra

$$\Phi = \varphi_0 + x\varphi_0' + \frac{x^2}{1.2}\varphi_0'' + \cdots,$$

où par $\varphi_0^{(i)}$ on entend ce que devient $\varphi^{(i)}$ après y avoir fait $x=0$. Or

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{dA_1}\frac{dA_1}{dx} + \frac{d\varphi}{dA_2}\frac{dA_2}{dx} + \frac{d\varphi}{dA_3}\frac{dA_3}{dx} + \cdots;$$

donc

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x=0} = a_0\frac{d}{da_1} + 2a_1\frac{d}{da_2} + 3a_2\frac{d}{da_3} + \cdots.$$

Donc $\delta$ ayant la valeur ci-dessus on aura

$$\Phi = \varphi + x\delta\varphi + \frac{x^2}{1.2}\delta^2\varphi + \cdots,$$

ce qui est le théorème démontré dans mon ouvrage page 311.

Symboliquement on pourrait donc écrire $\Phi = e^{\delta x}\varphi$.

Or on sait (ib. p. 188) qu'en appelant

$$\varphi = (c_0, c_1, c_2, \ldots c_m)(x, y)^m$$

un covariant d'ordre $m$ d'une forme de degré $n$

$$f = (a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)(x, y)^n$$

on a les équations

$$\begin{array}{llll}
\delta c_0 = 0, & & \delta_1 c_m = 0, \\
\delta c_1 = c_0, & & \delta_1 c_{m-1} = c_m, \\
\delta c_2 = 2c_1, & & \delta_1 c_{m-2} = 2c_{m-1}, \\
\delta c_3 = 3c_2, & & \ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots \\
\delta c_{m-1} = (m-1)c_{m-2}, & & \delta_1 c_1 = (m-1)c_2, \\
\delta c_m = m c_{m-1}, & & \delta_1 c_0 = m c_1,
\end{array}$$

en admettant que

$$\delta_1 = a_n\frac{d\varphi}{da_{n-1}} + 2a_{n-1}\frac{d\varphi}{da_m} + \cdots + na_1\frac{d\varphi}{da_0}.$$

Il s'ensuit qu'on pourra poser indifféremment

$$(5.)\quad \begin{cases} \varphi = c_m + \dfrac{\delta^1 x}{1}c_m + \dfrac{\delta^2 x^2}{1.2}c_m + \dfrac{\delta^3 x^3}{1.2.3}c_m + \cdots + \dfrac{\delta^m x^m}{1.2.3\ldots m}c_m, \\ \varphi = c_0 + \dfrac{\delta_1 x}{1}c_0 + \dfrac{\delta_1^2 x^2}{1.2}c_0 + \dfrac{\delta_1^3 x^3}{1.2.3}c_0 + \cdots + \dfrac{\delta_1^m x^m}{1.2.3\ldots m}c_0. \end{cases}$$

On pourra donc poser symboliquement

$$(6.)\quad \varphi = e^{\delta x}c_m, \quad \varphi = e^{\delta_1 x}c_0.$$

Mais nous venons de voir que toute fonction $\Phi$ sous les conditions (2.) peut prendre aussi cette forme. On peut donc conclure ce nouveau théorème:

***Tout covariant $\varphi$ peut se déduire du dernier terme lorsqu'à la place de $a_0 a_1 a_2 \ldots a_n$ on met les quantités correspondantes $A_0 A_1 A_2 \ldots A_n$.*** Ainsi par exemple le covariant quadratique de la cubique n'est que le développement de

$$A_1 A_3 - A_2^2;$$

de sorte que

$$(a_0 a_2 - a_1^2) x^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) x + a_1 a_3 - a_2^2$$
$$= (a_1 + a_0 x)(a_3 + 3a_2 x + 3a_1 x^2 + a_0 x^3) - (a_2 + 2a_1 x + a_0 x^2)^2,$$

comme il est aisé de vérifier.

Autre exemple. Le covariant quadratique de la quintique, à savoir $(y=1)$

$$(a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2) x^2 + (a_0 a_5 - 3a_1 a_4 + 2a_2 a_3) x + a_1 a_5 - 4a_2 a_4 + 3a_3^2$$

sera le développement de $A_1 A_5 - 4A_2 A_4 + 3A_3^2$, à savoir

$$(a_0 + a_1 x)(a_5 + 5a_4 x + 4a_3 x^2) - 4(a_2 + 2a_1 x + a_0 x^2)(a_4 + 4a_3 x + 6a_2 x^2)$$
$$+ 3(a_3 + 3a_2 x + 3a_1 x^2)^2$$

où l'on a négligé dans les parenthèses les termes superflus en $x^3$, $x^4$, $x^5$.

Mais nous avons fait voir aussi dans notre ouvrage (p. 130) que toute forme $A_i$ peut se mettre sous la forme

$$A_i = e^{x\delta} a_i;$$

et par suite

$$A_{i-1} = \frac{1}{i} \delta A_i, \quad A_{i-2} = \frac{1}{i(i-1)} \delta^2 A_i, \quad \text{etc.}$$

Par conséquent, comme $\varphi$ peut être censée une fonction de $c_m$ où les $a$ sont transformés en $A$, et que tous les $A$ comme on vient de voir sont des fonctions $\delta$ de $A_n$, on en déduit que tout covariant peut être transformé en une fonction entière de $\delta$ appliqué à $a_n$, puisque à son tour $A_n = e^{x\delta} a_n$.

Ainsi le covariant quadratique susdit peut être écrit comme il suit:

$$\tfrac{1}{6} e^{\delta x} a_3 \, e^{\delta x} \delta^2 a_3 - \tfrac{1}{9}(e^{\delta x} \delta a_3)^2$$

Par conséquent ***tous les covariants d'une forme peuvent être réduits à des fonctions symboliques d'un seul paramètre qui sera le dernier terme de la forme.*** La forme donnée elle-même peut s'écrire symboliquement $f = e^{\delta x} a_n$.

En changeant $x$ en $y$, $a_i$ en $a_{n-i}$, on aurait une proposition réciproque pour $\delta_1$.

Turin, le 26 mai 1880.

---

# Ueber eine eigenthümliche Bestimmung einer Function durch formale Anforderungen.

(Von Herrn *Ernst Schröder* in Karlsruhe.)

---

Bei meinen Untersuchungen über die Functionalgleichungen, welche Beziehungen mehrargumentiger Functionen zu sich selbst und ihren Umkehrungen ausdrücken, bin ich gelegentlich des Studiums einer an sich sehr merkwürdigen Gruppe von solchen Gleichungen zu der Wahrnehmung gelangt, dass dieselben bisweilen hinreichen, nicht nur innerhalb abgeschlossener Zahlensysteme die Function vollständig zu definiren, sondern überhaupt in folgender Art Aufschluss über dieselbe zu geben.

Irgend ein Argumentwerthepaar der (nur hinsichtlich zweier Argumente in's Auge zu fassenden) Function bestimmt allemal ein gewisses System von Werthen, zu welchem jene selbst und auch noch andere gehören und deren Anzahl für die in Betrachtung gezogene Gruppe von Functionalgleichungen charakteristisch ist. Wir mögen dieses System von Werthen ein ***endliches Zahlensystem***, und zwar das jenem Argumentwerthepaar zugeordnete nennen. Zu je zwei Zahlenwerthen, die man aus diesem endlichen Zahlensysteme herausgreifen und (in bestimmter Folge) als Argumentwerthe annehmen mag, gehören alsdann Functionswerthe, die ebenfalls immer nur Zahlen des genannten Systemes sind — sodass die Definition der Function auch innerhalb des letzteren abgeschlossen werden könnte — und zwar ist die Zuordnung der Functionswerthe zu den Argumentwerthzusammenstellungen eine vollkommen bestimmte, eine unter Ausschluss jeder Willkür durch die Functionalgleichungen mit Nothwendigkeit bedingte.

Ich werde dies an der gedachten speciellen Gruppe von Functionalgleichungen eingehend nachweisen, und lege damit ein Bruchstück jener

Untersuchungen vor, welche sich als functionentheoretischer Beitrag zur Lehre von den endlichen sowohl als den unendlichen Mannigfaltigkeiten ansehen lassen werden, insofern sie mit Aufschluss geben über die in formaler Hinsicht bemerkenswerthesten Weisen, auf welche die Elemente einer Mannigfaltigkeit ihren eigenen Zusammenstellungen eindeutig und eindeutig umkehrbar zugeordnet werden können.

Die Schlussparagraphen werden eine hiemit im Zusammenhang stehende Episode aus der Lehre von der Zusammensetzung linearer Transformationen behandeln.

## §. 1.

Eine Function $f_1$ von mehreren Argumenten fasse ich nur hinsichtlich zweier derselben in's Auge, die ich als allgemeine Zahlen eines Zahlengebietes betrachtet, mit $a$, $b$ oder $c$ bezeichne. Anstatt $f_1(a, b)$ schreibe ich aber kürzer bloss $a.b$ oder $ab$, was ich auch ein ***symbolisches Product*** nennen werde. Diese Schreibweise ist, solange man nur mit einer einzigen Function zu thun hat, hinreichend ausdrucksvoll, da das blosse Nebeneinanderstellen der Argumentwerthe in einer bestimmten Ordnung genügt, den Functionswerth zu bestimmen. Die Einführung dieser Abkürzung — der grösstmöglichen, welche überhaupt gedacht werden kann — wird zudem durch das nachfolgende genugsam gerechtfertigt erscheinen, und Verwechselungen beuge ich durch die Erklärung vor, dass (mit einer aus dem Text leicht erkenntlichen Ausnahme) bis zu den drei Schlussparagraphen in dem ganzen Aufsatze niemals von gewöhnlichen, sondern ausschliesslich nur von dergleichen symbolischen Producten die Rede sein wird.

Dies vorausgesetzt muthe ich der Function $ab$ folgende Eigenschaften zu.

1. Dieselbe soll sammt ihren nach $a$ oder $b$ genommenen beiden Umkehrungen ***vollkommen eindeutig*** sein, namentlich also auch für jedes Werthesystem der Argumente wirklich einen dem Werthgebiet der letzteren angehörigen Zahlenwerth besitzen.

2. Dieselbe soll die durch die Formel

$$(1.) \qquad aa = a$$

ausgedrückte Eigenschaft allgemein besitzen. Ich nenne diese Eigenschaft $\lambda_0$, um daran zu erinnern, dass sie ein specifisches Gesetz der Operationen

des Logikcalculs*) ausdrückt. Dieselbe stellt das einfachste formale Gesetz vor, welchem die Function überhaupt unterworfen werden kann, woferne nur das Vorkommen specieller Zahlenwerthe und Zahlenverknüpfungsweisen in den allgemeinen Formeln ausgeschlossen wird.

3. Die Function soll ausserdem die etwas complicirtere Functionalgleichung:

$$(2.)\qquad (cb)\{b(ac)\} = a^{**}),$$

in welcher $a$, $b$, $c$ von einander unabhängig beliebige Zahlen bedeuten, befriedigen. Für die Wahl gerade dieser Functionalgleichung werde ich weiter unten gewichtige Motive anführen.

Ich behaupte dann, dass (bei Ausschluss von Zahlengebieten, die nur eine einzige Zahl enthalten würden) die Anzahl der Werthe, deren die Function $ab$ sowie ihre Argumente $a$ und $b$ fähig sind, nicht kleiner sein kann, als *acht.* Für ein Zahlensystem von acht Werthen aber könnte die Definition der Function schon zum Abschluss gebracht werden. Wie man diese Werthe festsetzt, ist an sich gleichgültig, da es bei der Function nur auf das Entsprechen der Werthsysteme beider Argumente und des Functionswerthes ankommt, mit andern Worten lediglich ankommt auf die Zuordnung des Productwerthes zu den Factorenwerthen. Nennen wir die Werthe einfach 1, 2, 3, ... 8, so werden natürlich diese Namen unter sich vertauscht werden dürfen. Abgesehen von diesen Vertauschungen ist aber — wie sich ferner behaupten lässt — das ganze System von Functionswerthen ein völlig bestimmtes, so wie es weiter unten von uns abgeleitet wird. Und mit den gefundenen analoge — man könnte sagen „congruente" — Beziehungen oder Zuordnungen bestehen für jedes Octupel von Werthen, welches durch zwei verschiedene beliebige (von ihnen) bestimmt wird, derart, dass durch blossen Namenwechsel der Argumentwerthe die neuen Beziehungen aus den einmal gefundenen hervorgehen.

Indem wir diese Behauptungen nun eingehend zu begründen beginnen, werden sich ausserdem bemerkenswerthe Aufschlüsse ergeben über gleichzeitige Geltung, über gegenseitiges Bedingen oder auch einseitiges Zurfolgehaben von gewissen Functionalgleichungen oder Gruppen von solchen.

---

*) Vergl. meine Schrift: der Operationskreis des Logikkalkuls, Leipzig, Teubner 1877, 37 Seiten.

**) In der gewöhnlichen Schreibweise würden also die Formeln (1.) und (2.) lauten:
$f_1(a, a) = a$ und $f_1[f_1(c, b), f_1\{b, f_1(a, c)\}] = a.$

Die Formel, deren Geltung wir als dritte Eigenschaft unserer Function beilegten, könnte beiläufig auch ersetzt werden durch jede der beiden folgenden:

$$(3.) \quad b[\{(cb)a\}c] = a, \quad \{(cb)(ba)\}c = a;$$

dieselbe kann jedoch nicht eher in ihrem richtigen Lichte dargestellt werden, als bis man auch die inversen Functionen zu der fraglichen mit in den Bereich der Betrachtung zieht.

§ 2.

Die Auflösung einer Gleichung, wie:

$$f_1(a, b) = g$$

nach den Unbekannten $a$ oder $b$ wird vermittelt durch je eine neue Function, die man etwa mit:

$$b = f_2(g, a) \quad \text{resp.} \quad a = f_3(b, g)$$

bezeichnen könnte. Von diesen neuen Functionen wurde bereits §. 1. sub 1. ausgemacht, dass sie niemals mehrdeutig und auch niemals sinnlos oder undeutig sein sollten.

Gleichwie wir aber die erste dieser Gleichungen kürzer mit

$$ab = g$$

darzustellen übereingekommen sind, wollen wir auch die beiden letzteren Gleichungen kürzer so schreiben:

$$b = g:a, \quad a = \frac{g}{b},$$

mithin die inversen Functionen der gegebenen symbolisch als Quotienten darstellen.

An andern Orten*) habe ich schon angeführt, dass alsdann nicht bloss für die vorliegende sondern für jede sammt ihren Umkehrungen eindeutige Function $ab$ wie in der Arithmetik die Formeln gelten:

$$(4.) \quad b(a:b) = \frac{a}{b}b = b:\frac{b}{a} = (ba):b = \frac{ab}{b} = \frac{b}{b:a} = a.$$

Aus diesen „Fundamentalrelationen" folgt dann umgekehrt leicht —

*) Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studirende, I. Band, Leipzig, Teubner 1873; Ueber die formalen Elemente der absoluten Algebra, Stuttgart, Schweizerbart 1874; vergleiche auch: Ueber *v. Staudts* Rechnung mit Würfen und verwandte Processe, Math. Ann. Bd. 10, S. 305 u. flg.

immer mit Rücksicht auf die vorausgesetzte Eindeutigkeit — dass die drei *„Grundfunctionen"* $ab$, $a:b$ und $\frac{b}{a}$ in der angegebenen Beziehung der Umkehrung zu einander stehen — in Anbetracht dass gleiche Operationen an gleichen Zahlen ausgeführt (eben der Eindeutigkeit wegen) gleiche Resultate liefern müssen.

Es giebt aber 5 *Vertauschungen* unter den 3 symbolischen Operationen, welche obiges System von Relationen (4.) nur in sich selbst transformiren (natürlich ungerechnet die „identische" Vertauschung, bei welcher alles ungeändert gelassen wird).

$c_1$, das soll heissen: Vertauschung der beiden Factoren in jedem vorkommenden Producte, sowie von Doppelpunkt und Bruchstrich, ist ein erstes dieser 5 Vertauschungsprincipien; es sind das diejenigen Vertauschungen, welche im Fall der Commutativität der symbolischen Multiplication, d. h. Symmetrie der Function $f_1$ absolut gestattet sind, und zu welchen die Formeln:

$$(C_1.) \qquad ab = ba, \quad a:b = \frac{a}{b}$$

die Autorisation ausdrücken würden.

*Absolut* sind diese Vertauschungen bei irgend einer Function oder symbolischen Operation nun allerdings im allgemeinen nicht gestattet. Wenn z. B. für eine specielle solche Operation eine Formel gilt, wie etwa (2.), so wird die durch die Vertauschung $c_1$ daraus hervorgehende Formel — das wäre $\{(ca)b\}(bc) = a$ — durchaus nicht zu gelten brauchen.

Wohl aber ist die erwähnte Vertauschung *relativ* gestattet. Wenn nämlich aus einem Formelsystem ein anderes lediglich auf Grund der vorausgesetzten Eindeutigkeit sowie der Fundamentalrelationen (4.) gefolgert worden ist, so wird der analoge Zusammenhang auch zwischen den beiden eventuell neuen Formelsystemen bestehen, welche durch die vorstehende (sowie überhaupt durch eine der erwähnten 5 Vertauschungen) aus den beiden gegebenen Systemen hervorgehen. Das zweite transformirte System wird gelten müssen, sobald nur die Geltung des ersten transformirten Systemes feststeht, welche allerdings zutreffen oder auch fehlen kann.

Formelsysteme, von denen durch $c_1$ das eine aus dem andern (also auch umgekehrt) hervorgeht, heissen einander *conjugirt*.

Eine zweite und dritte in demselben Sinne zulässige Vertauschung $c_2$ resp. $c_3$ deuten analog die Formeln an:

$$(C_2.)\quad a:b=b:a,\quad \frac{b}{a}=ba;$$

$$(C_3.)\quad \frac{b}{a}=\frac{a}{b},\quad ab=b:a.$$

Das vierte $c_{45}$ (anderwärts $c_0'$ von mir genannte) und das fünfte $c_{54}$ (oder $c_0''$) zu nennende Vertauschungsverfahren besteht darin, dass, wo immer Ausdrücke von den Formen

$$ab,\quad a:b,\quad \frac{a}{b}$$

sich finden, man dieselben vorwärts, resp. rückwärts cyklisch vertauscht.

Formelsysteme, welche durch eines von diesen 5 Vertauschungsprincipien aus einander ableitbar sind, werden von mir zu einerlei *„Art"* gezählt. Von diesen *folgt* nicht etwa eines aus dem andern, aber, wenn allenfalls ein logischer Zusammenhang zwischen den Formeln des einen Systems besteht, so muss eine ähnliche Abhängigkeit zwischen den entsprechenden Formeln des andern Systemes stattfinden.

## §. 3.

Nunmehr fasse man das folgende Tableau von Formeln in's Auge, in welchem links und rechts vom Mittelstriche vier Dreiecke zu erblicken sind, deren Seiten als Gleichheitszeichen zwischen den an die Ecken gesetzten Ausdrücken interpretirt werden sollen:

(5.)

$$S_{45}^{p}$$

$$\begin{array}{ccc} & (a:c):b & \\ \frac{\left(\frac{b}{a}\right)}{c} & \triangle & a\frac{c}{b} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \frac{b}{c}:a & \\ (a:c)b & \triangle & \frac{c}{ba} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \frac{b:c}{a} & \\ (ac)b & \triangle & c:(a:b) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & c(ab) & \\ a:(bc) & \triangle & \frac{b}{\left(\frac{c}{a}\right)} \end{array}$$

$$S_{54}^{p}$$

$$\begin{array}{ccc} & (ba)c & \\ b:(c:a) & \triangle & \frac{a}{cb} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \frac{b:c}{a} & \\ c:(ab) & \triangle & b\frac{a}{c} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \frac{b}{c}:a & \\ \frac{c}{\left(\frac{a}{b}\right)} & \triangle & b(ca) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b} & \\ (c:b)a & \triangle & (b:a):c \end{array}$$

$$S_0$$

$$(ca):b=(ba):c,\qquad \frac{ab}{c}=\frac{ac}{b}$$

$$\frac{b}{c:a}=\frac{c}{b:a},\qquad c(a:b)=b(a:c)$$

$$\frac{a}{c}b=\frac{a}{b}c,\qquad c:\frac{b}{a}=b:\frac{c}{a}.$$

Wir unterscheiden drei Systeme $S_{45}^p$, $S_{54}^p$ und $S_0$ von zwölf, zwölf und sechs allgemeinen Gleichungen.

Von Charakter sind diese Gleichungen keineswegs complicirter als diejenigen, welche in der elementaren Arithmetik von der eigentlichen Multiplication und ihren Umkehrungen gelten, und von welchen ich beispielsweise das Associationsgesetz: $b(ac) = (ba)c$ oder eine der ihm äquivalenten Formeln, wie $c(b:a) = \frac{c}{a}b$, $\frac{a:c}{b} = \frac{a}{b}:c$, $c:(b:a) = (ac):b$, etc. anführen will.

Durch ebenso einfache Schlussfolgerungen als die sind, durch welche man in der elementaren Algebra diese letzteren Gleichungen aus einander ableitet (vergl. mein schon citirtes Lehrbuch) gelingt es leicht auch, zu zeigen, zunächst, dass von den sechs Gleichungen $S_0$ eine beliebige, als gültig angenommen, für eine eindeutige und eindeutig umkehrbare Function $ab$ auch die Geltung der fünf übrigen Gleichungen zur nothwendigen Folge hat, sodass also diese sechs einander gegenseitig bedingen.

Weiter lässt sich durch nicht minder elementare Methoden zeigen, dass auch die Gruppe der zwölf Gleichungen $S_{45}^p$ solidarisch ist, nämlich keine derselben ohne die übrigen bestehen kann; und gleiches gilt von der Gruppe $S_{54}^p$. Jede von diesen Gruppen, oder also auch nur eine von deren Gleichungen, zieht aber ausserdem noch die sechs Gleichungen $S_0$ mit logischer Nothwendigkeit nach sich — welcher Schluss indessen nicht umkehrbar ist.

Es mögen, obschon die Folgerungen hier etwas weniger nahe liegen, dieselben ebenfalls dem Leser überlassen sein.

Eine jede von den Gleichungen $S_{45}^p$ z. B. bildet demnach eine ausreichende Prämisse zu der Gruppe von achtzehn Gleichungen (wobei sie selbst eingerechnet ist), welche durch die Vereinigung der Gruppen $S_{45}^p$ und $S_0$ entstehen. Ich werde die Gesammtheit dieser Gleichungen mit $S_{45}$ bezeichnen, sodass kurzmöglichst ausgedrückt:

$$S_{45} = S_{45}^p + S_0$$

ist; analog werde $S_{54}^p + S_0 = S_{54}$ bezeichnet. Am Schlusse unserer Betrachtungen wird es erwiesen erscheinen, dass die Annahmen $S_{45}$ und $S_{54}$ — abgesehen davon, dass ihnen die Formelgruppe $S_0$ gemeinsam ist — auch unabhängig von einander bestehen können.

Ein derartiges System logisch mit einander zusammenhängender

Formeln, von denen z. B., wie hier bei $S_{45}$, alle aus einer einzigen von ihnen — wenn auch nicht aus einer jeden — folgen, pflege ich einen *Algorithmus* zu nennen, wobei mir vor Augen schwebt, dass für die Functionen, für welche der Algorithmus gilt, die Formeln desselben ganz ähnlich als *Rechenvorschriften* zur allgemeinen Umformung von Buchstabenausdrücken benutzt werden können, wie in der allgemeinen Arithmetik die oben erwähnten Gleichungen, als da sind $a(bc) = (ab)c$, $c:(b:a) = (ac):b$ und andere, welche für die gewöhnliche Multiplication massgebend und als eine Norm der Buchstabenrechnung geläufig sind.

Der Algorithmus bildet eine *logische Einheit* und unterscheidet sich dadurch von der bloss äusserlichen Formelzusammenstellung, dass er niemals getrennt von demjenigen, was etwa noch aus den Gleichungen desselben gefolgert werden könnte, also stets im Zusammenhange mit seinen Consequenzen zu denken ist. $S^p_{45}$ ist bloss ein Formelsystem, $S_{45}$ ein dasselbe neben $S_0$ in sich begreifender Algorithmus, von dem jenes System die „Prämissen" zusammenfasst, d. h. diejenigen Gleichungen, deren jede, für sich allein als geltend angenommen, schon den ganzen Algorithmus nach sich zieht.

Die sämmtlichen vorstehend zur Sprache gebrachten Gleichungen besitzen die gemeinsame Form:

$$\varphi(a, b, c) = \psi(a, b, c),$$

woferne unter $\varphi$ und $\psi$ das Ergebniss der Verknüpfung von $a$, $b$ und $c$ vermittelst zweier successiven von den drei symbolischen Grundoperationen (mal, zu und durch, oder $f_1$, $f_2$, $f_3$) verstanden wird.

Von den beiläufig 1008 (oder — 18 Identitäten abgerechnet — 990) denkbaren Gleichungen des genannten Formelgebietes, sowie von allen erdenklichen Combinationen derselben, sind nun $S_{45}$ und $S_{54}$ die beiden einzigen Algorithmen, *welche einer zweigliedrigen*) Art angehören,* eine solche zusammen ausmachen.

Durch jede der Vertauschungen $c_1$, $c_2$, $c_3$ geht nämlich das System $S_{45}$ in das $S_{54}$ über und umgekehrt (eventuell auch unter Buchstabenwechsel), sodass diese beiden Algorithmen auch als zu einander conjugirte bezeichnet werden dürfen.

---

*) *n-gliedrig* soll eine Art genannt werden, wenn sie $n$ verschiedene individuelle Algorithmen in sich begreift; es kann nur 1, 2, 3 oder 6-gliedrige Arten geben.

Durch jede der Vertauschungen $c_{45}$ und $c_{54}$ geht ferner das System $S_{45}$ nur in sich selbst über, wobei die peripherischen Dreiecke cyklisch unter sich vertauscht werden, während das Mitteldreieck nur eine Drehung in sich selbst erleidet. Das nämliche muss daher auch von $S_{54}$ gelten.

Ich werde $S_{45}$ und $S_{54}$ *die beiden schiefen Algorithmen* nennen (den ersteren *rechtsdrehend* und den zweiten *linksdrehend*), weil sich an ihnen zwei entgegengesetzte Drehungsrichtungen (welche mit Bezug auf $c_{45}$ von dem angegebenen Sinne sind) unterscheiden lassen.

Der Nachweis, dass in dem ganzen Formelgebiete $\varphi(a,b,c) = \psi(a,b,c)$ keine andern dergestalt einander dual entsprechenden Algorithmen möglich sind, kann hier natürlich nicht gegeben werden; derselbe würde unter anderem ein umfassendes lexicalisches Beiwerk erheischen, welches ich indess gelegentlich einer zusammenhängenden Darstellung der hierauf mitbezüglichen allgemeinen Theorie der Verknüpfung einmal zu veröffentlichen hoffe.

Der den beiden schiefen Algorithmen untergeordnete Algorithmus $S_0$ bietet ein Beispiel einer *eingliedrigen* Art, indem derselbe durch jede der fünf Vertauschungen nur in sich selbst übergeht. Es existiren allerdings noch mehrere (im ganzen zwölf) Algorithmen, welche die gleiche Eigenschaft besitzen, auf dem genannten Formelgebiete.

Auch der Algorithmus $\lambda_0$ stellt eine eingliedrige Art von Algorithmen vor, in Anbetracht, dass aus der Gleichung $aa = a$ auch folgt: $a:a = a$ und $\frac{a}{a} = a$, welche drei Gleichungen durch die erlaubten Vertauschungen nur in sich selbst oder in einander übergehen.

Der rechtsdrehende Algorithmus drückt nun für sich allein die *dritte* der Eigenschaften aus, welche wir in §. 1 unserer Function $f_1(a, b)$ oder $ab$ zumutheten.

In der That gehen die Gleichungen $S_{45}^{\varrho}$ sämmtlich in eine der drei dort angegebenen Productformeln (2.) und (3.) über, sobald man sie — unter Benutzung von (4.) — auf irgend eine Weise von den in ihnen vorkommenden Divisoren befreit.

§. 4.

Aus $S_{45}$ allein folgt leicht, dass:

$$(6.)\qquad \{(cb)a\}c = a:b \quad \text{und} \quad (bc)(ca) = \frac{a}{b}$$

unabhängig von $c$ sein muss [vergl. (3.)]. Es sind das Gleichungen, welche

zeigen, wie für die dem Algorithmus $S_{45}$ gehorchende Function die beiderlei symbolischen Quotienten jeweils als Producte angeschrieben werden können.

Setzt man in dem System der Formeln $S_{45}^{\rho}$ auf jede Art zwei Buchstaben einander gleich, und berücksichtigt $\lambda_0$, so ergeben sich die folgenden Gleichungen, in welchen die Ausdrücke einer jeden Zeile weniger unter sich, als vielmehr je mit dem ersten linkerhand verglichen zu denken sind.

$$
(7.)\quad \left\{\begin{array}{lllllllll}
ab & = b:(ba) = & \dfrac{a}{ba} = a:(a:b) = & \dfrac{\left(\frac{b}{a}\right)}{b} = & \dfrac{b}{\left(\frac{a}{b}\right)} = (a:b):b = & \dfrac{b}{a}:a = \dfrac{b:a}{a}, \\
 & \overset{\frown}{\rho_0} \quad \overset{\frown}{\rho_0} & \overset{\frown}{\sigma_{23}} & \overset{\frown}{\sigma_{31}} & \overset{\frown}{\sigma_{31}} \quad \overset{\frown}{\sigma_{12}} & \overset{\frown}{\sigma_{12}} \quad \overset{\frown}{\sigma_{12}} \\
a:b = & \dfrac{b:a}{b} = (b:a)\,a = & \dfrac{\left(\frac{b}{a}\right)}{a} = & b\,(ab) = \quad (ba)\,b = & \dfrac{b}{\left(\frac{b}{a}\right)} = & \dfrac{a}{ab} = a\dfrac{a}{b}, \\
 & \overset{\frown}{\rho_0} \quad \overset{\frown}{\rho_0} & \overset{\frown}{\sigma_{31}} & \overset{\frown}{\sigma_{12}} \quad \overset{\frown}{\sigma_{12}} & \overset{\frown}{\sigma_{23}} & \overset{\frown}{\sigma_{23}} \quad \overset{\frown}{\sigma_{23}} \\
\dfrac{b}{a} = & b\dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{b}:a = & a(ab) = b:(a:b) = (b:a):b = & (ab)\,b = (a:b)\,a = a:(ba) \\
 & \overset{\frown}{\rho_0} \quad \overset{\frown}{\rho_0} & \overset{\frown}{\sigma_{12}} \quad \overset{\frown}{\sigma_{23}} \quad \overset{\frown}{\sigma_{23}} & \overset{\frown}{\sigma_{31}} \quad \overset{\frown}{\sigma_{31}} \quad \overset{\frown}{\sigma_{31}}.
\end{array}\right.
$$

Auf dieselbe Weise fliessen aus $S_0$ die Gleichungen:

$$
(8.)\quad \left\{\begin{array}{lll}
ab & = b\,(b:a) = & \dfrac{a}{b}\,a \\
 & \quad \overset{\frown}{\sigma_0} & \overset{\frown}{\sigma_0} \\
a:b = & b:\dfrac{a}{b} = & (ba):a \\
 & \quad \overset{\frown}{\sigma_0} & \overset{\frown}{\sigma_0} \\
\dfrac{b}{a} = & \dfrac{ba}{b} = & \dfrac{a}{b:a} \\
 & \quad \overset{\frown}{\sigma_0} & \overset{\frown}{\sigma_0}
\end{array}\right.
$$

Diese Gleichungen sind bedeutend einfacheren Charakters als die ursprünglichen $S_{45}$, insofern in dieselben (statt drei) nur mehr zwei allgemeine Zahlen als Operationsglieder oder Argumente eingehen; zudem sind diese rechterhand zwar ebenfalls durch zwei successive, linkerhand aber nur durch eine einzige von unsern drei symbolischen Grundoperationen mit einander verknüpft.

Das ganze Tableau erscheint als ein Conglomerat von fünf Formelgruppen:

$$\varrho_0,\ (\sigma_{23},\ \sigma_{31},\ \sigma_{12}),\ \sigma_0,$$

bezüglich bestehend aus denjenigen Gleichungen, welche sich in (7.) und (8.) gleichnamig bezeichnet finden.

Von diesen bildet die erste und die letzte für sich allein eine eingliedrige Art, wogegen die drei mittleren die eine Hälfte einer sechsgliedrigen Art vorstellen, deren drei andre Glieder zu ihnen conjugirt sein würden, aber nicht mit ihnen zugleich zu gelten brauchen; diese würden mit $\sigma_{32}$, $\sigma_{21}$, $\sigma_{13}$ zu bezeichnen sein.

Während man (weiter nichts als die Eindeutigkeit der drei Grundfunctionen und ihre durch (4.) ausgedrückten Beziehungen der Umkehrung zu einander voraussetzend) mit Leichtigkeit die Formeln einer jeden Gruppe auf einander zurückzuführen im Stande ist, besteht, wie ich beweisen könnte, ein solcher logischer Zusammenhang zwischen den verschiedenen Gruppen *nicht*. Diese fünf Gruppen werden daher als selbständige Algorithmen zu bezeichnen sein, welche auch ohne einander für gewisse Functionen einzeln Geltung haben können, und zwar verdienen die $\sigma_{23}$ etc. besondre Beachtung als Algorithmen, welche einer der einfachsten sechsgliedrigen Arten, die es giebt, angehören.

Ich werde nun statt der ursprünglichen Gruppe $\lambda_0+S_{45}$ von formalen Gesetzen lediglich die Formelgruppe (7.) [und (8.), welche letztere aber, wie man sogleich sehen wird, aus (7.) von selbst mit folgt] von unserer gesuchten Function als erfüllt annehmen. Zeigt sich durch diese die Function in der geschilderten Weise — namentlich also für ein acht Elemente umfassendes Zahlensystem vollkommen — bestimmt, so ist nicht nur die in §. 1 ausgesprochene Behauptung bewiesen, sondern auch erkannt, dass — für das begrenzte System wenigstens — die formalen Gesetze (7.) logisch äquivalent mit denen $\lambda_0+S_{45}$ sein müssen.

Für die bevorstehende Untersuchung ist es zweckmässig, die Gleichungen (7.) und (8.) als *reine* Multiplicationsgesetze darzustellen, d. h. sie in Form von solchen Functionalgleichungen anzuschreiben, in welche ausschliesslich die Function $f_1$, nicht aber deren inverse Functionen $f_2$ und $f_3$ mehr eingehen. Auf welche Art man auch — unter Benutzung von (4.) — die Gleichungen (7.) und (8.) von ihren Divisoren befreit, immer wird man die fünferlei Gruppen derselben bezüglich äquivalent finden mit nachstehenden bloss auf die symbolische Multiplication bezüglichen Formeln:

$$(9.)\quad a=(ab)(ba),\quad \text{das ist } \varrho_0;$$

$$(10.)\quad ab = b\{(ab)a\}, \quad \text{das ist } \sigma_{23};$$

$$(11.)\quad a = \{(ba)a\}b \quad \text{und} \quad (12.)\quad a = \{b(ab)\}(ab), \quad \text{das ist } \sigma_{31};$$

$$(13.)\quad a = \{b(ba)\}b, \quad (14.)\quad a = b\{b(ab)\}, \quad (15.)\quad a = b\{(ba)b\}, \quad \text{das ist } \sigma_{12};$$

$$(16.)\quad a(ab) = (ab)b, \quad \text{das ist } \sigma_0 \text{ oder die Gruppe (8.).}$$

Durch Vergleichung von (14.) mit (15.) zeigt sich nebenbei, dass auch stets

$$(17.)\qquad a(ba) = (ab)a$$

sein wird; ferner kann man aus (11.) und (13.) durch Vergleichung die Formel (16.) schliessen; womit der Nachweis erbracht ist, dass die Formelgruppe (8.) aus (7.) mit folgt.

Aus (7.) oder (16.) folgt leicht auch $\lambda_0$, indem man z. B. $a:a$ für $b$ in (16.) setzend erhält: $a\{a(a:a)\} = \{a(a:a)\}(a:a)$, oder mit Rücksicht auf (4.): $aa = a(a:a) = a$.

## §. 5.

Indem wir nun ein specielles Werthsystem der Function $ab$ aufsuchen, ist es noch gut, folgende Bemerkungen allgemein vorauszuschicken:

$\alpha$) Ich werde die Ungleichheit von Zahlenwerthen mit einem querdurchstrichenen Gleicheitszeichen andeuten, in Anbetracht, dass das bisweilen hiefür gebräuchliche aus „grösser oder kleiner" abgeleitete Zeichen $\gtrless$ auf manchen Zahlengebieten, wie z. B. schon auf dem der gemeinen complexen Zahlen, für diesen Zweck ungeeignet erscheint. Ein Ausspruch wie $\varkappa \neq \lambda$ soll also einfach die Gleichheit zwischen den speciellen Zahlen $\varkappa$ und $\lambda$ verneinen.

$\beta$) Bedeuten $\mu \neq \varkappa$ und $\nu \neq \lambda$ specielle Zahlen und ist der Functionswerth $\varkappa\lambda = \tau$ bekannt, so folgt $\mu\lambda \neq \tau$ und $\varkappa\nu \neq \tau$.

Denn wäre $\mu\lambda = \tau$, so hätten wir $\mu\lambda = \varkappa\lambda$ und würde sich hierin wegen der Eindeutigkeit der symbolischen Theilung oder der bezüglichen inversen Function $f_3$ der symbolische Factor $\lambda$ beiderseits „streichen" lassen; es ergäbe sich also $\mu = \varkappa$ im Widerspruch mit der Voraussetzung; u. s. w.

Sobald also für einzelne Werthepaare der Argumente die zugehörigen Functionswerthe in Zahlen bereits festgesetzt oder bekannt sind, werden ebendiese Zahlen für gewisse Reihen von andern Werthsystemen der Argumente als Functionswerthe fernerhin ausgeschlossen sein. Genauer:

Ist der Functionswerth $\varkappa\lambda = \tau$ gegeben, so ist der Zahlenwerth $\tau$

unzulässig für alle übrigen symbolischen Producte, welche die Form $\varkappa a$ oder $a\lambda$ haben.

Ich werde die so von selbst für die Function gewisser Argumentsysteme nicht mehr disponibeln Zahlenwerthe künftighin kurz als *„direct“ unzulässig* bezeichnen.

Vorstehende Bemerkung passt auf alle Functionen, welche die Eigenschaft 1. des §. 1 besitzen.

$\gamma$) Für zwei einander gleiche Argumentwerthe sind die zugehörigen Functionswerthe wegen $\lambda_0$ oder der Annahme 2. des §. 1 bereits bestimmt. Wofern man also den Argumenten die speciellen Werthe 1, 2, 3, ... überhaupt beilegen darf, so ist $1.1=1$, $2.2=2$, $3.3=3$, etc. — wobei die Malzeichen auch weggelassen werden mögen.

$\delta$) Für unsere auch noch die formalen Gesetze (7.) erfüllende Function kann die symbolische Multiplication auch nicht einmal in einem speciellen Falle commutativ sein, d. h. für $\varkappa \neq \lambda$ ist stets $\varkappa\lambda \neq \lambda\varkappa$.

Denn wäre $\varkappa\lambda = \lambda\varkappa$, so könnten wir den Werth beider Producte $\tau$ nennen. Nach (9.) wäre dann einerseits

$$\varkappa = (\varkappa\lambda)(\lambda\varkappa) = \tau\tau, \quad \text{andrerseits} \quad \lambda = (\lambda\varkappa)(\varkappa\lambda) = \tau\tau,$$

also $\varkappa = \lambda$, im Widerspruch gegen die Annahme.

Ich gebe die nachfolgende Herleitung mit einiger Ausführlichkeit, weil mir dieselbe als ein vorzügliches Paradigma zur Erläuterung der Methode erscheint, durch welche ich noch sehr zahlreiche Resultate ähnlicher Natur (Functionstafeln) gewonnen habe, die ich in späteren Mittheilungen dann ohne weitere Andeutung über ihre Herleitung zu verwerthen gedenke.

## §. 6.

Wenn ein Zahlengebiet (sit venia verbo!) nur aus einer einzigen Zahl bestände, welche ich 1 nennen will, so wäre auf diesem Gebiete die Function $ab$ durch die Gleichung $11 = 1$ vollständig definirt, und würden alsdann die sämmtlichen formalen Gesetze, von welchen in diesem Aufsatz gesprochen — ja alle erdenklichen, in denen Zahlen nur durch die drei Grundfunctionen sich verknüpft finden — identisch befriedigt sein, in Anbetracht, dass für die Argumente $a$, $b$, $c$, ... überhaupt nur die Annahme $a = b = c = \cdots = 1$ gestattet erscheint.

Da dieser Fall weiter kein Interesse besitzt, wurde schon in §. 1 als eine selbstverständliche die Annahme eingeflochten, dass das zu be-

trachtende Zahlengebiet ***mehr als eine*** Zahl enthalte, welche als Werth von den Argumenten sowie der Function angenommen werden kann.

Es existiren dann mehrere (mindestens zwei) von einander verschiedene Zahlen in dem Gebiete, von welchen nichts hindert, zwei erste ins Auge zu fassende — anstatt etwa mit $\alpha_1$ und $\alpha_2$ — kürzer mit 1 und 2 selbst zu bezeichnen.

Nach $\gamma$) ist dann $11 = 1$ und $22 = 2$.

Da in der Bezeichnung von $a$, $b$ als „allgemeine Zahlen" die Annahme stillschweigend eingeschlossen lag, dass diese Argumente innerhalb des Zahlengebiets unbeschränkt variabel seien, so können sie auch die Werthezusammenstellung 1, 2 sowie die 2, 1 annehmen. Für die Producte 12 und 21 sind aber nach $\beta$) die Werthe 1 und 2 als Functionswerthe bereits direct ausgeschlossen und nach $\delta$) müssen beide Producte einen verschiedenen Werth haben.

Daher muss das Zahlensystem zum mindesten vier Elemente enthalten, und indem wir festsetzen, dass

$$(A.)\qquad 12 = 3 \quad \text{und} \quad 21 = 4$$

sein solle, thun wir weiter nichts, als geeignete Namen für diese beiden neuen Werthe einführen. Auch für diese muss $33 = 3$ und $44 = 4$ sein. Ausserdem folgt nach (9.): $1 = (12)(21)$ und $2 = (21)(12)$ und demnach ist auch

$$34 = 1 \quad \text{und} \quad 43 = 2$$

bekannt. Die Gleichungen (16.) und (17.) je auf beide möglichen Arten auf die Zahlen 1 und 2 angewendet geben aber:

$$13 = 32, \quad 24 = 41, \quad 31 = 14, \quad 42 = 23.$$

Für die Producte $13 = 32$ sind nun durch das bisherige die Werthe 1, 2 und 3 von vornherein ausgeschlossen, nämlich für 13 direct die Werthe 1 und 3, für 32 die 3 und 2, für beide also, da sie einander gleich sein sollen, alle drei Werthe.

Wäre aber $13 = 4$, so würde sich nach Gleichung (14.) in Gestalt von $1 = 3\{3(13)\}$ ergeben $1 = 3(34) = 31 = 11$, also $3 = 1$, im Widerspruch mit dem früheren. Es muss also auch $13 = 32$ eine neue von 1, 2, 3, 4 verschiedene Zahl sein.

Dasselbe gilt von $24 = 41$ — für welche Producte die Werthe 1,

2, 4 bereits ausgeschlossen erscheinen — da die Annahme $24 = 41 = 3$ nach (14.) liefern würde $2 = 4\{4(24)\} = 4(43) = 42$ im Widerspruch mit $2 = 2\dot{2}$. Dies hätte auch mit Rücksicht auf die Symmetrie schon ohne Weiteres behauptet werden können.

Nicht minder müssen die Producte $31 = 14$ sowie die $42 = 23$ zunächst von 1, 2, 3, 4 verschieden sein, was für die ersteren nur bezüglich des Werthes 2, für die letzteren bezüglich 1 besonders nachzuweisen ist. Die Annahme $31 = 14 = 2$ würde aber nach (14.) geben: $3 = 1\{1(31)\} = 1(12) = 13$, was unverträglich ist mit $3 = 33$. [Ebenso würde die Annahme $42 = 23 = 1$ das Ergebniss liefern: $4 = 2\{2(42)\} = 2(21) = 24$ entgegen der Gleichung $4 = 44$].

Die Werthe 13 und 14 sind nun zuverlässig verschieden; daher müssen

$$(B.) \quad 13 = 32 = 5 \quad \text{und} \quad 31 = 14 = 6$$

zwei weitere Zahlen des Gebietes sein.

Auch von diesen müssen ferner die Producte $24 = 41$ und $42 = 23$ sich wiederum unterscheiden. Denn wäre $24 = 41 = 6$, so müsste nach (9.) sein $1 = (14)(41) = 66$ im Widerspruch mit $66 = 6$. Wenn ferner $42 = 23 = 5$ wäre, würde ebenso folgen: $2 = (23)(32) = 55 = 5$, was der Beziehung $2 \neq 5$ widerspricht. Man könnte hier auch auf $\delta$) sich berufen.

Bleibt also nur noch $41 \neq 5$ und $23 \neq 6$ zu zeigen.

Nach (9.) muss nun $1 = (13)(31) = 56$ und $3 = (31)(13) = 65$ sein. Wäre aber $41 = 5$, so erhielten wir nach (9.): $4 = (41)(14) = 56$ entgegen dem ersteren, und wäre $23 = 6$, so erhielten wir ebenso $2 = (23)(32) = 65$ entgegen dem letzteren von diesen Ergebnissen.

Es müssen daher 41 und $23 = 42$ abermals zwei neue und zwar von einander verschiedene Zahlen sein, weshalb nichts übrig bleibt, als zu setzen:

$$(C.) \quad 41 = 24 = 7 \quad \text{und} \quad 42 = 23 = 8.$$

Das Zahlensystem enthält sonach mindestens acht Elemente.

Wendet man aber die Gleichung (9.) ebenso wie oben auf die Werthepaare (1, 2) und (1, 3) auch noch auf die Paare (1, 4), (2, 3), (2, 4) [und (3, 4)] an, so gewinnt man noch sechs neue Beziehungen, welche mit den früher gefundenen übersichtlich zusammengestellt, sich als die im nachfolgenden Tableau links vom Striche befindlichen darstellen:

$$\begin{array}{l}
1 = 11 = 34 = 56 = 67 \;|\; = 28 = 45 = 72 = 83,\\
2 = 22 = 43 = 78 = 85 \;|\; = 16 = 37 = 51 = 64,\\
3 = 33 = 12 = 65 = 58 \;|\; = 47 = 26 = 84 = 71,\\
4 = 44 = 21 = 87 = 76 \;|\; = 35 = 18 = 63 = 52,\\
5 = 55 = 13 = 32 \;|\; = 27 = 74 = 46 = [68 = 81],\\
6 = 66 = 31 = 14 \;|\; = 48 = 82 = 25 = [57 = 73],\\
7 = 77 = 24 = 41 \;|\; = 15 = 53 = 38 = [86 = 62],\\
8 = 88 = 42 = 23 \;|\; = 36 = 61 = 17 = [75 = 54].
\end{array}$$

Man könnte nun zeigen, dass, wenn die Grundgleichungen (9.) bis (17.) unseres Algorithmus auch nur für das erste Quadrupel von Werthen 1, 2, 3, 4 durchweg erfüllt sein sollen, auch noch die übrigen von den vorstehend angegebenen Gleichungen gelten müssen mit Ausnahme derer für die in eckige Klammer gesetzten Ausdrücke.

Am raschesten möchten jedoch die noch ausstehenden Gleichungen auf folgendem Wege zu gewinnen sein.

Nach (14.) schliesse man:

$$1 = 2\{2(12)\} = 28, \quad 2 = 1\{1(21)\} = 16, \quad 3 = 4\{4(34)\} = 47, \quad 4 = 3\{3(43)\} = 35$$

und hieraus sogleich nach (16.) weiter:

$$2(28) = (28)8, \quad 1(16) = (16)6, \quad 4(47) = (47)7, \quad 3(35) = (35)5$$

oder bezüglich:

$$4 = 18, \qquad 3 = 26, \qquad 2 = 37, \qquad 1 = 45;$$

desgleichen aus früheren Gleichungen:

$$(78)8 = 7(78), \quad (56)6 = 5(56), \quad (87)7 = 8(87), \quad (65)5 = 6(65),$$

d. h.

$$1 = 72, \qquad 2 = 51, \qquad 3 = 84, \qquad 4 = 63;$$

endlich:

$$(72)2 = 7(72), \quad (51)1 = 5(51), \quad (84)4 = 8(84), \quad (63)3 = 6(63),$$

d. h.

$$3 = 71, \qquad 4 = 52, \qquad 1 = 83, \qquad 2 = 64$$

Damit sind alsdann die Werthe der ersten vier Zeilen unseres Tableaus sämmtlich gewonnen. Daraus schliesse man nur etwa noch: $4(45) = (45)5$ und $2(26) = (26)6$, d. h. $7 = 15$ und $8 = 36$, und bemerke nun, dass die bisherigen Gleichungen — indem man aus den Doppelgleichungen (*B.*),

(*C.*) je die eine Hälfte auswählt — angesehen werden können als die auf Grund von (7.) aus den Prämissen

$$12 = 3, \quad 21 = 4, \quad 13 = 5, \quad 31 = 6, \quad 24 = 7, \quad 42 = 8$$

gezogenen Folgerungen. (Die vier letzten von diesen Prämissengleichungen sind übrigens selbst von den beiden ersten wenigstens insofern Folgerungen, als die vier Producte linker Hand jedenfalls von den früheren und von einander verschiedene Zahlen sein mussten. Nur insofern als sie für diese neuen Zahlen bestimmte Namen oder Werthe festsetzen, sind diese vier Gleichungen auch als Definitionen zu betrachten.)

Vergleicht man aber damit die unter den schon gewonnenen in dem Tableau sich ebenfalls findenden Gleichungen:

$$13 = 5, \quad 31 = 6, \quad 15 = 7, \quad 51 = 2, \quad 36 = 8, \quad 63 = 4,$$

so sieht man, dass es, wofern der Algorithmus auch für das Quadrupel 1, 3, 5, 6 gelten soll, gestattet sein muss, die Werthe

$$12345678$$

bezüglich zu ersetzen durch

$$13567284,$$

mit anderen Worten die (2357846) cyklisch zu vertauschen.

So aber folgen die noch fehlenden Werthe von 6 sofort aus den bekannten von 4; aus denen von 3 folgen direct die von 5, daraus dann die von 7, endlich die von 8. Und hiemit ist das ganze Tableau nunmehr gewonnen.

## §. 7.

Wenn noch 2 mit 8 vertauscht wird, so stellt sich das im vorigen Paragraphen gefundene System von Beziehungen am elegantesten, und zwar wie folgt, dar:

$$(18.) \quad \begin{cases} 1 = 11 = 23 = 34 = 45 = 56 = 67 = 78 = 82, \\ 2 = 22 = 17 = 75 = 54 = 48 = 83 = 36 = 61, \\ 3 = 33 = 71 = 18 = 86 = 65 = 52 = 24 = 47, \\ 4 = 44 = 58 = 81 = 12 = 27 = 76 = 63 = 35, \\ 5 = 55 = 46 = 62 = 21 = 13 = 38 = 87 = 74, \\ 6 = 66 = 85 = 57 = 73 = 31 = 14 = 42 = 28, \\ 7 = 77 = 32 = 26 = 68 = 84 = 41 = 15 = 53, \\ 8 = 88 = 64 = 43 = 37 = 72 = 25 = 51 = 16, \end{cases}$$

oder in leicht verständlicher Abkürzung:

$$(19.)\quad \begin{cases} 1-2345678, \\ 2-1754836, \\ 3-7186524, \\ 4-5812763, \\ 5-4621387, \\ 6-8573142, \\ 7-3268415, \\ 8-6437251. \end{cases}$$

Es ist dieses Ergebniss (18.) weiter nichts als eine ***symbolisch als Einmaleins geschriebene Tabelle von Functionswerthen***, und zwar definirt die Tafel unsere Function vollständig für ein aus acht Werthen bestehendes Zahlengebiet, aus welchem die Argumentwerthe ad libitum herausgegriffen werden können; demselben Gebiete gehören aber auch stets die zugehörigen Functionswerthe an, sodass man bei der Erklärung der Function bei diesen acht Werthen stehen bleiben, mit ihnen das ganze Zahlengebiet abschliessen könnte. Die acht Elemente dieses Zahlengebietes sind ursprünglich von völlig beliebigem Werthe, da man, wie schon oben erwähnt, die Nummern 1 bis 8 auch bloss als Indices einer Buchstabengrösse $\alpha$ ansehen kann. Durch irgend zwei von ihnen wie $\alpha_1$ und $\alpha_8$, welche also a priori ebenfalls ganz beliebige Werthe vorstellen können, sind aber begrifflich vollkommen diejenigen sechs bestimmt, welche sich noch durch Multiplication (unmittelbar oder mittelbar) aus ihnen ableiten lassen, wie $\alpha_1\alpha_8$, $\alpha_8\alpha_1$, $\alpha_1(\alpha_1\alpha_8)$, etc., und es leuchtet aus unserer Herleitung des Tableaus (18.) die Thatsache ein, dass — was das Wesen der Function ausmacht — die *Zuordnungsweise* zwischen diesen achterlei Functionswerthen und den aus ihnen herausgegriffenen Argumentwerthepaaren durch unsere formalen Anforderungen $\lambda_0+S_{45}$ oder (7.) *eindeutig bestimmt* ist — dergestalt, dass zwischen den aus irgend zwei andern Argumentwerthen $\alpha_1'$, $\alpha_8'$ durch Multiplication ableitbaren Werthen ein dem vorigen „congruentes" System von Zuordnungen bestehen muss, welches sich durch blossen Namenwechsel der Elemente (nämlich einfach durch Vertauschung der $\alpha'$ mit den $\alpha$) in jenes überführen lässt.

Entsprechend der eindeutigen Umkehrbarkeit unserer Function $f_1$ muss aber auch unser symbolisches Einmaleins eindeutig umkehrbar sein;

es liefert in der That ein ebenso in sich vollendetes „*Einszueins*“ sowie „*Einsdurcheins*“. Diese beiden lauten bezüglich:

$$(20^a.)\quad \begin{cases} 1 = 1:1 = 2:6 = 6:3 = 3:7 = 7:4 = 4:8 = 8:5 = 5:2 \\ 2 = 2:2 = 1:8 = 8:7 = 7:3 = 3:5 = 5:6 = 6:4 = 4:1 \\ 3 = 3:3 = 7:5 = 5:1 = 1:2 = 2:8 = 8:4 = 4:6 = 6:7 \\ 4 = 4:4 = 5:7 = 7:8 = 8:6 = 6:1 = 1:3 = 3:2 = 2:5 \\ 5 = 5:5 = 4:3 = 3:6 = 6:8 = 8:2 = 2:7 = 7:1 = 1:4 \\ 6 = 6:6 = 8:1 = 1:5 = 5:4 = 4:7 = 7:2 = 2:3 = 3:8 \\ 7 = 7:7 = 3:4 = 4:2 = 2:1 = 1:6 = 6:5 = 5:8 = 8:3 \\ 8 = 8:8 = 6:2 = 2:4 = 4:5 = 5:3 = 3:1 = 1:7 = 7:6, \end{cases}$$

resp.

$$(20^b.)\quad \begin{cases} 1 = 1|1 = 2|4 = 4|6 = 6|8 = 8|3 = 3|5 = 5|7 = 7|2 \\ 2 = 2|2 = 1|5 = 5|8 = 8|6 = 6|7 = 7|4 = 4|3 = 3|1 \\ 3 = 3|3 = 7|8 = 8|5 = 5|4 = 4|1 = 1|6 = 6|2 = 2|7 \\ 4 = 4|4 = 5|1 = 1|7 = 7|3 = 3|8 = 8|2 = 2|6 = 6|5 \\ 5 = 5|5 = 4|2 = 2|3 = 3|7 = 7|6 = 6|1 = 1|8 = 8|4 \\ 6 = 6|6 = 8|7 = 7|1 = 1|2 = 2|5 = 5|3 = 3|4 = 4|8 \\ 7 = 7|7 = 3|6 = 6|4 = 4|5 = 5|2 = 2|8 = 8|1 = 1|3 \\ 8 = 8|8 = 6|3 = 3|2 = 2|1 = 1|4 = 4|7 = 7|5 = 5|6, \end{cases}$$

wofern wir bezüglich des letzteren — was schon im Hinblick auf §. 2 durch die Symmetrie geboten erscheint — die Brüche *aufwärts* gelesen denken, statt $\frac{b}{a}$ also auch $a|b$ (lies: *a in b*) schreiben.

Durch diese beiden Tafeln, deren letztere genauer also als „*Einsineins*“ zu bezeichnen wäre, erscheinen die beiden inversen Functionen $f_2$ und $f_3$ der gesuchten ebenso eindeutig und innerhalb unseres achtelementigen Zahlensystems vollständig explicirt, wie $f_1$ durch (18.).

Hiernach ist nun ersichtlich, dass von den denkbaren Verknüpfungen der Elemente unseres Systems durch irgendwelche von den drei Grundfunctionen keine aus diesem System herausführen kann; vielmehr sind alle (symbolischen) Grundoperationen unbedingt ausführbar innerhalb des begrenzten Zahlensystems selbst, oder innerhalb der Octade von Werthen.

Nunmehr müssen wir uns aber noch überzeugen, dass für die durch (18.) tabellarisch definirte Function $f_1$ wirklich die Gesetze des Algorithmus

$S_{45}$ allgemein erfüllt sind, welche drei von den acht Werthen man auch unter *a, b, c* verstehen mag, d. h. für jede Triade von Werthen. Es genügt, für eine einzige von den zwölf Gleichungen $S^{\varrho}_{45}$ diesen Nachweis zu leisten.

Eine Frage derart, ob in dem System (d. i. für die in ihm gegebene Function) ein Algorithmus gelte oder nicht gelte, kann nicht anders als empirisch entschieden werden. Doch wird die Untersuchung ausserordentlich vereinfacht durch die Wahrnehmung der ***Vertauschungen, welche das System*** — hier (18.) — ***in sich selbst transformiren.***

Es genügt in dieser Beziehung fünfzehn Substitutionen ins Auge zu fassen, und zwar die folgenden acht cyklischen Vertauschungen von je sieben Elementen, wobei das vor die Klammer gesetzte achte jeweils unverändert festzuhalten ist, sowie die daneben gesetzten Quadrupel von (einfachen) „Verwechselungen" d. h. Producte von je vier Transpositionen:

$$(21.)\quad \left\{\begin{array}{l} 1-(3572468) \\ 2-(7431586) \\ 3-(1627854) \\ 4-(8265173) \\ 5-(6184237) \\ 6-(5348712) \\ 7-(2813645) \\ 8-(4756321) \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{l} (12)(37)(45)(68) \\ (13)(48)(56)(72) \\ (14)(52)(67)(83) \\ (15)(63)(78)(24) \\ (16)(74)(82)(35) \\ (17)(85)(23)(46) \\ (18)(26)(34)(57) \end{array}\right\} \quad (22.)$$

Nachdem die Zulässigkeit der ersten Substitutionen von diesen beiden Systemen an dem Schema (19.) direct erkannt ist, wird man die folgenden am besten durch Multiplication nach den für Substitutionen geltenden Regeln aus ihnen ableiten.

Mit Hülfe vorstehender Substitutionen lassen nun aber von den bezüglich acht, achtundzwanzig und sechsundfünfzig Combinationen der Elemente 1 bis 8 zur ersten, zweiten und dritten Klasse alle folgenden sich aus einer einzigen, z. B. der ersten der Klasse ableiten. Der Nachweis für die Gültigkeit einer drei allgemeine Zahlen *a, b, c* enthaltenden Formel auf dem Zahlengebiete wird daher vollständig erbracht sein, sobald man nur die Formel für die drei Triaden 111, 112 und 123 von Werthen, die letzteren mit allen ihren Permutationen angesetzt, verificirt hat. Diese $1+3+6=$ zehn Verificationen etwa mit der Formel (2.) vorzunehmen, ver-

ursacht nur ein Minimum von Rechnung, und werden damit die Gesetze $\lambda_0 + S_{45}$ als durchgängig gültige erkannt sein.

Von Wichtigkeit für die Constatirung der Gültigkeit von Algorithmen auf unserem Zahlensysteme kann auch noch die Bemerkung werden, welche sich bei einer Vergleichung der drei Functionstabellen (18.) und (20.) aufdrängt: dass die Substitution:

$$(23.) \qquad (364)(578)$$

desgleichen natürlich alle diejenigen Substitutionen, welche sich noch aus ihr durch Verbindung mit denen (21.) oder (22.) neu ergeben würden, den Erfolg besitzt, die erste Tabelle in die zweite, diese in die dritte und letztere wieder in die erste überzuführen, wofern man nur mit den operativen Verknüpfungszeichen . , : und | gleichzeitig im Kreise vorrrückt.

Es ist, mit anderen Worten, die gleichzeitige Anwendung der Substitutionen (23.) mit der cyklischen Vertauschung $c_{45}$ der drei Elementarausdrücke oder Grundoperationen zulässig, indem sie das ganze System der drei Functionstabellen nur in sich selbst herumschwingt, und hieraus folgt, dass, wenn eine Formel auf dem Gebiete (18.) gilt, zugleich auch diejenigen Formeln auf ihm gelten müssen, welche sich durch (ein- oder zweimalige) Anwendung von $c_{45}$ aus jener ergeben (die dreimalige Anwendung von $c_{45}$ führt die Formel nothwendig wieder in sich selbst zurück). Mit anderen Worten die Functionen $f_2$ und $f_3$ oder $a:b$ und $a|b$ oder $\frac{b}{a}$ würden, wenn man sie mit $ab$ bezeichnete, denselben formalen Gesetzen genügen, wie $f_1$.

Letzteres gilt indessen keineswegs auch von den Functionen $ba$, $b:a$ und $b|a = \frac{a}{b}$, wie aus folgendem erhellt.

Nennen wir die Tafel (18.) kurz ein *„Lösungsgebiet"* der Functionalgleichungen oder des Algorithmus $\lambda_0 + S_{45}$, so muss nach dem vorhin gesagten auch jedes der beiden Schemata (20.) ein solches Lösungsgebiet sein, wofern man Doppelpunkt oder verticalen Bruchstrich durch das Malzeichen ersetzt. Dagegen stellt (18.) keineswegs ein Lösungsgebiet des anderen Algorithmus $\lambda_0 + S_{54}$ vor, da man an irgend einem Beispiel — etwa für die Indicestriade 1, 2, 3 — sich leichtlich überzeugt, dass die zu (2.) conjugirte Gleichung von $S_{54}$ hier nicht erfüllt wird.

Will man aber ein Lösungsgebiet von $S_{54} + \lambda_0$ erhalten, so braucht man nur in (18.) die sämmtlichen Producte rückwärts zu lesen. Auf diese

Weise ergiebt sich nämlich das zu dem (18.) conjugirte Einmaleins, welches auch dem zu $\lambda_0 + S_{45}$ conjugirten Algorithmus Genüge leisten muss. Durch blosse Permutation der Zahlenelemente lässt sich dagegen dieses Einmaleins auf keine Weise aus jenem ableiten.

Gleichwie der Algorithmus eine zweigliedrige „Art" von Algorithmen bestimmte, so charakterisirt also auch das Einmaleins oder die Multiplicationstafel (18.) eine zweigliedrige „Gattung" von Multiplicationstafeln. Solche werden wir zu einer *Gattung* zählen, wenn sie durch irgendwelche von den fünf Vertauschungsprincipien $c_1, \ldots c_{54}$, also durch Vertauschungen unter den Grundoperationen, in einander übergeführt werden können, zu einerlei *Art* aber nur, wenn dies schon durch Substitutionen oder Vertauschungen der Zahlenelemente allein hingebracht werden kann.

Aus dem Lösungsgebiet (18.) folgten aber durch $c_{45}$ die beiden Systeme (20.), welche hiernach, wie oben gezeigt, zu derselben Art wie (18.) gehören. Durch $c_1$, $c_2$, $c_3$ folgen aus (18.) drei neue Multiplicationstafeln, deren erste die zu (18.) conjugirte ist, deren beide andern dann durch $c_{45}$ aus ihr hervorgehen, und die zweite Art der Gattung zusammen ausmachen.

## §. 8.

Mittelst des Lösungsgebietes (18.) könnte überhaupt nun leicht gezeigt werden, dass von dem Gebiete der 990 Gleichungen der Form $\varphi(a, b, c) = \psi(a, b, c)$ keine andern, als die bereits in $S_{45}^0$ und $S_0$ zusammengefassten, aus irgend einer Formel von $S_{45}^0$ folgen können. Für eine jede Gleichung dieses letzteren Systems ist also die *„Tragweite"* auf dem genannten Formelgebiete gleich *achtzehn* erwiesen; so gross ist nämlich sicher die Anzahl derjenigen Gleichungen dieses Gebietes, welche — sie selber eingerechnet — aus ihr gefolgert werden können. Unsere Angabe über die Consequenzen jenes Algorithmus auf diesem Formelgebiete ist mit anderen Worten vollständig, oder der Algorithmus $\lambda_0 + S_{45}$ ist auf dem Gebiete zuverlässig „complet".

In gleicher Weise erscheint der Algorithmus $\lambda_0 + S_0$ hinsichtlich seiner Consequenzen auf dem Gebiete nunmehr unzweifelhaft abgegrenzt oder „limitirt". Als das „logische Product" — d. i. als der *gemeinsame* Formelcomplex — der beiden zu einander conjugirten Algorithmen $\lambda_0 + S_{45}$ und $S_{54} + \lambda_0$ kann derselbe keine ausserhalb des angegebenen Systemes $S_0$

liegende Gleichung des Gebietes $\varphi(a, b, c) = \psi(a, b, c)$ mehr zur Folge haben, oder die Tragweite einer jeden Gleichung von $S_0$ innerhalb gedachten Formelgebietes ist definitiv gleich *sechs*.

Dies sind Ergebnisse, die auf anderem Wege wohl schwer zu gewinnen sein möchten.

Dass übrigens die Annahmen $S_0$ und $S_{45}$ auch unabhängig von der $\lambda_0$ gemacht werden können, zeigt das symbolische Einmaleins:

$$(24.)\quad \begin{cases} 1 = 11 = 23 = 34 = 45 = 56 = 67 = 78 = 82 \\ 2 = 44 = 86 = 61 = 17 = 73 = 35 = 52 = 28 \\ 3 = 55 = 32 = 27 = 71 = 18 = 84 = 46 = 63 \\ 4 = 66 = 74 = 43 = 38 = 81 = 12 = 25 = 57 \\ 5 = 77 = 68 = 85 = 54 = 42 = 21 = 13 = 36 \\ 6 = 88 = 47 = 72 = 26 = 65 = 53 = 31 = 14 \\ 7 = 22 = 15 = 58 = 83 = 37 = 76 = 64 = 41 \\ 8 = 33 = 51 = 16 = 62 = 24 = 48 = 87 = 75, \end{cases}$$

welches sich durch ein dem des §. 5 analoges Verfahren gewinnen liesse, nur mit dem Unterschiede, dass dabei der Abschluss des Systems nicht mit der gleichen Nothwendigkeit, wie dort, erfolgt. Immerhin ist vorstehendes das einfachste mögliche von den mehr als *ein* Element enthaltenden Lösungsgebieten des Algorithmus $S_{45}$ ohne den $\lambda_0$, welches nicht auch noch anderen Gleichungen des Gebietes $\varphi(a, b, c) = \psi(a, b, c)$ genügte.

Um nachzuweisen, dass die Gesetze $S_{45}$ in (24.) überhaupt erfüllt sind, muss man zunächst beachten, dass das Element 1 hier bevorzugt erscheint, und es darum nicht mehr als die sechs folgenden Substitutionen:

$$(25.)\quad \begin{cases} (2345678), \\ (2468357), \\ (2584736), \\ (2637485), \\ (2753864), \\ (2876543) \end{cases}$$

giebt, welche das System in sich selbst verwandeln.

Durch diese Substitutionen — und zwar schon durch die erste derselben — lassen sich aus den Unionen, resp. Binionen, Ternionen:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 12 | 123 |
| 2 | 23 | 124 |
| | 24 | 125 |
| | 25 | 234 |
| | | 235 |
| | | 236 |
| | | 237 |
| | | 246 |

alle übrigen ableiten. Folglich braucht nur für diese in allen resp. Permutationen, im ganzen also für $2\times 1+4\times 6+8\times 6=74$ Fälle, die Gültigkeit von $S_{45}$ wirklich nachgewiesen zu werden, und stimmt in der That die Probe.

Da auch die Algorithmen des §. 4 auf dem Gebiete (24.) sämmtlich keine Geltung haben, so ist die Unabhängigkeit der Algorithmen $S_{45}$, $S_{54}$ und $S_0$ auch von den dortigen, überhaupt von allen hier zur Sprache gebrachten Functionalgleichungen erwiesen; auch diese Algorithmen sind auf gedachtem Formelgebiete „complet", und man kann — auf diesem wenigstens — geradezu $S_0$ als das logische Product $S_{45}.S_{54}$ bezeichnen.

Die Art und Weise, wie durch die Anforderungen $\lambda_0+S_{45}$ in §. 7 unsere Function *ab* bestimmt erschien, ist insofern in der That eine *eigenthümliche,* als sich bei anderen Algorithmen in der Regel herausstellt, dass irgend zwei Argumentwerthen keineswegs ein endliches Zahlengebiet zugeordnet ist, innerhalb dessen die Definition der Function abgeschlossen werden könnte *und zugleich die Functionswerthe durch den Algorithmus völlig bestimmt erschienen.*

Einen Algorithmus, der letztere Eigenschaft besitzt, könnte man mit einer gewissen Berechtigung einen *„gesättigten"* nennen.

Das Associationsgesetz, sowie überhaupt jede von der eigentlichen Multiplication erfüllte Formelgruppe, würde dann Beispiele von nicht gesättigten Algorithmen liefern.

## §. 9.

Zum Schlusse will ich noch für die vorstehend zur Sprache gebrachten Algorithmen oder Gruppen von Functionalgleichungen diejenigen Lösungen vollständig angeben, welche auf dem Gebiet der *linearen* Functionen gemeiner complexer Zahlen existiren. Diese Lösungen verdienen

schon darum, weil sie eindeutig und eindeutig umkehrbar im allgemeinen sind, ein ganz besonderes Interesse, weshalb ich sie für alle von mir untersuchten Algorithmen jeweils aufgesucht habe. Mit der Aufführung derselben wird zugleich ein Beitrag zur Theorie der *Zusammensetzung linearer Transformationen* geleistet sein, indem die hier in Betracht kommenden eventuell mit sich selbst in bestimmter durch die Formeln des Algorithmus ausgedrückter Weise sich zu ihresgleichen zusammensetzen müssen.

Von der nunmehr erstmalig auftretenden gewöhnlichen oder *eigentlichen* Multiplication muss aber die symbolische — etwa durch Einklammerung ihres Malzeichens — fortan unterschieden werden.

Es handelt sich dann um die Functionen der Form:

$$(26.)\qquad a(.)b = f_1(a, b) = \frac{\delta ab + \alpha a + \beta b + \gamma}{\delta_1 ab + \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1},$$

welche den Gesetzen unserer Algorithmen Genüge leisten, sobald man diese vollständiger als bisher, nämlich durch Einklammerung der Multiplications- und Divisionszeichen anschreibt — vorausgesetzt natürlich, dass unter den „Coefficienten" $\delta$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta_1$ etc. von $a$, $b$ unabhängige Constante verstanden werden.

Wie sehr leicht zu sehen, sind die linearen Lösungen des Algorithmus $\lambda_0$ in der Formel enthalten:

$$(27.)\qquad \Lambda\lambda_0)\quad a(.)b = \frac{(\alpha_1+\beta_1)ab + \alpha a + \beta b}{\alpha_1 a + \beta_1 b + \alpha + \beta}.$$

Durch eine übereinstimmende linear gebrochene Transformation für $a$, $b$ und $a(.)b$ kann dieser Ausdruck, wenn die Determinante $\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1$ von 0 verschieden ist, auf jede der sechs „kanonischen" Formen gebracht werden:

$$(28.)\qquad \begin{cases} a(.)b = \dfrac{\varrho b}{a-b+\varrho}, & \dfrac{a}{1+\varrho(b-a)} \\ \qquad a+\varrho\left(\dfrac{a}{b}-1\right), & \dfrac{\varrho ab+b-a}{\varrho a} \\ \qquad b\,\dfrac{1+\varrho a}{1+\varrho b}, & a\,\dfrac{b+\varrho}{a+\varrho}, \end{cases}$$

deren geometrische Deutung nicht ohne Interesse wäre. Diese Formen enthalten die minimale Anzahl, nämlich gar keinen Parameter mehr, in Anbetracht, dass $\varrho$ auch bei gegebenen Coefficienten von (27.) doch beliebig gewählt und z. B. gleich 1 specialisirt werden kann (während allerdings die Werthe 0 und $\infty$ dafür ausgeschlossen bleiben).

Wenn dagegen $\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1 = 0$ ist, so kann man nach Belieben transformiren auf eine der beiden Formen:

$$(29.)\qquad a(.)b = \frac{(\alpha_1+\beta_1)ab}{\alpha_1 a+\beta_1 b},\quad a(.)b = \frac{\alpha a+\beta b}{\alpha+\beta},$$

in denen die Coefficienten dieselben Werthe haben müssen, welche ihnen in (27.) zukommen, sodass also in der Form hier noch *ein* Parameter $\beta:\alpha = \alpha_1:\beta_1$ zurückbleibt. Die zweite Form schreibt geometrisch vor: die Theilung der die Punkte $a$, $b$ in der Ebene der complexen Zahlen verbindenden Strecke in dem gegebenen Verhältniss $\beta:\alpha$ und stellt den Theilpunkt als das Product der Factorenpunkte hin, während die erste Form von ebendieser Construction die Transformation nach dem Princip der reciproken Radien vorstellt.

Soll die linear gebrochene Function (26.) den Gesetzen $S_0$ gehorchen, so müssen (wenn man sich zuerst an eine der beiden ersten unter (5.) angeführten Gleichungen $S_0$ hält) die Coefficienten derselben folgende sechs Gleichungen erfüllen:

$$(30.)\qquad \begin{cases}(\beta\delta_1-\beta_1\delta)(\mu-\nu)=0,\ (\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma)(\mu-\nu)=0,\ \mu(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)+\nu(\gamma\delta_1-\gamma_1\delta)=0\\ (\beta\gamma_1-\beta_1\gamma)(\mu+\nu)=0,\ (\alpha\delta_1-\alpha_1\delta)(\mu+\nu)=0,\ \nu(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)+\mu(\gamma\delta_1-\gamma_1\delta)=0,\end{cases}$$

worin $\mu$, $\nu$ unbestimmte Constante bedeuten.

Diesen Gleichungen kann durch geeignete Bestimmung der Coefficienten als Functionen unabhängiger Parameter zwar allgemein (und in symmetrischer Weise) genügt werden, und es ergeben sich durch Einsetzung der so erhältlichen Werthe zweierlei Lösungen. Die eine lautet:

$$(31.)\qquad a(.)b = \frac{p}{q}\cdot\frac{\frac{\varkappa_3\lambda_4}{\varkappa_2\lambda_1}ab+\frac{\varkappa_1\lambda_4}{\varkappa_2\lambda_3}a+\frac{\varkappa_2\lambda_3}{\varkappa_1\lambda_4}b+\frac{\varkappa_2\lambda_1}{\varkappa_3\lambda_4}}{\frac{\varkappa_4\lambda_3}{\varkappa_1\lambda_2}ab+\frac{\varkappa_4\lambda_1}{\varkappa_3\lambda_2}a+\frac{\varkappa_3\lambda_2}{\varkappa_4\lambda_1}b+\frac{\varkappa_1\lambda_2}{\varkappa_4\lambda_3}}.$$

Aber dieser Bruch reducirt sich durch Streichung des in Zähler und Nenner gemeinsamen Factors $b+\frac{\varkappa_1\lambda_1}{\varkappa_3\lambda_3}$ zu:

$$(32.)\qquad a(.)b = \frac{p}{q}\cdot\frac{\frac{\varkappa_3\lambda_4}{\varkappa_2\lambda_1}a+\frac{\varkappa_2\lambda_3}{\varkappa_1\lambda_4}}{\frac{\varkappa_4\lambda_3}{\varkappa_1\lambda_2}a+\frac{\varkappa_3\lambda_2}{\varkappa_4\lambda_1}}.$$

Die andere Lösung ist hiezu conjugirt, geht also, indem man rechts $b$ mit $a$ vertauscht, aus der angegebenen hervor, d. h. man würde sie definirt erhalten, wenn man die rechte Seite selbst $= b(.)a$ setzte.

Sobald aber $a(.)b$ von einem der symbolischen Factoren $a$, $b$ unabhängig ausfällt, ist die eine der zugehörigen Umkehrungen nicht mehr eindeutig sondern im allgemeinen unmöglich (undeutig). Die andere umgekehrte oder inverse Function von $a(.)b$ dagegen wird eben dann absolut unbestimmt oder unendlich vieldeutig. Vier andere Lösungen einzelner Gleichungen von $S_0$ (und zwar derjenigen der zweiten resp. dritten Zeile in (5.)) erhielte man noch definirt, wenn man den Ausdruck von $a(.)b$ in (32.) gleich $a(:)b$ oder $b(:)a$ resp. $(\frac{b}{a})$ oder $(\frac{a}{b})$ setzte. In dem vorliegenden Falle existiren also sechs unter sich völlig disparate Lösungen der Gleichungen von $S_0$, für welche immer eine der drei Grundfunctionen eindeutig, eine zweite alldeutig und die dritte undeutig wird.

Da ein solcher Fall mit unserer Voraussetzung der vollkommnen Eindeutigkeit unserer drei Grundfunctionen sich nicht verträgt (zufolge deren ja erst die sechs Gleichungen $S_0$ einander gegenseitig bedingen mussten), ***werde ich dergleichen reducible Lösungen künftig unerwähnt lassen.***

Wir müssen hiernach sagen, dass der Algorithmus $S_0$, und um so mehr also auch die ihm übergeordneten $S_{45}$ und $S_{54}$, im Gebiet der linearen Functionen ***keine*** Lösung besitzt.

Das gleiche stellt sich schon in Bezug auf den noch einfacheren Algorithmus $\sigma_0$ heraus, oder es ist in unserer symbolischen Schreibweise auf dem genannten Gebiete:

$$(33.)\qquad \varDelta\sigma_0 = 0,\quad \varDelta S_0 = 0,\quad \varDelta S_{45} = 0.$$

## §. 10.

Im Gegensatz hiezu besitzt der Algorithmus $\sigma_{23}$ fünferlei einander ausschliessende Lösungen, welche sich ungezwungen in zwei Ausdrücke zusammenfassen lassen.

Soll die Form (26.) der ersten Gleichung (7.) von $\sigma_{23}$ und damit auch den übrigen Gleichungen dieses Algorithmus genügen, so müssen die Coefficienten derselben identisch die Gleichungen erfüllen:

$$(34.)\qquad \left\{\begin{array}{l|l} \alpha_1^2-\gamma_1\delta_1 = \mu\delta,\ (\alpha_1-\beta_1)\gamma_1 = \mu\alpha, & (\beta_1-\alpha_1)\delta_1 = \mu\delta_1,\ \beta_1^2-\gamma_1\delta_1 = \mu\alpha_1, \\ \gamma\delta_1+\gamma_1\delta-2\alpha\alpha_1 = \mu\beta+\nu\delta, & (\alpha_1-\beta_1)\delta+(\alpha-\beta)\delta_1 = \mu\beta_1+\nu\delta_1, \\ (\beta-\alpha)\gamma_1+(\beta_1-\alpha_1)\gamma = \mu\gamma+\nu\alpha, & \gamma\delta_1+\gamma_1\delta-2\beta\beta_1 = \mu\gamma_1+\nu\alpha_1, \\ \alpha^2-\gamma\delta = \nu\beta,\ (\alpha-\beta)\gamma = \nu\gamma, & (\beta-\alpha)\delta = \nu\beta_1,\ \beta^2-\gamma\delta = \nu\gamma_1, \end{array}\right.$$

worin wieder $\mu$, $\nu$ unbestimmte Constante vorstellen.

Eine erste Lösung giebt nun, wenn man zur Abkürzung $e^{\frac{i\pi}{3}} = \varepsilon$ setzt, der Ausdruck an:

$$(35.) \qquad \underset{+}{\varDelta}\sigma_{23}) \quad a(.)b = \frac{p}{q}\cdot\frac{\frac{q}{p}(r+1-\varepsilon)ab-(r-1+\varepsilon)a-(r+1+\varepsilon)b+\frac{p}{q}(r-1+3\varepsilon)}{\frac{q}{p}(r+1-3\varepsilon)ab-(r-1-\varepsilon)a-(r+1-\varepsilon)b+\frac{p}{q}(r-1+\varepsilon)},$$

wobei sich $\mu = 2p$, $\nu = -2q$ bestimmt.

Eine zweite hiermit disparate Lösung, die ich $\underset{-}{\varDelta}\sigma_{23}$ nennen will, geht aus dem vorstehenden Ausdruck hervor, indem man $i$ mit $-i$ vertauscht, d. h. $\varepsilon$ durch $\varepsilon^{-1} = 1-\varepsilon$ ersetzt.

Definirte man also $\varepsilon$ nur als Wurzel der Gleichung $\varepsilon^2-\varepsilon+1 = 0$, so würde der vorstehende alsdann mit $\underset{\pm}{\varDelta}\sigma_{23}$ zu bezeichnende Ausdruck die beiden Lösungen in sich vereinigen.

Ersichtlichermassen wird nun eine der Umkehrungen der vorstehenden Function durch Vertauschung von $a$ und $b$ mit ihr selbst identisch, sodass sich die Gleichungen eines der einfachsten Algorithmen auch noch erfüllt zeigen, den ich — dem Vertauschungsprincip $c_2$ entsprechend — mit $C_2$ bezeichne, nämlich als symbolische verstanden:

$$(36.) \qquad C_2) \quad a:b = b:a, \quad \frac{b}{a} = ba;$$

woraus dann folgt, dass unser Ausdruck zugleich dem Algorithmus $\sigma_{21}$ genügt und zwar dessen entsprechende Lösung vorstellt, vollständiger also mit $\underset{\pm}{\varDelta}(\sigma_{23}+\sigma_{21})$ zu bezeichnen sein wird.

Uebersichtlicher stellt sich dieses Ergebniss dar, wenn man ein anderes Paar von Algorithmen der in Rede stehenden sechsgliedrigen Art ins Auge fasst. Darnach erhalten wir als $\underset{\pm}{\varDelta}(\sigma_{12}+\sigma_{13})$ die *symmetrische* Function:

$$(37.) \qquad a(.)b = \frac{p}{q}\cdot\frac{\frac{q}{p}(r-1-\varepsilon)ab-(r-1+\varepsilon)(a+b)+\frac{p}{q}(r-1+3\varepsilon)}{\frac{q}{p}(r+1-3\varepsilon)ab-(r+1-\varepsilon)(a+b)+\frac{p}{q}(r+1+\varepsilon)},$$

zugleich also auch dem „Commutationsgesetze" der symbolischen Multiplication oder den Functionalgleichungen:

$$(38.) \qquad C_1) \quad a(.)b = b(.)a, \quad a(:)b = (\frac{a}{b})$$

genügend.

Die bisherigen Lösungen enthalten zwei willkürliche Parameter: $\frac{p}{q}$ und $r$.

Durch lineare Transformation lässt sich aber $\underset{\pm}{\varDelta}\sigma_{23}$ auf eine beliebige der beiden kanonischen Formen bringen:

$$(39.)\qquad a(.)b = -a - \varepsilon b + \gamma \quad \text{und} \quad a(.)b = \frac{ab}{\gamma ab - \varepsilon a - b},$$

in welchen $\gamma$ auch beliebig specialisirt und z. B. gleich 0 gesetzt werden kann.

Die drei anderen linearen Lösungen von $\sigma_{23}$ sind in dem Ausdrucke enthalten:

$$(40.)\qquad \underset{1,2,3}{\varDelta}\sigma_{23})\quad a(.)b = \frac{(\varrho+1)qab+pa+p\varrho b}{q\varrho a+qb+p(\varrho+1)}, \quad \text{wo} \quad \varrho^3-\varrho-1=0$$

als Wurzel einer cubischen Gleichung die Zahl $\varrho$ bestimmt. Dabei stellt sich heraus:

$$\mu = q(\varrho^2-1), \quad \nu = p(\varrho^2-1).$$

Wenn

$$(41.)\qquad \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{18}\sqrt{69}} = 0{,}986991\cdots = u, \quad \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{18}\sqrt{69}} = 0{,}337727\cdots = v$$

und

$$\varrho_1 = u+v, \quad \varrho_2 = -\varepsilon^2 u - \varepsilon v, \quad \varrho_3 = -\varepsilon u - \varepsilon^2 v$$

genannt wird, so mag dem $\varDelta$ das Suffixum 1, 2 oder 3 gegeben werden, je nachdem man für $\varrho$ die erste, zweite oder dritte von diesen Wurzeln gewählt. Die Cubikwurzeln (41.) lassen sich in der Form $\alpha\pm\beta\sqrt{\gamma}$, wo $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ rational sind, nicht ausziehen.

Die Lösungen der vorliegenden Gruppe (40.), die nur einen Parameter $p:q$ enthalten, lassen durch lineare Umformung sich auf jede der beiden kanonischen Formen bringen:

$$(42.)\qquad a(.)b = \frac{a+\varrho b}{1+\varrho}, \quad a(.)b = \frac{(\varrho+1)ab}{\varrho a+b},$$

welche auch mit den (für $\gamma = 0$ sich ergebenden) kanonischen Formen (39.) zusammenfassbar sind in die einheitlichen Ausdrücke:

$$(43.)\qquad a(.)b = \frac{a+\varrho b}{\varrho^4}, \quad \text{resp.} \quad a(.)b = \frac{\varrho^4 ab}{\varrho a+b},$$

wo $\varrho$ der Gleichung zu genügen hat: $\varrho^5 = \varrho^4+1$.

Von diesen Ausdrücken geben die vorangehenden die allgemeinste projective Verwandlung an, und erschöpfen dieselben alle möglichen Lösungen des Algorithmus $\sigma_{23}$ im linearen Functionsgebiete.

Ebenso wie $\sigma_{12}$ und $\sigma_{13}$ können zwar auch $\sigma_{21}$ und $\sigma_{31}$ zu einem commutativen Algorithmus zusammentreten, welcher jedoch im linearen Gebiete einer Lösung entbehrt.

Die Algorithmen $\sigma_{23}$ und $\sigma_{32}$ dagegen sind *„unverträglich"* mit einander, d. h. sie können nicht ohne Widerspruch zu der vorausgesetzten Eindeutigkeit der Grundfunctionen gleichzeitig bestehen.

Da nun, wie leicht zu sehen, die Annahme $\sigma_{31}+\sigma_{12}$ mit logischer Nothwendigkeit auch die Geltung von $\sigma_{23}$ nach sich zieht, so werden keine anderen als folgende drei Arten von acht Combinationen zwischen unseren sechs $\sigma$-Algorithmen bestehen können, nämlich erstens die durch $\sigma_{23}+\sigma_{31}+\sigma_{12}$ repräsentirte zweigliedrige Art, deren anderer Repräsentant also durch Rückwärtslesen der Indices erhalten wird, sodann die beiden dreigliedrigen Arten, welche $\sigma_{12}+\sigma_{13}$ resp. $\sigma_{21}+\sigma_{31}$ vertritt, woraus dann die übrigen Vertreter durch cyklische Vertauschung von 1, 2, 3 hervorgehen.

## §. 11.

Es ist endlich der Algorithmus $\varrho_0$ durch das Vorhandensein einer noch reicheren Fülle von Lösungen ausgezeichnet, welche es keineswegs mühelos ist, durch eine erschöpfende Untersuchung ausfindig zu machen.

Jener Algorithmus umfasste die Gleichungen:

$$(44.)\qquad \varrho_0)\ \begin{cases} a:(ab) = \quad ba = \dfrac{b}{ab} \\ \dfrac{a:b}{a} \qquad = b:a = (a:b)b \\ a\dfrac{b}{a} \qquad = \dfrac{a}{b} \quad = \dfrac{b}{a}:b. \end{cases}$$

Soll die linear gebrochene Function (26.) auch nur der ersten $a(:)\{a(.)b\} = b(.)a$ von diesen Gleichungen (und folglich bei vollkommner Eindeutigkeit der drei Grundoperationen auch den übrigen) genügen, so müssen die zwölf Relationen erfüllt sein:

$$(45.)\qquad \begin{cases} \alpha_1\delta+\gamma_1\delta_1 = -\mu\delta,\ \ \alpha_1(\alpha+\gamma_1) = -\mu\beta, & (\beta_1+\delta)\delta_1 = \mu\delta_1,\ \ \alpha\delta_1+\alpha_1\beta_1 = \mu\beta_1, \\ \alpha\delta+\gamma\delta_1-\alpha_1\beta-\beta_1\gamma_1 = \mu\alpha+\nu\delta, & \beta_1^2-\delta^2 = \mu\alpha_1+\nu\delta_1, \\ \alpha^2-\gamma_1^2 = \mu\gamma+\nu\beta, & \beta_1\gamma_1+\gamma\delta_1-\alpha\delta-\alpha_1\beta = \mu\gamma_1+\nu\beta_1, \\ \alpha\beta+\beta_1\gamma = \nu\alpha,\ \ (\alpha+\gamma_1)\gamma = \nu\gamma, & \beta(\beta_1+\delta) = -\nu\alpha_1,\ \beta\gamma_1+\gamma\delta = -\nu\gamma_1, \end{cases}$$

in denen $\mu$ und $\nu$ unbestimmte Constante vorstellen.

Diesen Gleichungen genügen identisch diejenigen Werthe der Coefficienten, welche aus der Vergleichung von (26.) mit der folgenden Lösung unmittelbar zu entnehmen sind:

$$(46.)\quad \Lambda^{13}\varrho_0)\ a(.)\,b = \frac{p}{q}\cdot\frac{\frac{q}{p}\varrho(\varkappa+\varrho)ab-\varrho(\varkappa-\lambda)a-\varkappa(\varrho-\lambda)b+\frac{p}{q}(\varkappa-\varrho)(\varrho-\lambda)}{\frac{q}{p}(\varkappa+\varrho)(\varrho+\lambda)ab-\varkappa(\varrho+\lambda)a-\varrho(\varkappa-\lambda)b+\frac{p}{q}\varrho(\varkappa-\varrho)},$$

wobei sich $\mu = q\varrho(\varrho+\lambda)$, $\nu = -p\varrho(\varrho-\lambda)$ bestimmt.

Diese Lösung enthält drei arbiträre Parameter: $\frac{p}{q}$, $\frac{\varkappa}{\varrho}$ und $\frac{\lambda}{\varrho}$, und sie umfasst als Particular- oder auch als Grenzfälle alle überhaupt möglichen linearen Lösungen von $\varrho_0$.

Stellt man zu der Lösung $\Lambda^{13}$ nach der im §. 9 angegebenen Methode die übrigen fünf Ausdrücke auf, welche mit ihr als zu derselben „Gattung" von Lösungen gehörige zu bezeichnen und mit $\Lambda^{32}\varrho_0$, $\Lambda^{31}$, $\Lambda^{13}$, $\Lambda^{12}$, $\Lambda^{21}$ von $\varrho_0$ zu benennen sein werden, so hat man sechs verschieden gebaute Ausdrücke; dieselben unterscheiden sich nämlich dadurch, dass zwischen den nur $\varrho$, $\varkappa$, $\lambda$ enthaltenden Factoren der drei letzten Nenner- und der drei ersten Zählercoefficienten ein Platzwechsel theilweise stattgefunden hat.

Demungeachtet decken sich aber diese sechs Ausdrücke; sie sind ***gleichumfassend*** oder äquivalent, solange die Parameter als ganz beliebige Zahlen aufgefasst werden, und sind daher in gleicher Weise berechtigt, die allgemeine Lösung $\Lambda\varrho_0$ des Algorithmus $\varrho_0$ zu repräsentiren. Im allgemeinen, d. h. mit Ausnahme der Particularfälle, wo gewisse Relationen zwischen den Parametern der einen bestehen, lässt sich nämlich jede von diesen sechs ebenbürtigen Formen der $\Lambda\varrho_0$ in jede andere transformiren dadurch, dass man die Parameter der ersten geeignet bestimmt als Functionen von den (natürlich anders zu bezeichnenden, etwa zu accentuirenden) Parametern der zweiten.

Hierbei finden allerdings kritische Fälle eben dann statt, wenn der behufs völliger Umformung des einen Bruchs in den andern zu streichende Reductionsfactor Null oder unendlich wird. Allein die diesen Fällen entsprechenden Formen der zweiten in Rede stehenden Lösung können dann wenigstens durch einen Grenzenübergang aus der ersten Lösung abgeleitet werden.

Da dieser Process, bei dem man einzelne Parameter unendlich werden, andere in bestimmter davon abhängiger Weise verschwinden zu

lassen hat, nicht selten (hier in den vier ersten der sechs unten folgenden Fälle) ein ziemlich complicirter ist, so thut man gut, zu einer allgemeinen Lösung dergleichen Grenzfälle ausdrücklich mit anzuführen.

In diesem Sinne ist die Angabe (46.) zu ergänzen durch die der folgenden sechs specielleren (nur zwei Parameter enthaltenden) Lösungen:

$$a(.)b =$$

$$(47.)\quad \left\{\begin{array}{l|l}
\Lambda_1^{31}\varrho_0)\ \frac{p}{q}\cdot\frac{\frac{q}{p}\lambda ab-\lambda b}{2\frac{q}{p}\varkappa ab-\varkappa a-(\varkappa+\lambda)b+\frac{p}{q}\lambda}, & \Lambda_1^{32}\varrho_0)\ \frac{p}{q}\cdot\frac{\frac{q}{p}\varkappa ab-\lambda b}{2\frac{q}{p}\varkappa ab-\lambda a-(\varkappa+\lambda)b+\frac{p}{q}\lambda}, \\
\Lambda_2^{31}\varrho_0)\ \frac{p}{q}\cdot\frac{\frac{q}{p}\varkappa ab-(\varkappa+\lambda)a-\lambda b+2\frac{p}{q}\lambda}{-\varkappa a+\frac{p}{q}\varkappa}, & \Lambda_2^{32}\varrho_0)\ \frac{p}{q}\cdot\frac{\frac{q}{p}\varkappa ab-(\varkappa+\lambda)a-\varkappa b+2\frac{p}{q}\lambda}{-\varkappa a+\frac{p}{q}\lambda}, \\
\Lambda_3^{23}\varrho_0)\ \frac{p}{q}\cdot\frac{\lambda a+\varkappa b-\frac{p}{q}(\varkappa-\lambda)}{\frac{q}{p}(\varkappa+\lambda)ab-\varkappa a+\lambda b}, & \Lambda_3^{32}\varrho_0)\ \frac{p}{q}\cdot\frac{\varkappa a+\lambda b-\frac{p}{q}(\varkappa-\lambda)}{\frac{q}{p}(\varkappa+\lambda)ab+\lambda a-\varkappa b},
\end{array}\right.$$

welche also nicht als Particularfälle (im strengen Sinn des Worts) in $\Lambda^{23}\varrho_0$ enthalten sind.

Auf die kanonischen Formen der Lösung $\Lambda\varrho_0$ beabsichtige ich bei einer anderen Gelegenheit einzugehen.

Karlsruhe, im Mai 1880.

---

# Geometrische und analytische Untersuchung der *Weierstrass*schen Function.

(Hierzu Taf. II.)

(Von Herrn *Christian Wiener* in Karlsruhe.)

## §. 1.

Herr *Weierstrass* hat den merkwürdigen Satz bewiesen, dass die von ihm aufgestellte stetige Function

$$(1.)\qquad f(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_n b^n \cos a^n x\pi,$$

worin $x$ eine reelle Veränderliche, $a$ eine ungerade ganze Zahl, grösser als Eins, $b$ eine positive Constante, kleiner als Eins, ist, „sobald der Werth des Productes $ab$ eine gewisse Grenze übersteigt, ***an keiner Stelle einen bestimmten Differentialquotienten hat***“, wobei die Intervalle der $x$ in einer eigenthümlichen, für den Satz wesentlichen Weise gewählt sind. Es geschah dies in einem Briefe an Herrn *Paul du Bois-Reymond*, den dieser in einem Aufsatze „Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen“ veröffentlichte*). Herr *du Bois-Reymond* bemerkt in Bezug auf jene Function, dass „hier nicht besondere Zahlenarten, die doch schliesslich immer isolirt auftreten, mit gewissen Singularitäten behaftet sind, sondern dass diese durch das ganze Grössengebiet des Argumentes gleichförmig und gleichsam stetig vertheilt sind“. Und ferner sagt er in einer Anmerkung: „Noch manches Räthsel scheint mir die Metaphysik der *Weierstrass*schen Functionen zu bergen, und ich kann mich des Gedankens nicht erwehren, dass hier tieferes Eindringen schliesslich vor eine Grenze unseres Intellectes führen wird, ähnlich der in der Mechanik durch die Begriffe Kraft und Materie gezogenen. Diese Functionen scheinen mir, um es kurz zu sagen, räumliche Trennungen zu setzen, nicht wie die Rationalzahlen im Unbegrenztkleinen, sondern im Unendlichkleinen“.

---

*) Dieses Journal, 1874, Bd. 79, S. 29 ff.

Ich beabsichtige im Folgenden eine geometrische und eine analytische Untersuchung der interessanten Function zu geben und eine graphische Darstellung derselben zuzufügen, soweit eine solche bei einer Linie mit unendlich vielen Wellen im endlichen Raume möglich ist. Den analytischen Beweis des Herrn *Weierstrass,* wonach, unter der erwähnten Bedingung für den Werth von $ab$, der Differentialquotient der Function für ein vorwärts- und ein rückwärtsgerichtetes Intervall des $x$ entgegengesetzte Zeichen besitzt, werde ich in geometrischer Form darstellen, dann aber zeigen, dass bei der Wahl anderer Intervalle diese beiden Differentialquotienten im Allgemeinen gleiche Zeichen besitzen. Dennoch wird auch für diese Intervalle der zu Anfang angeführte Satz des Herrn *Weierstrass* im Allgemeinen, wenn auch aus anderen Gründen, gelten, für besondere Stellen aber nicht, für welche sich ein bestimmter Differentialquotient ergeben wird. Ich werde die Untersuchungen neben der analytischen um so lieber auch in der geometrischen Form ausführen, als die dadurch herbeigeführte Anschaulichkeit *die erwähnte Vermuthung des Herrn du Bois-Reymond nicht bestätigt,* nach welcher durch diese Function die Unbegreiflichkeit ihren Einzug in das lichte Gebiet der Mathematik halten könnte.

## Geometrische Untersuchung.

### §. 2.

Lösen wir die Function (1.) in ihre einzelnen Glieder auf, so erhalten wir

$$(2.)\quad \begin{cases} f(x) = \cos x\pi + b\cos ax\pi + b^2\cos a^2x\pi + \cdots + b^n\cos a^nx\pi + \cdots \text{in inf.}, \\ f \quad = f_0 \qquad + f_1 \qquad + f_2 \qquad + \cdots + f_n \qquad + \cdots \text{in inf.}, \end{cases}$$

wenn wir $b^n\cos a^nx\pi = f_n$ setzen. Wir wollen $f_n$ eine *Theilfunction, f* die *ganze Function,* die Summe der $m$ ersten Theilfunctionen die $m^{\text{te}}$ *Summenfunction* $s_m$, die Summe der übrigen Theilfunctionen die $m^{\text{te}}$ *Restfunction* $r_m$ nennen, so dass

$$s_m = f_0 + f_1 + \cdots + f_{m-1}, \quad r_m = f_m + f_{m+1} + \cdots \text{in inf.}, \quad f = s_m + r_m$$

ist. In der Fig. 2 wurde $a = 19$, $b = 0{,}25$ angenommen, in der Fig. 1, allen später sich ergebenden Bedingungen entsprechend, $a = 9$, $b = 0{,}64$; es sind mit den Coordinatenaxen $OX$, $OY$ die Theilfunctionen $f_0$ und $f_1$ als die Cosinuslinien $B_0A_0$, bezw. $B_1A_1$ und die Summenfunction $s_2$ als $B_{01}A$ verzeichnet.

Man bemerkt aus der Gleichung (2.) oder aus der Figur:

1) Die Curven der Theilfunctionen oder die ***Theilcurven*** haben Schnittpunkte mit der $x$-Axe oder ***Knoten,*** wie $A_0$, $A_1$, für folgende Werthe von $x$ mit positivem oder negativem Zeichen, und zwar $f_0$ für $x=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$; $f_1$ für $x=\frac{1}{2}\frac{1}{a}, \frac{3}{2}\frac{1}{a}, \ldots$; $f_n$ für $x=\frac{1}{2}\frac{1}{a^n}, \frac{3}{2}\frac{1}{a^n}, \ldots$

2) Die Knoten jeder Theilcurve sind auch Knoten jeder folgenden Theilcurve, weil $a$ eine ungerade Zahl ist.

3) Die Curve der $m^{\text{ten}}$ Summenfunction oder die $m^{\text{te}}$ ***Summencurve*** $s_m$ schneidet die $(m-1)^{\text{te}}$, $s_{m-1}$, in Punkten, welche mit den Knoten der $m^{\text{ten}}$ Theilcurve $f_{m-1}$ gleiche $x$ besitzen, und welche auch jeder folgenden Summencurve, daher auch der Curve der ganzen Function oder der ***ganzen Curve*** $f$ angehören und auch auf ihnen ***Knoten*** heissen sollen. Solche Punkte sind $A_0$, $A$.

4) Die Theilcurven haben ***Scheitel,*** abwechselnd mit positiven und negativen Ordinaten, oder obere und untere Scheitel, wie $B_0$, $B_1$, für folgende positive oder negative Abscissen, und zwar $f_0$ für $x=0, 1, 2, \ldots$; $f_1$ für $x=0, \frac{1}{a}, \frac{2}{a}, \ldots 1, 2, \ldots$; $f_n$ für $0, \frac{1}{a^n}, \frac{2}{a^n}, \ldots, \frac{1}{a^{n-1}}, \ldots, 1, \ldots$

5) In den Ordinatenlinien der Scheitel einer Theilcurve liegen auch Scheitel aller folgenden Theilcurven, wie $B_0$, $B_1$; und die in solchen Ordinatenlinien liegenden Punkte einer Summencurve, der ganzen Curve, wie $B_{01}$ und $B$, und einer Restcurve (die nicht gezeichnet werden kann), sollen ***Scheitel*** dieser Curven heissen, wenn auch bei den Summencurven meist in aussergewöhnlichem Sinne. Scheitel zweier Curven in derselben Ordinatenlinie sollen ***zusammengehörig*** heissen; sie sind ***gleichartig,*** d. h. beide obere oder beide untere, weil $a$ eine ungerade Zahl ist.

6) Die Ordinaten der Scheitel der Theilcurven $f_0, f_1, \ldots, f_n$ sind bezw. $1, b, \ldots, b^n$.

7) Besitzt die Theilcurve $f_m$ in einer gewissen Ordinatenlinie einen Scheitel, so ist die Grösse dieser Ordinate für die Restcurve $r_m$

$$= b^m + b^{m+1} + \cdots \text{in inf.} = \frac{b^m}{1-b}.$$

Dieser Werth ist das Maximum der Restfunction; für $r_0 = f$ ist er z. B. $= OB = \frac{1}{1-b}$ ($2\frac{1}{7}$ in Fig. 1, und $1\frac{1}{3}$ in Fig. 2). Durch Addition dieser Grösse im Sinne der ausgedrückten Scheitelordinate der $r_m$ zu der zuge-

hörigen Ordinate der $s_m$ erhält man einen Scheitel der $f$.

8) Die *Neigung* der Tangente einer Theilcurve $f_n$, oder der $f_n$ selbst, in einem Knoten ist durch

$$\frac{df_n}{dx} = \frac{dy}{dx} = \mp \pi (ab)^n$$

bestimmt. Es sei mir erlaubt, diese trigonometrische Tangente des Neigungswinkels gegen die $x$-Axe der Kürze halber mit „*Steigung*" zu bezeichnen. Jede Sehne der $f_n$ hat eine Steigung, deren Absolutwerth kleiner als der für jene in einem Wendepunkt berührende Tangente ist.

9) Ein Knoten von $f_m$ soll ein *aufsteigender* oder *absteigender* heissen, je nachdem in ihm $dy:dx$ positiv oder negativ ist. Die zugehörigen Knoten der Summencurve $s_{m+1}$ sollen dieselben Namen führen. Die Knoten einer Theilcurve $f_m$ fallen mit den Knoten gleicher oder entgegengesetzter Art der folgenden Theilcurve $f_{m+1}$ zusammen, je nachdem $a = 4i+1$ oder $= 4i+3$ ist, wo $i$ irgend eine positive ganze Zahl bedeutet.

10) Man kann eine Abscisse durch die halben Perioden oder die *halben Wellenlängen* der Theilcurven, $\frac{1}{a^n}$, ausdrücken. Es ist dann

$$x = c_0 + c_1 \frac{1}{a} + c_2 \frac{1}{a^2} + \cdots + c_n \frac{1}{a^n} + \cdots \text{in inf.} = c_0 c_1 c_2 \ldots c_n \ldots,$$

wo $c_0$ die dem $x$ nächste kleinere (positive oder negative) ganze Zahl $(0 \leqq x - c_0 < 1)$, jedes andere $c$ eine positive ganze Zahl kleiner als $a$ $(0 \leqq c < a)$ bedeutet, und die zweite Schreibweise symbolisch ist wie die eines Decimalbruches.

11) Zu der Abscisse $x$ gehört auf der Theilcurve $f_m$, der Summencurve $s_{m+1}$ und allen folgenden Theil- und Summencurven ein Scheitel oder ein Knoten, je nachdem in der Reihe für $x$ die Summe der auf $c_m$ folgenden Glieder bezw. $= 0$ oder $= \frac{1}{2} \frac{1}{a^m}$ ist. Die Reihe wird dann:

für einen Scheitel: $x = c_0 c_1 c_2 \ldots c_m$,

für einen Knoten: $x = c_0 c_1 c_2 \ldots c_m \frac{a-1}{2} \frac{a-1}{2} \cdots$

Im ersten Falle ist die Reihe endlich, im zweiten periodisch unendlich, und es ist wirklich

$$\frac{a-1}{2}\left(\frac{1}{a^{m+1}} + \frac{1}{a^{m+2}} + \cdots \text{in inf.}\right) = \frac{1}{2} \frac{1}{a^m}.$$

12) Die Scheitel von $f_m$, $f_{m+1}$, ..., $s_m$, $s_{m+1}$, ..., welche zu dem Punkte $x = c_0 c_1 \dots c_m$ gehören, sind von derselben Art wie der zu $x = c_0 c_1 \dots c_{m-1}$ gehörige Scheitel von $f_{m-1}$, wenn $c_m$ gerade, von entgegengesetzter Art, wenn es ungerade ist. Der Scheitel von $f_m$ ist daher ein oberer, wenn die Anzahl der dem $c_{m+1}$ vorausgehenden ungeraden $c$ gerade, er ist ein unterer, wenn diese Anzahl ungerade ist. Ein Knoten der $f_m$ ist ein ab- oder aufsteigender, je nachdem die Reihe seines $x$, wenn sie mit $c_m$ (unmittelbar vor $c_{m+1}$) abgebrochen wird, einen oberen oder unteren Scheitel der $f_m$ bezeichnet.

So gehört bei $a = 15$:

$x = 93$; 2, 11, 8, 14 und 0; 12, 7, 13 zu einem oberen Scheitel der $f_4$ bezw. $f_3$,

$x = -107$; 2, 8, 14 und 0; 0, 0, 0, 2, 7, 9, 11 zu einem unteren Scheitel der $f_3$ bezw. $f_7$,

$x = 93$; 2, 11, 8, 14, 7, 7, ... und 0; 12, 7, 13, 7, 7, ... zu einem absteigenden Knoten der $f_4$ bezw. $f_3$,

$x = -107$; 2, 8, 14, 7, 7, ... zu einem aufsteigenden Knoten der $f_3$, einem absteigenden der $f_4$, einem aufsteigenden der $f_5$ u. s. w.;

dagegen bei $a = 17$:

$x = 0$; 5, 8, 8, ... $= \frac{5}{17} + \frac{1}{17} \frac{8}{16} = \frac{11}{34}$ zu einem aufsteigenden Knoten der $f_1$, $f_2$, $f_3$, ...

13) Die Wellen einer Theilcurve $f_m$ zerfallen in selbstverständlicher Weise in halbe obere und halbe untere, welche durch Knoten, und in halbe absteigende und halbe aufsteigende Wellen, welche durch Scheitel von einander getrennt sind. Die solchen Stücken zugehörigen Stücke der Summencurve $s_{m+1}$ sollen dieselben Benennungen führen. Zu einem $x$ gehört ein Punkt auf einer ab- oder aufsteigenden Wellenhälfte der $f_m$, je nachdem die mit $c_m$ abgebrochene Reihe des $x$ einen oberen oder einen unteren Scheitel darstellt; ein Punkt auf einer oberen Wellenhälfte der $f_m$, wenn die mit $c_m$ abgebrochene Reihe einen oberen Scheitel darstellt und der auf $c_m$ folgende Theil $r$ der Reihe $< \frac{1}{2} \frac{1}{a^m}$, oder wenn sie einen unteren Scheitel darstellt und $r > \frac{1}{2} \frac{1}{a^m}$ ist; entsprechend auf einer unteren Wellenhälfte.

So liegen bei $a = 15$ die Punkte mit $x = -93$; 2, 11, 8, 14, 6, 6, ... auf einer absteigenden und einer oberen Wellenhälfte der $f_4$, $f_5$, $f_6$, ..., $x = -93$; 2, 11, 13, 14, 2, 12, 2, 12, ... auf einer aufsteigenden Wellen-

hälfte der $f_4$, $f_5$, $f_6$, ... und auf einer unteren Wellenhälfte der $f_4, f_6, f_8, \ldots$, dagegen auf einer oberen der $f_5$, $f_7$, $f_9$, ...

14) Nennt man die *Anzahl der Punkte* eines Stückes einer unserer Curven proportional mit dem Unterschiede der Abscissen seiner Endpunkte, so gehört die Hälfte der Punkte der Curve $s_{m+1}$ zu einer absteigenden Wellenhälfte der $f_0$; und da auf diese $a$ Wellenhälften der $f_1$ gehen, von denen $\frac{a+1}{2}$ absteigende sind, und das Entsprechende für $f_2, \ldots f_m$ gilt, so gehören $\frac{1}{2}\left(\frac{a+1}{2a}\right)^m$ aller Punkte der $s_{m+1}$ nur absteigenden Wellenhälften ihrer Theilcurven an. Dasselbe ergiebt sich für aufsteigende Wellenhälften. — Ebenso gehört die Hälfte der Punkte der $s_{m+1}$ einer oberen Wellenhälfte der $f_0$ an. Auf diese gehen $a$ Wellenhälften der $f_1$ und darunter $\frac{a+1}{2}$ obere, wenn gleichartige Knoten der $f_0$ und $f_1$ zusammenfallen, also $a=4i+1$ ist, dagegen $\frac{a-1}{2}$ obere, wenn $a=4i+3$ ist. Daher gehören von allen Punkten der $s_{m+1}$, $\frac{1}{2}\left(\frac{a+1}{2a}\right)^m$ nur zu oberen, und ebensoviel nur zu unteren Wellenhälften ihrer Theilcurven, wenn $a=4i+1$, und $\frac{1}{2}\left(\frac{a-1}{2a}\right)^m$, wenn $a=4i+3$.

Alle diese Zahlen geben eine *verhältnissmässige Anzahl* von Werthen von $x$ an, oder auch die *Wahrscheinlichkeit*, dass ein $x$ auf allen Theilcurven derselben Art von Wellenhälften angehöre. Sie werden, wenn $m$ ohne Ende wächst, unendlich klein, und alle die Punkte, für welche sie gelten, sind *besondere Punkte*, wenn wir darunter solche verstehen, deren Anzahl verhältnissmässig unendlich klein ist, wenn sie auch, absolut genommen, unendlich gross sein sollte, selbst schon, wie hier, in endlichem Raume.

15) Da die ganze Curve im endlichen Raume unendlich viele Wellen besitzt, so kann man sie nicht *verzeichnen*. Man kann sie aber in einen mehr oder weniger engen Raum der Zeichenfläche einschliessen, wenn man mit einer Summencurve $s_m$ zwei congruente und parallele Curven zeichnet, welche durch Verschiebung der $s_m$ um die grösste Ordinate $\frac{b^m}{1-b}$ der Restcurve $r_m$ im Sinne der positiven und negativen Ordinaten entstehen. Innerhalb des von diesen verschobenen Curven eingeschlossenen Raumes verläuft die ganze Curve. Dieser Raum ist in Fig. 1 ($a=9$, $b=0{,}64$) für $m=2$

weit schraffirt und für $m = 3$ eng schraffirt, in Fig. 2 ($a = 19$, $b = 0{,}25$) für $m = 2$ ganz schwarz angelegt. In der Fig. 2 hat der Flächenstreif nur noch die Breite eines starken Striches; und während sonst die Axe eines Striches die dargestellte Curve bezeichnet, so dass dessen Breite gleichgiltig ist, deckt hier die Breite des Striches das Bereich der Curve, welche zwischen seinen Rändern hin- und herschwankt. Ebenso wenig aber, wie bei einer ins Unendliche verlaufenden Curve trotz der Unmöglichkeit der vollständigen Verzeichnung die Vorstellbarkeit beschränkt ist, ebenso wenig hier bei der unendlichen Vervielfachung der Wellen im endlichen Raume.

## §. 3.

Unter Beachtung einiger dieser Eigenschaften lässt sich leicht der erwähnte ***analytische Beweis des Herrn Weierstrass ins Geometrische übersetzen.*** Sei $P$ (Fig. 1) ein beliebiger bestimmter Punkt der (ganzen) Curve $f$ mit der Abscisse $OR = x_0$, sei $s_m$ eine beliebig gewählte Summencurve (in der Fig. $s_1$, welche mit $f_0$ zusammenfällt), daher $f_m$ (in der Fig. $f_1$) die erste Theilcurve der zugehörigen Restcurve $r_m$, und seien $Q$ und $S$ bezw. die Punkte auf $s_m$ und $f_m$ mit der Abscisse $x_0$. Indem $f_m$ durch ihre Knoten in obere und untere Wellenhälften getheilt wird, wollen wir jeden Knoten derjenigen Hälfte zutheilen, gegen welche er vorwärts liegt (die grösste Abscisse hat). Es liegt dann stets $S$ auf einer bestimmten Wellenhälfte von $f_m$, deren Scheitel $S'''$ sei; die Abscisse von $S'''$ ist gleich $\alpha_m \frac{1}{a^m}$, wo $\alpha_m$ eine ganze Zahl, welche gerade oder ungerade ist, je nachdem $S'''$ ein oberer oder unterer Scheitel. Die beiden dem $S'''$ benachbarten unter einander gleichartigen Scheitel der $f_m$ seien $S'$, $S''$; $S'$ mit kleinerer Abscisse $x'$, $S''$ mit grösserer $x''$. Daher sind die Abscissenunterschiede von $S$ gegen $S'$ und $S''$ absolut genommen $\geqq \frac{1}{4}$ Wellenlänge und $\leqq \frac{3}{4}$ Wellenlänge der $f_m$, oder, da der absolute Werth durch das Setzen zwischen zwei verticale Striche bezeichnet wird, sind $|x'-x_0|$ und $|x''-x_0| \geqq \frac{1}{2}\frac{1}{a^m}$ und $\leqq \frac{3}{2}\frac{1}{a^m}$. Man kann aber $m$ so gross annehmen, dass diese Differenzen so klein werden, wie man will.

Es gehören nun zu $x_0$, $x'$, $x''$ die Punkte bezw. auf $f_m : S, S', S''$, auf $s_m : Q, Q', Q''$, auf $f : P, P', P''$. Bezeichnen wir die Ordinaten von $P$, $P'$, $P''$, $Q$, $Q'$, $Q''$, der Reihe nach mit $p = f(x_0)$, $p' = f(x')$, $p'' = f(x'')$, $q$,

$q'$, $q''$, und die Ordinatenlängen der Restcurve $QP$, $Q'P'$, $Q''P''$ mit $r$, $r'$, $r''$, so ist

$$p = q+r, \quad p' = q'+r', \quad p'' = q''+r'',$$

und die Steigungen der Sehnen $PP'$, $PP''$ sind bestimmt durch

$$(3.) \quad \frac{p'-p}{x'-x_0} = \frac{q'-q}{x'-x_0} + \frac{r'-r}{x'-x_0}, \quad \frac{p''-p}{x''-x_0} = \frac{q''-q}{x''-x_0} + \frac{r''-r}{x''-x_0}.$$

$\frac{q'-q}{x'-x_0}$ ist die Steigung der Sehne $QQ'$ der $s_m$ und aus den Steigungen der zu denselben Abscissen $x'$, $x_0$ gehörigen Sehnen der Theilcurven $f_0 \dots f_{m-1}$ zusammengesetzt. Da diese Steigung für $f_n$ dem Absolutwerthe nach $< \pi (ab)^n$ ist (§. 2, No. 8), so ist der Absolutwerth von $\frac{q'-q}{x'-x_0}$

$$(4.) \quad \left|\frac{q'-q}{x'-x_0}\right| < \sum_0^{m-1}{}_n \, \pi (ab)^n < \pi \frac{(ab)^m}{ab-1}.$$

Die Steigung $\frac{r'-r}{x'-x_0}$ der zugehörigen Sehne $(x', x_0)$ der Restcurve setzt sich aus den Steigungen der zugehörigen Sehnen der Theilcurven $f_m \dots$ in inf. zusammen. Die Sehne für $f_m$ ist $SS'$; und da der Unterschied der Ordinaten wenigstens $b^m$, der Unterschied der Abscissen höchstens $\frac{3}{2}\frac{1}{a^m}$ beträgt, so ist der absolute Werth der Steigung von $SS'$ wenigstens oder er ist

$$\geqq \tfrac{2}{3}(ab)^m.$$

Das Zeichen der Steigung ist $(-1)^{\alpha_m}$, weil dieselbe positiv ist, wenn $S$ auf einer oberen Wellenhälfte liegt oder wenn $\alpha_m$ gerade ist. Die Sehnensteigungen für die auf $f_m$ folgenden Theilcurven haben dasselbe Zeichen, weil auf denselben dem $S'$ gleichartige Scheitel entsprechen (§. 2, No. 5), und weil alle von einem solchen Scheitel nach einem zu einem grösseren $x$ gehörigen Punkte der Curve gezogenen Sehnen dasselbe Zeichen der Steigung besitzen. Daher ist

$$\left|\frac{r'-r}{x'-x_0}\right| > \tfrac{2}{3}(ab)^m;$$

denn ist die Sehnensteigung für $f_m$ allein diesem Werthe nur gleich, so muss $x'-x_0 = \frac{3}{2}\frac{1}{a^m}$ und daher $S$ ein Knoten von $f_m$, daher auch ein solcher aller folgenden Theilcurven sein, so dass die Sehnensteigung in denselben nicht Null sein kann.

Demnach ist (3.)

$$\frac{p'-p}{x'-x_0} = (-1)^{\alpha_m}(ab)^m\left(\tfrac{2}{3}\eta+\varepsilon\frac{\pi}{ab-1}\right),$$

wo $\eta$ eine positive Grösse, die $>1$, bezeichnet, während $\varepsilon$ zwischen $-1$ und $+1$ enthalten ist.

Für die Sehne $PP''$ erhält man entsprechend, da die Sehne $SS''$ eine Steigung von entgegengesetztem Zeichen wie $SS'$ besitzt,

$$\frac{p''-p}{x''-x_0} = -(-1)^{\alpha_m}(ab)^m\left(\tfrac{2}{3}\eta_1+\varepsilon_1\frac{\pi}{ab-1}\right),$$

wo $\eta_1$, $\varepsilon_1$ dieselben Bedeutungen haben wie $\eta$, $\varepsilon$.

„Nimmt man nun", um mit den Worten des Herrn ***Weierstrass*** zu schliessen, „$ab$ so an, dass $ab>1+\frac{3}{2}\pi$, also

$$\tfrac{2}{3}>\frac{\pi}{ab-1},$$

so haben" die Steigungen von $PP'$, $PP''$ oder

$$\text{„}\frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0},\quad \frac{f(x'')-f(x_0)}{x''-x_0}$$

stets entgegengesetzte Zeichen, werden aber beide, wenn $m$ ohne Ende wächst, unendlich gross."

„Hieraus ergiebt sich unmittelbar, dass $f(x)$ an der Stelle $(x=x_0)$ weder einen bestimmten endlichen, noch auch einen bestimmten unendlich grossen Differentialquotienten besitzt." „Im letzteren Falle", fügt Herr ***du Bois-Reymond*** zu, „müssten nämlich

$$\frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0},\quad \frac{f(x'')-f(x_0)}{x''-x_0}$$

für unendlich kleine Werthe von $x'-x_0$, $x''-x_0$ stets dasselbe Zeichen haben."

Während $m$ wächst, gelangt $S$ auf dem wechselnden $f_m$ im Allgemeinen bald auf eine obere, bald auf eine untere Wellenhälfte, wodurch $\alpha_m$ bald gerade, bald ungerade wird, und das Zeichen jeder der beiden Steigungen wechselt, so dass ***auch aus diesem Grunde im Allgemeinen der Differentialquotient unbestimmt ist.*** Nur in den besonderen Fällen, wo $x_0$ auf allen Theilcurven ein und derselben Art jener beiden Wellenhälften angehört (siehe §. 2, Nr. 14), findet dieser Wechsel nicht statt.

§. 4.

Der soeben gegebene Beweis setzt bestimmte Intervalle voraus, indem der Punkt $P$ mit beiderseits benachbarten gleichartigen, von einer Theilcurve $f_m$ herrührenden Scheiteln der $f$ verbunden wird. Anders aber gestaltet sich das Ergebniss, wenn man den Punkt $P$, vorausgesetzt, dass er nicht selbst ein Scheitel ist, mit den beiderseits benachbarten ungleichartigen, von einer $f_m$ herrührenden Scheiteln der $f$ verbindet. Wir wollen nun beweisen, dass dann $f_m$ auf unendlich viele Arten so gewählt werden kann, dass, unter gewissen Bedingungen für $a$ und $b$, der vorwärts und der rückwärts gerichtete Differentialquotient ***unendlich gross mit demselben Zeichen*** werden.

Wir unterscheiden die beiden Fälle, dass zu dem $x_0$ des $P$ kein Scheitel der Theilcurve $f_m$ gehört, oder dass ein solcher dazu gehört.

***Erster Fall. Zu dem $x_0$ des $P$ gehört kein Scheitel der Theilcurve $f_m$*** (Fig. 3). Sei nun auf einer beliebigen Theilcurve $f_i$ der Punkt $P'$ mit der Abscisse $x'$ der Scheitel derjenigen oberen oder unteren Wellenhälfte, welcher $x_0$ zugehört, so ist der Absolutwerth von $x_0 - x'$ höchstens gleich $\frac{1}{4}$ Wellenlänge der $f_i$, oder $0 < |x_0 - x'| \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}\frac{1}{a^i}$. Zu $x'$ gehören dann auch Scheitel auf allen folgenden Theilcurven, deren Wellenlängen stets kleiner werden und unter jede beliebig kleine Grösse heruntersinken können, und es sei $f_{m+1}$ die erste derselben, für welche $\frac{1}{2}\frac{1}{a^{m+1}}$ kleiner als $|x_0 - x'|$ ist. Bezeichnet man $x_0 - x'$ mit $x_{m+1}$, so hat man, indem man beachtet, dass einer Wellenhälfte nur ihr vorwärts liegender Grenzpunkt zugerechnet werden soll,

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{a^m} < x_{m+1} \leqq \frac{1}{2}\frac{1}{a^m} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\frac{1}{a^{m+1}} < |x_{m+1}|.$$

Da $i$ beliebig gross gewählt werden kann, so kann $m$ jede beliebige Grösse übertreffen, und es giebt offenbar unendlich viele $m$, welche der angegebenen Bedingung entsprechen.

Der auf der entgegengesetzten Seite wie $S'$ von der Ordinatenlinie von $P$ liegende benachbarte Scheitel der $f_m$ sei $S''$ mit der Abscisse $x''$. Es gehören dann auf der ganzen Curve $f$, auf der Theilcurve $f_m$ und auf der Summencurve $s_m$ die Punkte zu $x_0: P, S, Q$, zu $x': P', S', Q'$, zu $x'': P'', S'', Q''$; und bei den früheren Bezeichnungen gelten auch wieder die Formeln (3.). Da $x'$ und $x''$ benachbarten Scheiteln der $f_m$ angehören,

so liefern sie, durch die halbe Wellenlänge $\frac{1}{a^m}$ getheilt, ganze, um Eins verschiedene Zahlen $\beta_m$ und $\beta_m+1$. Es muss dann $x_0:\frac{1}{a^m}>\beta_m$ und $<\beta_m+1$, oder

$$0<x_0-\beta_m\frac{1}{a^m}<\frac{1}{a^m}$$

sein, und es ist $\beta_m$ gerade oder ungerade, je nachdem $S$ auf einer ab- oder einer aufsteigenden Wellenhälfte von $f_m$ liegt. Sodann ist

$$0<|x'-x_0|\leqq\tfrac{1}{2}\frac{1}{a^m},\quad \tfrac{1}{2}\frac{1}{a^m}\leqq|x''-x_0|<\frac{1}{a^m}.$$

Die Gleichung (4.) gilt wie früher.

Die Steigung $\frac{r'-r}{x'-x_0}$ der Sehne $(x', x_0)$ der Restcurve setzt sich wieder aus den Steigungen der zugehörigen Sehnen der Theilcurven $f_m \dots$ in inf. zusammen, welche, wie früher, gleiche Zeichen besitzen, und zwar $-(-1)^{\beta_m}$, da es $+$ ist, wenn $S$ auf einer aufsteigenden Wellenhälfte liegt, also $\beta_m$ ungerade ist, und umgekehrt.

Indem wir zwischen die für den ersten Fall bestimmten Grenzwerthe von $|x_{m+1}|$ einen Werth einschalten, erhalten wir zwei Unterfälle:

$$1)\qquad \tfrac{3}{2}\frac{1}{a^{m+1}}<|x_{m+1}|\leqq\tfrac{1}{2}\frac{1}{a^m},$$

$$2)\qquad \tfrac{1}{2}\frac{1}{a^{m+1}}<|x_{m+1}|\leqq\tfrac{3}{2}\frac{1}{a^{m+1}}.$$

*Erster Unterfall.* Da $|x_{m+1}|$ kleiner oder gleich $\frac{1}{4}$ Wellenlänge von $f_m\left(=\frac{1}{2}\frac{1}{a^m}\right)$ ist, so nimmt die Steigung der Sehne $S'S(x', x_0)$ (Fig. 3) absolut genommen mit wachsendem $x_{m+1}$ stets zu, weil sich auf der vom Scheitel $S'$ ausgehenden Viertelswelle $S'K$ kein Wendepunkt befindet. Daher ist die Steigung von $SS'$ grösser als für den Fall, dass $R'R=\frac{3}{2}\frac{1}{a^{m+1}}$ und dann die Ordinaten von $S'$ und $S$ bezw. $b^m$ und $b^m\cos\frac{3\pi}{2a}$ wären, oder

$$>\frac{b^m\left(1-\cos\frac{3\pi}{2a}\right)}{\frac{3}{2}\frac{1}{a^{m+1}}}=\frac{2a}{3}(ab)^m\left(1-\cos\frac{3\pi}{2a}\right).$$

Um so mehr ist die zugehörige Sehnensteigung der Restcurve grösser als dieser Werth.

Es ist daher

$$\frac{p'-p}{x'-x_0} = -(-1)^{\beta_m}(ab)^m\left(\eta\,\frac{2a}{3}\left(1-\cos\frac{3\pi}{2a}\right)+\varepsilon\,\frac{\pi}{ab-1}\right),$$

wo $\eta$ und $\varepsilon$ die Bedeutungen wie früher haben.

*Zweiter Unterfall.* Die Zeichen der Steigungen der Sehnen $(x', x_0)$ der Bestandtheile der Restcurve stimmen wieder unter einander und mit dem oben ermittelten überein. Für den Grenzwerth von $|x_{m+1}| = \frac{3}{2}\frac{1}{a^{m+1}} = \frac{3}{4}$ der Wellenlänge der $f_{m+1}$ ist die Summe der Absolutwerthe der Steigungen bei den zwei ersten Theilcurven $f_m$ und $f_{m+1}$

$$= b^m\frac{1-\cos\frac{3\pi}{2a}}{\frac{3}{2}\frac{1}{a^{m+1}}}+\frac{b^{m+1}}{\frac{3}{2}\frac{1}{a^{m+1}}} = \frac{2a}{3}(ab)^m\left(1-\cos\frac{3\pi}{2a}+b\right) = (ab)^m\zeta_0,$$

da bei $f_{m+1}$ ein Scheitel $(x')$ mit einem Knoten $(x_0)$ verbunden wird, so dass der Unterschied der Ordinaten gleich $b^{m+1}$ ist. Für den andern Grenzwerth $\frac{1}{2}\frac{1}{a^{m+1}}$ ist entsprechend diese Summe

$$= b^m\frac{1-\cos\frac{\pi}{2a}}{\frac{1}{2}\frac{1}{a^{m+1}}}+\frac{b^{m+1}}{\frac{1}{2}\frac{1}{a^{m+1}}} = 2a(ab)^m\left(1-\cos\frac{\pi}{2a}+b\right) = (ab)^m\zeta_1.$$

Soll keine der mit den verschiedenen Zwischenwerthen von $x_{m+1}$ und $x_0$ verbundenen Steigungen kleiner als diejenige $(ab)^m\zeta_0$ sein, so muss man zunächst haben

$$\zeta_1-\zeta_0 = 2a\left(\left(1-\cos\frac{\pi}{2a}+b\right)-\frac{1}{3}\left(1-\cos\frac{3\pi}{2a}+b\right)\right) \geqq 0.$$

Hieraus folgt

$$b \geqq \frac{3}{2}\cos\frac{\pi}{2a}-\frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{2a}-1.$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, ist auch für jeden Zwischenwerth von $x_0$ die Summe beider Steigungen grösser als $(ab)^m\zeta_0$. Dies wird später analytisch bewiesen werden; statt aber diesen Beweis zur Vervollständigung hier einzuschalten, will ich eine Veranschaulichung durch Zeichnung geben. In Fig. 4 sind $f_m$, $f_{m+1}$ und $f_m+f_{m+1}$ dargestellt; ihre Scheitel, mit der Abscisse $x' = OR'$, sind $S'$, $T'$, $U'$. Zu den Grenzwerthen von $|x_{m+1}|$, nämlich zu $\frac{3}{2}\frac{1}{a^{m+1}}$ und $\frac{1}{2}\frac{1}{a^{m+1}}$ gehören die Knoten $R_0$ und $R_1$ von $f_{m+1}$ und die

Punkte $S_0$ und $S_1$ von $f_m$ und $f_m+f_{m+1}$. Die Sehnen $(x', x_0)$ der letzteren Curve für beide Grenzwerthe sind bezw. $U'S_0$ und $U'S_1$; sollen sie gleiche Steigung besitzen, so muss $S_0S_1U'$ eine gerade Linie sein, wodurch $U'$ und $b$ bestimmt sind, und zwar $b$ durch die Proportion

$$(R'U'-R_1S_1):(R_1S_1-R_0S_0) = R'R_1:R_1R_0 = 1:2,$$

oder

$$\left(b^m+b^{m+1}-b^m\cos\frac{\pi}{2a}\right):\left(b^m\cos\frac{\pi}{2a}-b^m\cos\frac{3\pi}{2a}\right) = 1:2,$$

woraus derselbe Ausdruck des kleinsten $b$ wie vorhin folgt.

Zeichnet man mit dem durch die Sehne $S_0S_1$ bestimmten

$$b^{m+1} = S'U' = R'T'$$

die $f_{m+1}$ und $f_m+f_{m+1}$ zwischen $S_0$ und $S_1$, so findet man letztere auf der der $x$-Axe zugekehrten Seite der Sehne $S_0S_1$ liegend, so dass die von irgend einem Punkte dieses Curventheiles nach $U'$ gezogene Sehne eine grössere Steigung als $U'S_0$ besitzt; um so mehr, wenn $b$ grösser als jener Werth ist. Man findet dies thatsächliche Ergebniss begreiflich, wenn man $f_m$ durch eine Parabel ersetzt, welche durch $S_1$ und $S_0$ geht und $S'R'$ zur Axe hat; bei dieser ist nämlich $S'U' = 3VW$, wenn $VW$ das zwischen Sehne $S_0S_1$ und Parabelbogen $S_0S_1$ liegende Stück desjenigen Durchmessers bedeutet, der gleichweit von $S_0$ und $S_1$ entfernt liegt. Unter der Voraussetzung nun, dass die Krümmung der Cosinuslinie vom Scheitel bis zum Knoten, wo sie Null wird, schneller abnimmt als diejenige jener Parabel, ist bei ersterer $S'U' > 3VW$; also bleibt auf der Geraden $VW$ die $f_m+f_{m+1}$ um mehr als $\frac{1}{3}S'U'$ von der Sehne $S_0S_1$ gegen die $x$-Axe hin entfernt.

Nun ist jedenfalls $\left|\frac{r'-r}{x'-x_0}\right| > (ab)^m\zeta_0$; denn entweder hat $|x_{m+1}|$ den Grenzwerth $\frac{3}{2}\frac{1}{a^{m+1}}$; dann kann die Summe der Absolutwerthe der Steigungen der Sehnen $(x', x_0)$ für $f_m$ und $f_{m+1} = (ab)^m\zeta_0$ sein; die zugehörige Steigung ist aber dann für keine der folgenden Theilcurven $=0$, weil $x'$ einem Scheitel und $x_0$ einem Knoten einer jeden derselben angehört; oder es ist $|x_{m+1}|$ nicht jener Grenzwerth; dann ist schon der zu $f_m$ und $f_{m+1}$ gehörige Bestandtheil $> (ab)^m\zeta_0$.

Führt man in dem Ausdrucke von $\zeta_0$ den vorhin bestimmten kleinsten Werth von $b$ ein, so erhält man

$$\left|\frac{r'-r}{x'-x_0}\right| > (ab)^m a\left(\cos\frac{\pi}{2a}-\cos\frac{3\pi}{2a}\right),$$

und daher (3. und 4.)

$$\frac{p'-p}{x'-x} = -(-1)^{\beta_m}(ab)^m\Big(\eta_1\, a\Big(\cos\frac{\pi}{2a}-\cos\frac{3\pi}{2a}\Big)+\varepsilon_1\frac{\pi}{ab-1}\Big),$$

wo $\eta_1$, $\varepsilon_1$ dieselben Bedeutungen haben wie $\eta$, $\varepsilon$.

*In beiden Unterfällen* erhält man für $\frac{q''-q}{x''-x_0}$ dieselbe Bestimmung wie für $\frac{q'-q}{x'-x_0}$, und

$$\left|\frac{r''-r}{x''-x_0}\right| > 2(ab)^m,$$

weil der Bogen zwischen $S$ und $S'' \geqq \frac{1}{4}$ Welle und $< \frac{1}{2}$ Welle der $f_m$ (Fig. 3), daher die Steigung der Sehne $S''S$ absolut genommen $\geqq$ der Steigung der durch die Scheitel $S''$, $S'$ und den zwischenliegenden Knoten $K$ gehenden Sehne $S''KS'$, d. h. $\geqq R''S'' : R''K = b^m : \frac{1}{2}\frac{1}{a^m}$ ist, und weil in dem Grenzfalle, worin diese Steigung nicht grösser als $2(ab)^m$ wird, und $S$ in $K$ liegt, die entsprechenden Steigungen in den folgenden Theilcurven nicht Null sein können, da $K$ dann Knotenpunkt in allen ist. Das Zeichen der Steigung von $S''S$ stimmt aber mit dem von $S'S$ überein.

Daher hat man

$$\frac{p''-p}{x''-x_0} = -(-1)^{\beta_m}(ab)^m\Big(\eta_2\, 2+\varepsilon_2\frac{\pi}{ab-1}\Big),$$

wo $\eta_2$, $\varepsilon_2$ dieselben Bedeutungen haben wie $\eta$, $\varepsilon$.

Die Vergleichung dieses Ausdrucks mit demjenigen für $\frac{p'-p}{x'-x_0}$ in den beiden Unterfällen, und die für $b$ erhaltene Bedingung zeigen, ***dass der vorwärts- und der rückwärts gerichtete Differentialquotient der Function an einer Stelle*** $(x = x_0)$, ***welche keinem Scheitel einer Theilcurve angehört, dasselbe Zeichen haben und, wenn m ohne Ende wächst, unendlich gross werden, wenn folgende vier Bedingungen erfüllt sind,*** von denen wir später sehen werden, dass die erste die übrigen in sich schliesst:

$$1)\quad \frac{2a}{3}\Big(1-\cos\frac{3\pi}{2a}\Big) \geqq \frac{\pi}{ab-1}, \qquad 2)\quad a\Big(\cos\frac{\pi}{2a}-\cos\frac{3\pi}{2a}\Big) \geqq \frac{\pi}{ab-1},$$

$$3)\quad 2 \geqq \frac{\pi}{ab-1}, \qquad 4)\quad b \geqq \tfrac{3}{2}\cos\frac{\pi}{2a}-\tfrac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{2a}-1.$$

Während $m$ wächst, gelangt $S$ auf dem wechselnden $f_m$ im Allgemeinen bald auf eine ab-, bald auf eine aufsteigende Wellenhälfte, wodurch $\beta_m$ bald gerade, bald ungerade wird, und das Zeichen der beiden Steigungen

wechselt, so dass *im Allgemeinen auch bei denjenigen Intervallen, bei denen* $|x''-x'| = \frac{1}{2}\frac{1}{a^m}$, *der Differentialquotient unbestimmt ist. Nur in den besonderen Fällen,* in denen $x_0$ auf allen Theilcurven einer ab- oder auf allen einer aufsteigenden Wellenhälfte angehört, findet dieser Wechsel nicht statt und *ist der Differentialquotient ein bestimmter.*

*Zweiter Fall. Zu dem $x_0$ des P gehört ein Scheitel S von $f_m$* und daher von jeder folgenden Theilcurve. Dann ist $x_0 : \frac{1}{a^m} = \alpha_m$ eine ganze Zahl. Ist $\alpha_m$ gerade oder ungerade, so ist jener Scheitel ein oberer oder unterer. Die von $S$ nach dem vorhergehenden Scheitel $S'$ laufende Sehne $SS'$ besitzt eine Steigung $= (-1)^{\alpha_m} 2b^m : \frac{1}{a^m}$, und daher ist

$$\frac{r'-r}{x'-x_0} = (-1)^{\alpha_m} 2a^m \sum_m^\infty{}_n b^n = (-1)^{\alpha_m} (ab)^m \frac{2}{1-b},$$

und

$$\frac{p'-p}{x'-x_0} = (-1)^{\alpha_m} (ab)^m \left(\frac{2}{1-b} + \varepsilon_3 \frac{\pi}{ab-1}\right).$$

Entsprechend ist

$$\frac{p''-p}{x''-x_0} = -(-1)^{\alpha_m} (ab)^m \left(\frac{2}{1-b} + \varepsilon_4 \frac{\pi}{ab-1}\right),$$

wo $\varepsilon_3$ und $\varepsilon_4$ die Bedeutung haben wie $\varepsilon$.

*Daher haben im zweiten Falle, wo $x_0$ einem Scheitel einer Theilcurve $f_m$ angehört, und das Intervall $= \frac{1}{a^m}$ ist, der vorwärts und der rückwärts gerichtete Differentialquotient entgegengesetzte Zeichen und werden, wenn m ohne Ende wächst, unendlich gross, sobald*

$$\frac{2}{1-b} \geqq \frac{\pi}{ab-1}$$

*ist.* Wächst *m*, so bleibt auf dem wechselnden $f_m$ doch $S$ ein Scheitel derselben Art, und *das Zeichen jedes der beiden Differentialquotienten ändert sich nicht.*

Die Intervalle des *x*, welche Herr *Weierstrass* wählte, und die, welche ich annahm, haben das Gemeinsame, dass sie zu der halben Wellenlänge $\frac{1}{a^m}$ in einem endlichen Verhältnisse stehen. Im ersten Falle ergeben sich für jeden Punkt $P(x_0)$ der Curve der vorwärts und der rückwärts gerichtete Differentialquotient unendlich gross mit entgegengesetzten Zeichen, im letzteren

Falle für jeden Punkt ausser den Scheiteln unendlich gross mit gleichen Zeichen. Auf einer der beiden Seiten von $P$ kann man daher bei Vergleichung beider Fälle zwei dem $P$ unendlich nahe Punkte der Curve angeben, deren Verbindungslinien mit $P$ unendlich grosse Steigungen mit entgegengesetzten Zeichen besitzen. Geht man von einem dieser Punkte auf der Curve hin zum anderen über, so geschieht dies ohne Durchgang durch das Unendliche innerhalb des Streifens der Ordinatenlinien beider Punkte, welcher $P$ weder in seinem Inneren noch in seiner Grenzlinie enthält. Dabei muss wegen der Stetigkeit der Function auch die Sehne, welche den beweglichen Punkt mit $P$ verbindet, einen der beiden zwischen jenen durch die Steigungen $+\infty$ und $-\infty$ bezeichneten Verbindungslinien liegenden Winkel durchlaufen. Der eine dieser Winkel, welcher die Ordinatenlinie des $P$ enthält und unendlich klein ist, kann aber nicht durchlaufen werden, weil sonst der Punkt der Curve durch $P$ oder durch das Unendliche durchgehen müsste, was unmöglich; es wird daher der andere von zwei Rechten um unendlich wenig abweichende Winkel durchlaufen, d. h. die Sehne nimmt jede Steigung an. Wegen des wechselnden $m$ giebt es aber unendlich viele Paare solcher benachbarten Punkte des $P$ und unendlich viele zwischen ihnen liegende Stücke der Curve. Daher: *In jedem Punkte der Curve, ausser in ihren Scheiteln, besitzt, wenn $a$ und $b$ gewissen Bedingungen entsprechen, der Differentialquotient der Function zugleich alle Werthe; oder jede Gerade, die man durch den Punkt legt, wenn sie nur mit der Senkrechten zur $x$-Axe einen, wenn auch noch so kleinen Winkel bildet, schneidet die Curve in unendlich vielen Punkten, deren Abstände von dem gegebenen Punkte zu $\frac{1}{a^m}$ in endlichem Verhältniss stehen, also unendlich klein werden, wenn $m$ ohne Ende wächst.*

## Analytische Untersuchung.

### §. 5.

Dieselbe ist in ihrem ersten Theile an die Darstellungsweise des Herrn *Weierstrass* angeschlossen, und obgleich die angenommenen Intervalle und dadurch die Ergebnisse im Einzelnen andere sind, besitzt die Entwicklung doch übereinstimmende Theile, die ich mit Anführungszeichen herübergenommen habe.

„Es sei $x$ eine reelle Veränderliche, $a$ eine ungerade ganze Zahl“, grösser als Eins, „$b$ eine positive Constante, kleiner als Eins, und

$$f(x) = \sum_0^\infty {}_n b^n \cos a^n x \pi;$$

so ist $f(x)$ eine stetige Function, von der sich beweisen lässt", dass sie unter gewissen Bedingungen für die Werthe von $a$ und $b$ *an besonderen Stellen einen bestimmten Differentialquotienten hat, im Allgemeinen aber keinen bestimmten.*

Es sei $x_0$ irgend ein bestimmter Werth von $x$ und $m$ eine nach gewissen Bedingungen anzunehmende positive ganze Zahl. In Bezug auf $x_0$ sind die beiden Fälle zu unterscheiden, dass $a^m x_0$ entweder, wie gross man $m$ auch annehmen möge, nie eine ganze Zahl wird, oder dass es für irgend ein $m$ und dann auch für alle grösseren eine ganze Zahl wird.

Im *zweiten Falle* sei $\alpha_m$ die ganze Zahl, so dass ist

$$a^m x_0 - \alpha_m = 0.$$

Im *ersten Falle* giebt es zu einem beliebig angenommenen $m$ eine bestimmte ganze Zahl $\alpha_m$, für welche die Differenz $a^m x_0 - \alpha_m$, die mit $x_{m+1}$ bezeichnet werde, $> -\frac{1}{2}$, aber $\leqq \frac{1}{2}$, jedoch nicht Null ist. Dabei soll $m$ so bestimmt werden, dass der absolute Werth von $x_{m+1}$, der mit $|x_{m+1}|$ bezeichnet sei, $> \frac{1}{2a}$ ist, was neben der Bedingung $|x_{m+1}| \leqq \frac{1}{2}$ stets möglich. Denn sei es für $m = i$ nicht der Fall, so dass

$$|a^i x_0 - \alpha_i| = |x_{i+1}| \leqq \frac{1}{2a},$$

so multiplicire man die linke Seite des Ansatzes mit $a^k$, wobei $k$ eine positive ganze Zahl; man kann, wie klein auch die endliche Grösse $x_{i+1}$ sein möge, doch $k$ und dadurch $a^k$ so gross machen, ohne dass es unendlich gross werden müsste, dass

$$|a^{i+k} x_0 - a^k \alpha_i| > \frac{1}{2a}$$

wird. Ist $k$ aber die kleinste ganze Zahl, welche dies leistet, so dass

$$|a^{i+k-1} x_0 - a^{k-1} \alpha_i| \leqq \frac{1}{2a},$$

so folgt hieraus

$$|a^{i+k} x_0 - a^k \alpha_i| \leqq \tfrac{1}{2},$$

und, wenn man $i + k = m$ und die ganze Zahl $a^k \alpha_i = \alpha_m$ setzt,

$$\frac{1}{2a} < |a^m x_0 - \alpha_m| = |x_{m+1}| \leqq \tfrac{1}{2}.$$

Für den Fall $|x_{m+1}| = \frac{1}{2}$ wird dann von den beiden möglichen $\alpha_m$ das kleinere gewählt, so dass, der ursprünglichen Bedingung entsprechend, $x_{m+1} = \frac{1}{2}$ ist. — Da $i$ beliebig gross gewählt werden kann und $m \geqq i$ ist, so kann $m$ grösser als jede beliebige Zahl gemacht werden; und da $k$ endlich ist, giebt es unendlich viele $m$, welche der Bedingung entsprechen.

Wir wollen im I. Falle zwei Unterfälle 1) und 2) unterscheiden, so dass folgende drei Möglichkeiten zu untersuchen sind:

I. Fall. $-\frac{1}{2} < a^m x_0 - \alpha_m = x_{m+1} \leqq \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2a} < |x_{m+1}|$,

1) $\frac{3}{2a} < |x_{m+1}| \leqq \frac{1}{2}$,

2) $\frac{1}{2a} < |x_{m+1}| \leqq \frac{3}{2a}$;

II. Fall. $a^m x_0 - \alpha_m = 0$.

*Erster Fall.* Es giebt hier eine ganze Zahl $\beta_m$, so dass

$$0 < a^m x_0 - \beta_m < 1,$$

wobei $\beta_m = \alpha_m$ oder $= \alpha_m - 1$, je nachdem $x_{m+1} >$ oder $< 0$ ist.

Setzt man

$$x' = \frac{\alpha_m}{a^m}, \quad x'' = \frac{\alpha_m \pm 1}{a^m},$$

wo hier und in der Folge das obere oder das untere Zeichen genommen werden muss, je nachdem $x_{m+1} > 0$ oder $< 0$ ist, so hat man

$$(5.) \qquad x' - x_0 = -\frac{x_{m+1}}{a^m}, \quad x'' - x_0 = \frac{\pm 1 - x_{m+1}}{a^m},$$

sowie

$$x'' - x' = \pm \frac{1}{a^m} \quad \text{und} \quad x' < x_0 < x'' \quad \text{oder} \quad x'' < x_0 < x'.$$

„Man kann aber $m$ so gross annehmen, dass $x'$, $x''$ beide der Grösse $x_0$ so nahe kommen, wie man will.

Nun ist

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} = \sum_0^\infty {}_n\, b^n \cdot \frac{\cos a^n x' \pi - \cos a^n x_0 \pi}{x' - x_0}$$

$$= \sum_0^{m-1} {}_n\, (ab)^n \cdot \frac{\cos a^n x' \pi - \cos a^n x_0 \pi}{a^n (x' - x_0)} + \sum_0^\infty {}_n\, b^{m+n} \cdot \frac{\cos a^{m+n} x' \pi - \cos a^{m+n} x_0 \pi}{x' - x_0}.$$

Der erste Theil dieses Ausdruckes ist, da

$$\frac{\cos a^n x' \pi - \cos a^n x_0 \pi}{a^n (x' - x_0)} = -\pi \sin a^n \frac{x' + x_0}{2} \pi \cdot \frac{\sin a^n \frac{x' - x_0}{2} \pi}{a^n \frac{x' - x_0}{2} \pi}$$

und der Werth von

$$\frac{\sin a^n \frac{x'-x_0}{2}\pi}{a^n \frac{x'-x_0}{2}\pi}$$

stets *zwischen* $-1$ und $+1$, der von

$$\sin a^n \frac{x'+x_0}{2}\pi = \sin \frac{2a^m x' - a^m(x'-x_0)}{a^{m-n}} \cdot \frac{\pi}{2} \text{“}$$

*zwischen* denselben Grenzen „liegt, dem absoluten Betrage nach kleiner als

$$\pi \sum_0^{m-1}{}_n a^n b^n,$$

also kleiner als $\frac{\pi}{ab-1}(ab)^m$“.

„Ferner hat man, weil $a$ eine ungerade Zahl ist:“

$$(6.)\qquad \cos a^{m+n} x'\pi = \cos a^n \alpha_m \pi = (-1)^{\alpha_m},$$

$$(7.)\qquad \cos a^{m+n} x_0 \pi = \cos(a^n \alpha_m + a^n x_{m+1})\pi = (-1)^{\alpha_m} \cos a^n x_{m+1}\pi,$$

also

$$(8.)\qquad \sum_0^\infty{}_n b^{m+n} \cdot \frac{\cos a^{m+n} x'\pi - \cos a^{m+n} x_0 \pi}{x'-x_0} = -(-1)^{\alpha_m}(ab)^m \sum_0^\infty{}_n \frac{1-\cos a^n x_{m+1}\pi}{x_{m+1}} b^n.$$

Alle Glieder der Summe

$$(9.)\qquad \sum_0^\infty{}_n \frac{1-\cos a^n x_{m+1}\pi}{x_{m+1}} b^n$$

besitzen übereinstimmend das Zeichen des Nenners $x_{m+1}$, da der Zähler stets positiv ist, weil $a^n x_{m+1}$ nicht Null werden kann. Das Zeichen der Summe (8.) ist daher $\mp(-1)^{\alpha_m}$, je nachdem $x_{m+1} \gtrless 0$, was mit $-(-1)^{\beta_m}$ übereinstimmt.

*Im ersten Unterfalle* gilt $\frac{3}{2a} < |x_{m+1}| \leqq \frac{1}{2}$. Es ist aber der absolute Werth $\zeta'$ des ersten Gliedes der Summe (9.)

$$\zeta' = \frac{1-\cos x_{m+1}\pi}{|x_{m+1}|} > \frac{1-\cos\frac{3}{2a}\pi}{\frac{3}{2a}},$$

weil

$$\frac{d\zeta'}{d|x_{m+1}|} = \frac{\pi x_{m+1} \sin x_{m+1}\pi - 1 + \cos x_{m+1}\pi}{(x_{m+1})^2}$$

innerhalb der gegebenen Grenzen von $|x_{m+1}|$ stets

$$>\frac{\sin^2 x_{m+1}\pi - 1 + \cos x_{m+1}\pi}{(x_{m+1})^2} = \frac{(1-\cos x_{m+1}\pi)\cos x_{m+1}\pi}{(x_{m+1})^2},$$

also stets positiv, und daher $\zeta'$ mit $|x_{m+1}|$ wächst und grösser ist als der Werth, den es für den kleineren Grenzwerth $|x_{m+1}| = \frac{3}{2a}$ annehmen würde. Daher ist um so mehr die Summe (9.) grösser als dieser Werth.

Hiernach hat man

$$(10.)\qquad \frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0} = -(-1)^{\beta_m}(ab)^m\left(\eta\frac{2a}{3}\left(1-\cos\frac{3\pi}{2a}\right)+\varepsilon\frac{\pi}{ab-1}\right),$$

„wo $\eta$ eine positive Grösse, die $>1$, bezeichnet, während $\varepsilon$ zwischen $-1$ und $+1$ enthalten ist".

*Im zweiten Unterfalle* gilt $\frac{1}{2a} < |x_{m+1}| \leqq \frac{3}{2a}$. Der absolute Werth $\zeta$ der Summe der beiden ersten Glieder der Summe (9.) ist

$$\zeta = \frac{1-\cos x_{m+1}\pi + b(1-\cos a x_{m+1}\pi)}{|x_{m+1}|},$$

oder, wenn man

$$|x_{m+1}| = \frac{3}{2a} - \frac{\xi}{a} = \frac{1}{2a} + \frac{\xi'}{a}$$

setzt, woraus

$$0 \leqq \xi < 1,\quad 0 < \xi' \leqq 1,\quad \xi + \xi' = 1$$

folgt,

$$\zeta = \frac{1-\cos(\frac{3}{2}-\xi)\frac{\pi}{a} + b(1-\cos(\frac{3}{2}-\xi)\pi)}{\frac{1}{a}(\frac{3}{2}-\xi)} = \frac{1-\cos(\frac{1}{2}+\xi')\frac{\pi}{a} + b(1-\cos(\frac{1}{2}+\xi')\pi)}{\frac{1}{a}(\frac{1}{2}+\xi')}.$$

Bezeichnet man den Werth von $\zeta$ für $\xi = 0$ und $\xi' = 1$ mit $\zeta_0$, und denjenigen, welchen es für $\xi = 1$ und $\xi' = 0$ annehmen würde, mit $\zeta_1$, so erhält man

$$\zeta_0 = \frac{1-\cos\frac{3\pi}{2a}+b}{\frac{3}{2a}},\quad \zeta_1 = \frac{1-\cos\frac{\pi}{2a}+b}{\frac{1}{2a}}.$$

Wir wollen nun $b$ so bestimmen, dass kein Werth von $\zeta$ für die zulässigen Werthe von $\xi$ kleiner als $\zeta_0$, oder dass $\zeta - \zeta_0 \geqq 0$ ist. Es darf dann auch nicht $\zeta_1 > \zeta_0$ sein, da sich $\zeta$ dem $\zeta_1$ beliebig annähern kann, so dass

$$\zeta_1 - \zeta_0 = \frac{2a}{3}\left(2+2b-3\cos\frac{\pi}{2a}+\cos\frac{3\pi}{2a}\right) \geqq 0,$$

oder

$$(11.)\qquad b \geqq \tfrac{3}{2}\cos\frac{\pi}{2a} - \tfrac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{2a} - 1,$$

wodurch

$$(12.)\qquad \zeta_0 \geqq a\left(\cos\frac{\pi}{2a} - \cos\frac{3\pi}{2a}\right)$$

wird.

Für die anderen Werthe von $\zeta$ unterscheiden wir, ob $\xi \leqq \frac{1}{2}$ oder $> \frac{1}{2}$ ist. Für $0 \leqq \xi \leqq \frac{1}{2}$ erhalten wir nach kurzer Entwicklung

$$\zeta - \zeta_0 = \frac{a}{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-\xi)} \left\{ \tfrac{3}{2}\cos\frac{3\pi}{2a}\left(1 - \cos\xi\frac{\pi}{a}\right) - \tfrac{3}{2}\sin\frac{3\pi}{2a}\sin\xi\frac{\pi}{a} + \xi - \xi\cos\frac{3\pi}{2a} \right.$$
$$\left. + \tfrac{3}{2}\, b\sin\xi\pi + \xi b \right\} \geqq 0.$$

Dieser Ansatz wird erfüllt, wenn (11.) erfüllt ist. Denn führt man in ihm den kleinsten Werth von $b$ aus (11.) ein, so wird trotz Weglassung des ersten nie negativen Gliedes

$$-\tfrac{3}{2}\sin\frac{3\pi}{2a}\,\frac{\sin\xi\frac{\pi}{a}}{\xi} + 1 - \cos\frac{3\pi}{2a} + \left(\tfrac{3}{2}\frac{\sin\xi\pi}{\xi} + 1\right)\left(\tfrac{3}{2}\cos\frac{\pi}{2a} - \tfrac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{2a} - 1\right) > 0.$$

Setzt man nämlich hierin für $\dfrac{\sin\xi\frac{\pi}{a}}{\xi}$ seinen grössten innerhalb der gegebenen Grenzen von $\xi$ bei $\xi = 0$ erreichten Werth $\frac{\pi}{a}$ und für $\frac{\sin\xi\pi}{\xi}$ seinen kleinsten bei $\xi = \frac{1}{2}$ erreichten Werth 2 ein, so wird der Werth des Ausdruckes

$$> -\frac{3\pi}{2a}\sin\frac{3\pi}{2a} + 1 - \cos\frac{3\pi}{2a} + 6\cos\frac{\pi}{2a} - 2\cos\frac{3\pi}{2a} - 4,$$

und wenn man die sin und cos in Reihen entwickelt, welche man vor positiven Gliedern abbricht, wodurch, da die Winkel nicht grösser als $\frac{\pi}{2}$ sind, Positives weggelassen wird,

$$> -9\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 + \tfrac{27}{2}\left(\frac{\pi}{2a}\right)^4 - \tfrac{729}{120}\left(\frac{\pi}{2a}\right)^6 + \tfrac{27}{2}\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 - \tfrac{81}{8}\left(\frac{\pi}{2a}\right)^4 - 3\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2$$
$$+ \tfrac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2a}\right)^4 - \tfrac{1}{120}\left(\frac{\pi}{2a}\right)^6 = \tfrac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2a}\right)^4\left(\tfrac{29}{8} - \tfrac{73}{12}\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2\right) > 0,$$

$$\text{da } \left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 \leqq \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = 0{,}274\ldots$$

Für $\frac{1}{2} < \xi < 1$ oder $0 < \xi' < \frac{1}{2}$ setzen wir $\zeta - \zeta_0 = \zeta - \zeta_1 + \zeta_1 - \zeta_0$. Da nun $\zeta_1 - \zeta_0 \geqq 0$, so ist $\zeta - \zeta_0 > 0$, wenn $\zeta - \zeta_1 > 0$, was nun nach-

gewiesen werden soll. Es ergiebt sich

$$\zeta-\zeta_1 = \frac{a}{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\xi')}\Big\{\tfrac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2a}\Big(1-\cos\xi'\frac{\pi}{a}\Big)+\tfrac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2a}\sin\xi'\frac{\pi}{a}-\xi'+\xi'\cos\frac{\pi}{2a}$$
$$+\tfrac{1}{2}b\sin\xi'\pi-\xi' b\Big\}$$
$$>\frac{a\xi'}{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\xi')}\Big\{\tfrac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2a}\Big(\tfrac{1}{2}\xi'\Big(\frac{\pi}{a}\Big)^2-\tfrac{1}{24}\xi'^3\Big(\frac{\pi}{a}\Big)^4\Big)+\tfrac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2a}\Big(\frac{\pi}{a}-\tfrac{1}{6}\xi'^2\Big(\frac{\pi}{a}\Big)^3\Big)$$
$$-1+\cos\frac{\pi}{2a}+b\Big(\tfrac{1}{2}\frac{\sin\xi'\pi}{\xi'}-1\Big)\Big\},$$

oder wenn man cos und sin in Reihen entwickelt und in den negativen Gliedern für $\xi'$ seinen grösseren Grenzwerth $\frac{1}{2}$ einsetzt,

$$>\frac{a\xi'}{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\xi')}\Big\{\tfrac{1}{4}\xi'\Big(\frac{\pi}{a}\Big)^2\Big(1-\tfrac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{2a}\Big)^2-\tfrac{1}{3}\Big(\frac{\pi}{2a}\Big)^2-\tfrac{1}{12}\Big(\frac{\pi}{2a}\Big)^2\Big)$$
$$+\Big(\frac{\pi}{2a}\Big)^2\Big(1-\tfrac{1}{6}\Big(\frac{\pi}{2a}\Big)^2-\tfrac{1}{2}\Big)+b\Big(\tfrac{1}{2}\frac{\sin\xi'\pi}{\xi'}-1\Big)\Big\}>0,$$

weil $b>0$, $\frac{\pi}{2a}<1$ und (wegen $\xi'<\frac{1}{2}$) $\frac{1}{2}\frac{\sin\xi'\pi}{\xi'}>1$.

Im zweiten Unterfalle ist also, wenn die Bedingung (11.) erfüllt ist, stets der absolute Werth $\zeta$ der Summe der beiden ersten Glieder der Summe (9.) $\geqq \zeta_0$, daher ist die Summe (9.) $>\zeta_0$, so dass unter Beachtung von (12.)

$$(13.)\qquad \frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0} = -(-1)^{\beta_m}(ab)^m\Big(\eta_1 a\Big(\cos\frac{\pi}{2a}-\cos\frac{3\pi}{2a}\Big)+\varepsilon_1\frac{\pi}{ab-1}\Big),$$

wo $\eta_1$, $\varepsilon_1$ dieselben Bedeutungen haben wie $\eta$, $\varepsilon$.

Bei der Bestimmung von $\frac{f(x'')-f(x_0)}{x''-x_0}$, worin (5.)

$$x'' = \frac{\alpha_m \pm 1}{a^m},\quad x''-x_0 = \frac{\pm 1 - x_{m+1}}{a^m},$$

und $\pm$ gilt, je nachdem $x_{m+1} \gtrless 0$, ändert sich der Ausdruck (6.) in

$$\cos a^{m+n}x''\pi = \cos a^n(\alpha_m\pm 1)\pi = -(-1)^{\alpha_m},$$

während (7.) ungeändert bleibt, und es wird (vergl. (8.))

$$\sum_0^\infty{}_n\, b^{m+n}\cdot\frac{\cos a^{m+n}x''\pi-\cos a^{m+n}x_0\pi}{x''-x_0} = -(-1)^{\alpha_m}(ab)^m\sum_0^\infty{}_n\frac{1+\cos a^n x_{m+1}\pi}{\pm 1-x_{m+1}}b^n.$$

Das Zeichen dieser Summe ergiebt sich wie vorhin $-(-1)^{\beta_m}$, weil alle Glieder der Summe

$$(14.)\qquad \sum_0^\infty{}_n\frac{1+\cos a^n x_{m+1}\pi}{\pm 1-x_{m+1}}b^n$$

das Zeichen des Nenners $\pm 1 - x_{m+1}$ haben, welches $\pm$ ist, wenn $x_{m+1} \gtrless 0$, und daher $\beta_m = \alpha_m$ oder $= \alpha_m - 1$ ist. Es war $0 < |x_{m+1}| \leqq \frac{1}{2}$, und wir wollen $|x_{m+1}|$, wenn es zwischen den Grenzen 0 und einschliesslich $\frac{1}{4}$ liegt, mit $\xi''$, wenn zwischen $\frac{1}{4}$ und einschl. $\frac{1}{2}$, mit $\frac{1}{2} - \xi'''$ bezeichnen, so dass

$$|x_{m+1}| = \xi'' = \tfrac{1}{2} - \xi''', \quad 1 - |x_{m+1}| = 1 - \xi'' = \tfrac{1}{2} + \xi''', \quad 0 < \xi'' \leqq \tfrac{1}{4}, \quad 0 \leqq \xi''' < \tfrac{1}{4}.$$

Es ist dann der absolute Werth $\zeta''$ des ersten Gliedes der Summe (14.)

$$\zeta'' = \frac{1 + \cos x_{m+1}\pi}{1 - |x_{m+1}|} = \frac{1 + \cos\xi''\pi}{1 - \xi''} = \frac{1 + \cos(\frac{1}{2} - \xi''')\pi}{\frac{1}{2} + \xi'''} = \frac{1 + \sin\xi'''\pi}{\frac{1}{2} + \xi'''},$$

und derselbe nimmt für $|x_{m+1}| = 0$ und $= \frac{1}{2}$ denselben Werth 2 an. Für jeden andern zulässigen Werth von $|x_{m+1}|$ ist $\zeta'' - 2 > 0$. Denn es ist

$$\zeta'' - 2 = \frac{\cos\xi''\pi - 1 + 2\xi''}{1 - \xi''} > \frac{-\frac{1}{2}\xi''^2\pi^2 + 2\xi''}{1 - \xi''} = \frac{\xi''(2 - \frac{1}{2}\xi''\pi^2)}{1 - \xi''}$$

und

$$\zeta'' - 2 = \frac{\sin\xi'''\pi - 2\xi'''}{\frac{1}{2} + \xi'''} > \frac{\xi'''\pi - \frac{1}{6}\xi'''^3\pi^3 - 2\xi'''}{\frac{1}{2} + \xi'''} = \frac{\xi'''(\pi - \frac{1}{6}\xi'''^2\pi^3 - 2)}{\frac{1}{2} + \xi'''},$$

und beide Ausdrücke sind $> 0$ zwischen den gegebenen Grenzen von $\xi''$ und $\xi'''$.

Da also $\zeta'' > 2$, so ist um so mehr die Summe (14.) $> 2$, so dass wir erhalten

$$(15.) \qquad \frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0} = -(-1)^{\beta_m}(ab)^m\left(\eta_2 2 + \varepsilon_2 \frac{\pi}{ab - 1}\right),$$

wo $\eta_2$, $\varepsilon_2$ dieselben Bedeutungen haben wie $\eta$, $\varepsilon$.

Die Vergleichung der Formeln (10.), (13.), (15.) und die Beachtung von (11.) zeigen, dass *im ersten Falle, wo $a^m x_0$ für kein m eine ganze Zahl ist,* $\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}$, $\frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0}$ *stets dasselbe Zeichen haben und, wenn m ohne Ende wächst, unendlich gross werden, wenn folgende vier Bedingungen erfüllt sind:*

$$(16.) \quad \begin{cases} 1)\ \frac{2a}{3}\left(1 - \cos\frac{3\pi}{2a}\right) \geqq \frac{\pi}{ab - 1}, \quad 2)\ a\left(\cos\frac{\pi}{2a} - \cos\frac{3\pi}{2a}\right) \geqq \frac{\pi}{ab - 1}, \\ 3)\ 2 \geqq \frac{\pi}{ab - 1}, \quad 4)\ b \geqq \frac{3}{2}\cos\frac{\pi}{2a} - \frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{2a} - 1. \end{cases}$$

*Zweiter Fall.* $a^m x_0 - \alpha_m = 0$ oder $x_0 = \frac{\alpha_m}{a^m}$.

Man setze

$$x' = \frac{\alpha_m - 1}{a^m}, \quad x'' = \frac{\alpha_m + 1}{a^m},$$

so dass

$$x'-x_0 = -\frac{1}{a^m}, \quad x''-x_0 = \frac{1}{a^m}.$$

Es ist dann

$$\cos a^{m+n} x' \pi = \cos a^n (\alpha_m - 1)\pi = -(-1)^{\alpha_m},$$

$$\cos a^{m+n} x_0 \pi = \cos a^n \alpha_m \pi = (-1)^{\alpha_m},$$

$$\sum_0^\infty {}_n b^{m+n} \frac{\cos a^{m+n} x' \pi - \cos a^{m+n} x_0 \pi}{x'-x_0} = (-1)^{\alpha_m} (ab)^m \sum_0^\infty {}_n (1+1) b^n = (-1)^{\alpha_m} (ab)^m \frac{2}{1-b}$$

und

$$\frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0} = (-1)^{\alpha_m} (ab)^m \left(\frac{2}{1-b} + \varepsilon_3 \frac{\pi}{ab-1}\right).$$

Ebenso erhält man

$$\frac{f(x'')-f(x_0)}{x''-x_0} = -(-1)^{\alpha_m} (ab)^m \left(\frac{2}{1-b} + \varepsilon_4 \frac{\pi}{ab-1}\right),$$

wo $\varepsilon_3$ und $\varepsilon_4$ dieselbe Bedeutung wie $\varepsilon$ besitzen. *Daher haben im zweiten Falle, wo $a^m x_0$ eine ganze Zahl,* $\frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0}$, $\frac{f(x'')-f(x_0)}{x''-x_0}$ *entgegengesetzte Zeichen und werden, wenn m ohne Ende wächst, unendlich gross, wenn*

$$(17.) \qquad \frac{2}{1-b} \geqq \frac{\pi}{ab-1}.$$

*Diese Bedingung und die vier Bedingungen* (16.) *sind aber erfüllt, wenn von den letzteren die erste erfüllt ist.* Es ist 2) erfüllt, wenn 1) erfüllt ist, weil

$$a\left(\cos\frac{\pi}{2a} - \cos\frac{3\pi}{2a}\right) - \frac{2a}{3}\left(1-\cos\frac{3\pi}{2a}\right)$$

$$> -\tfrac{1}{2}\frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\frac{3^2}{a}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{24}\frac{3^4}{a^3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 - \frac{3}{a}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left(1-\tfrac{27}{32}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\right) > 0,$$

da

$$\tfrac{27}{32}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \leqq \tfrac{27}{32}\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 = 0{,}93\ldots$$

Es ist 3) erfüllt, wenn 1) erfüllt ist, weil

$$\frac{2a}{3}\left(1-\cos\frac{3\pi}{2a}\right) = \eta$$

für $a=3$ seinen grössten Werth 2, gleich der linken Seite von 3), besitzt und mit wachsendem $a$ abnimmt, da

$$\frac{d\eta}{da} = \tfrac{2}{3}\left(1-\cos\frac{3\pi}{2a}\right) - \frac{\pi}{a}\sin\frac{3\pi}{2a} < \tfrac{2}{3}\left(1-\cos\frac{3\pi}{2a} - \sin^2\frac{3\pi}{2a}\right)$$

$$= \tfrac{2}{3}\cos\frac{3\pi}{2a}\left(-1+\cos\frac{3\pi}{2a}\right),$$

also $\frac{d\eta}{da}$ für $3 \leqq a < \infty$ negativ ist.

Es ist 4) erfüllt, wenn 1) erfüllt ist, denn aus 1) folgt

$$\frac{\pi}{ab-1} \leqq \frac{2a}{3}\left(1-\cos\frac{3\pi}{2a}\right) < \tfrac{1}{2}\pi^2\frac{3}{2a},$$

woraus

$$b > \frac{4}{3\pi}+\frac{1}{a} > 0{,}425\cdots+\frac{1}{a}.$$

Aus 4) folgt aber, wenn wir $\frac{3}{2}\cos\frac{\pi}{2a}-\frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{2a}-1=\eta'$ setzen,

$$\frac{d\eta'}{da} = \frac{3\pi}{4a^2}\left(\sin\frac{\pi}{2a}-\sin\frac{3\pi}{2a}\right);$$

also ist $\frac{d\eta'}{da}$ für $3 \leqq a < \infty$ negativ, und $\eta'$ erreicht bei $a=3$ seinen grössten Werth mit 0,299... Demnach ist 4) erfüllt, wenn 1) erfüllt ist.

Endlich ist (17.) erfüllt, wenn 1) erfüllt ist, weil es schon mit 3) erfüllt ist, da $2 < \frac{2}{1-b}$.

Man erhält durch (16.) 1) die Formel

$$b \geqq \frac{3\pi}{2a^2}\cdot\frac{1}{1-\cos\frac{3\pi}{2a}}+\frac{1}{a},$$

und daraus folgende Tabelle der angenäherten Werthe:

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a =$ | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | 51 | 101 | $\infty$, |
| $b \geqq$ | 0,856 | 0,659 | 0,583 | 0,546 | 0,522 | 0,506 | 0,495 | 0,487 | 0,480 | 0,474 | 0,445 | 0,435 | 0,425. |

## §. 6.

Wir haben im *ersten Falle* den vorwärts und den rückwärts gerichteten Differentialquotienten mit $m$ ins Unendliche wachsend und beide mit demselben Zeichen $-(-1)^{\beta_m}$ behaftet gefunden. Mit wechselndem $m$ ändert im Allgemeinen $\beta_m$ die Eigenschaft, eine gerade oder ungerade Zahl zu sein, und dann ändern beide Differentialquotienten ihr Zeichen. Nur wenn für jedes zulässige $m$, das nicht *jede* ganze Zahl ist, $\beta_m$ jene Eigenschaft nicht ändert, behalten beide Differentialquotienten ihr Zeichen, so dass an einer solchen Stelle der Differentialquotient unendlich mit einem bestimmten Zeichen, also selbst bestimmt ist.

Um nun für $\beta_m$, das durch $0 < a^m x_0 - \beta_m = x'_{m+1} < 1$ gegeben ist, einen Ausdruck zu finden, bildet man für $a^m x_0$ eine Reihe

$$(18.)\qquad a^m x_0 = c_0 a^m + c_1 a^{m-1} + c_2 a^{m-2} + \cdots + c_{m-1} a + c_m + x'_{m+1},$$

wo $c_0$ eine ganze Zahl, jedes der andern $c$ aber eine positive ganze Zahl $< a$ $(0 \leqq c < a)$ bedeutet, indem man die Zahl $a^m x_0$ mit 1 theilt, bis ein positiver Rest $x'_{m+1} < 1$ bleibt, in den Quotienten mit $a$ theilt, bis ein positiver Rest $c_m < a$ bleibt, u. s. w., so folgt

$$\beta_m = c_0 a^m + c_1 a^{m-1} + c_2 a^{m-2} + \cdots + c_m.$$

Da aber $a$ ungerade, so ist $\beta_m$ gerade oder ungerade, je nachdem die Anzahl der ungeraden $c$ gerade oder ungerade; und demgemäss ist auch $-(-1)^{\beta_m}$ negativ oder positiv. Soll nun für jeden der nach der Bedingung $|a^m x_0 - \alpha_m| > \frac{1}{2a}$ zulässigen Werthe des $m$, welche zwischen einschliesslich $m=0$ und $m=m$ liegen, $\beta_m$ gerade bezw. für jeden ungerade sein, so wollen wir die Anzahl der durch die Reihe von $\beta_m$ gegebenen Fälle, in welchen eine dieser Forderungen erfüllt ist, zu der Anzahl aller Fälle, d. h. die verhältnissmässige Anzahl ermitteln. Sind $m_1$ und $m_2$ zwei auf einander folgende der zulässigen Werthe von $m$, und setzt man $m_2 - m_1 = k$, wo $1 \leqq k < \infty$, so ist der mit $m_1+1$ beginnende und mit $m_2$ schliessende Theil der Reihe für $\beta_m$

$$c_{m_1+1} a^{m-m_1-1} + c_{m_1+2} a^{m-m_1-2} + \cdots + c_{m_2} a^{m-m_2}$$
$$= a^{m-m_2}(c_{m_1+1} a^{k-1} + c_{m_1+2} a^{k-2} + \cdots + c_{m_2}) = a^{m-m_2}\beta,$$

wo $\beta$ eine ganze Zahl ist. Wenn $m_1+1 > 0$ ist, so kann jedes der $c$ jeden der $a$ Werthe von 0 bis $a-1$ annehmen, und es können durch die letzte Klammer $a^k$ ganze Zahlen von 0 bis $a^k-1$ ausgedrückt werden, von denen $\frac{1}{2}(a^k+1)$ gerade und $\frac{1}{2}(a^k-1)$ ungerade sind. Die verhältnissmässige Anzahl der Fälle, in welchen $\beta$ gerade oder ungerade ist, wird daher durch $\frac{a^k+1}{2a^k}$ und $\frac{a^k-1}{2a^k}$ ausgedrückt. Wenn dagegen $m_1+1=0$ ist, so kann $c_0$ und damit $\beta$ jede Grösse erreichen, so dass die verhältnissmässige Anzahl der geraden und der ungeraden Zahlen $\beta$ jede $= \frac{1}{2}$ und unabhängig von $k$ ist. Treten in den Grenzen $m=0$ und $m=m$, $l+1$ solcher Gruppen mit $k_0, k_1, \ldots k_l$ Gliedern auf, so ist $m+1 = k_0+k_1+\cdots+k_l$. Soll nun für jedes zulässige $m$, von 0 bis $m$, die Zahl $\beta_m$ seine Eigenschaft als gerade oder ungerade beibehalten, so muss $\beta$ für $k_0$ gerade, bezw. ungerade, jedes andere $\beta$ aber in beiden Fällen gerade sein, so dass die verhältnissmässige Anzahl der Fälle jedesmal ist

$$(19.) \qquad = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{a^{k_1}+1}{2a^{k_1}} \cdot \frac{a^{k_2}+1}{2a^{k_2}} \cdots \frac{a^{k_l}+1}{2a^{k_l}}.$$

Wenn $m$ ohne Ende wächst, wird diese verhältnissmässige Anzahl unendlich klein; die Punkte, deren unendlich grosser Differentialquotient das Zeichen nicht wechselt, sind daher *besondere.*

Im *zweiten Falle* wurden der vorwärts- und der rückwärts gerichtete Differentialquotient mit dem ohne Ende wachsenden $m$ unendlich gross und hatten beide entgegengesetzte Zeichen. Das Zeichen des ersteren war $-(-1)^{\alpha_m}$, das des letzteren $(-1)^{\alpha_m}$, und jedes änderte sich mit $m$ nicht, da, wenn $a^m x_0 = \alpha_m$ eine gerade oder ungerade ganze Zahl ist, es dies auch für jedes grössere $m$ bleibt.

Die Eigenthümlichkeit, dass der vorwärts und der rückwärts gerichtete Differentialquotient unendlich gross mit entgegengesetzten Zeichen sind, ist die einer Spitze mit einer zur $x$-Axe senkrechten Tangente und hat daher nichts Aussergewöhnliches, wenn sich, wie bei der letzten Annahme der Intervalle, diese Punkte als besondere darstellen. Aussergewöhnlich dagegen ist es, wenn sich jeder Punkt der Curve als Spitze darstellt, wie es bei der Wahl der Intervalle des Herrn *Weierstrass* eintritt.

Die Ergebnisse des Herrn *Weierstrass* und die meinigen finden zugleich statt, wenn die Bedingung $ab \geqq \frac{3}{2}\pi + 1 = 5{,}712\ldots$ (§. 3) und diejenige (16.) 1) zugleich erfüllt sind. Es muss dann wegen $b < 1$, $a \geqq 7$ sein; für $a = 7$ oder $= 9$ ist die erste, für $a > 9$ die zweite Bedingung (s. Tab.) massgebend. Sind nun beide Bedingungen erfüllt, so folgt, dass im Allgemeinen ein Punkt ($x_0$) der Function mit zwei unendlich nahen auf derselben Seite liegenden Punkten verbunden werden kann, derart dass die dadurch bestimmten Differentialquotienten unendlich gross sind, aber entgegengesetzte Zeichen haben. Bestimmen $x = x_1$ und $x = x_2$ zwei derart einseitig liegende zu ein und demselben $m$ gehörige Punkte, und sind $y_0$, $y_1$, $y_2$ die bezw. zu $x_0$, $x_1$, $x_2$ gehörigen Functionswerthe, so werden

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}, \quad \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} = \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2},$$

wenn $m$ ohne Ende wächst, zu jenen Differentialquotienten, wobei $\Delta x_1$ und $\Delta x_2$ dasselbe Zeichen haben; es sei aber $|\Delta x_1| < |\Delta x_2|$. Lässt man $x$ stetig von $x_1$ zu $x_2$ übergehen, so wächst $|\Delta x|$ von $|\Delta x_1|$ zu $|\Delta x_2|$, ohne $< |\Delta x_1|$ zu werden, und zugleich geht wegen der Stetigkeit der Function $\Delta y$ mit Durchlaufen aller Zwischenwerthe von $\Delta y_1$ zu $\Delta y_2$ über. Da hierbei das Zeichen von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ wechselt, $\Delta x$ aber sein Zeichen beibehält, so muss $\Delta y$ sein Zeichen

wechseln, und da es ebensowenig wie $y$ unendlich gross werden kann, muss es Null durchlaufen. Dabei durchläuft $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ alle zwischen $\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$ und $\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}$ liegenden Werthe mit dem Durchgang durch Null. Lässt man nun $m$ ohne Ende wachsen, so nimmt der Differentialquotient alle zwischen $+\infty$ und $-\infty$ liegenden, die Null einbegreifenden Werthe an, und wegen des wechselnden $m$ kann dies auf unendlich viele Weisen geschehen. Daher: *Der Differentialquotient der Function besitzt, wenn die Intervalle des $x$ in einem endlichen Verhältnisse zu $\frac{1}{a^m}$ stehen und in einer gewissen Weise gewählt werden* (S. 238, I. u. (5.)), *und wenn $a$ und $b$ gewissen Bedingungen entsprechen* (§. 3 u. (16.) 1)), *an jeder Stelle, für welche nicht $a^m x_0$ eine ganze Zahl ist, zugleich alle Werthe.*

## §. 7.

Bestimmen wir noch unter Annahme eines *wesentlich anderen Intervalles von $x$* den Differentialquotienten der Function und die besonderen Stellen derselben, wo er besondere Werthe annimmt. Sei $m$ eine beliebig angenommene positive ganze Zahl, sei ferner

$$(20.)\qquad y = \sum_0^m {}_n\, b^n \cos a^n x\pi,$$

was mit $m = \infty$ in die Function (1.) übergeht, sei $dx$ ein im Verhältniss zu $\frac{1}{a^m}$ unendlich kleiner Zuwachs von $x$ (nämlich $dx = \frac{\delta}{a^m}$, wo $\delta$ unendlich klein), sei $dy$ der zugehörige Zuwachs von $y$, so ergiebt sich jetzt durch gewöhnliche Differentiation

$$(21.)\qquad \frac{dy}{dx} = -\sum_0^m {}_n (ab)^n \pi \sin a^n x\pi = -\sum_0^{m-1} {}_n (ab)^n \pi \sin a^n x\pi - (ab)^m \pi \sin a^m x\pi.$$

Es ist aber der absolute Werth des ersten Gliedes

$$\leqq \sum_0^{m-1} {}_n (ab)^n \pi < \pi \frac{(ab)^m}{ab-1},$$

vorausgesetzt, dass $ab > 1$.

Ferner giebt es eine ganze Zahl $\beta_m$, für welche

$$(22.)\qquad a^m x - \beta_m = x_{m+1},\quad 0 \leqq x_{m+1} < 1;$$

daher wird

$$\sin a^m x\pi = \sin(\beta_m + x_{m+1})\pi = (-1)^{\beta_m} \sin x_{m+1}\pi,$$

und

$$(23.)\qquad \frac{dy}{dx} = -(-1)^{\beta_m}(ab)^m \pi \left(\sin x_{m+1}\pi + \frac{\varepsilon}{ab-1}\right),$$

wo $\varepsilon$ *zwischen* $-1$ und $+1$ liegt und $\sin x_{m+1}\pi$ nie negativ ist.

Soll $dy:dx = 0$ werden, so muss

$$\sin x_{m+1}\pi = -\frac{\varepsilon}{ab-1}$$

sein, welche Gleichung stets reelle Werthe von $x_{m+1}$ liefert, wenn $ab \geqq 2$, also um so mehr, wenn $ab \geqq \frac{3}{2}\pi+1 = 5{,}712\ldots$ (§. 3), oder wenn (16.) 3) oder (16.) 1) erfüllt ist. Für $a = 7$ oder $= 9$ ist $ab \geqq 5{,}712\ldots$ massgebend, so dass $\sin x_{m+1}\pi < \frac{1}{4{,}712} = 0{,}212$, woraus mit Beachtung von (22.)

$$0 \leqq x_{m+1} \leqq 0{,}068 \quad \text{oder} \quad 0{,}932 \leqq x_{m+1} < 1.$$

Für grössere $a$ wird der Grenzwerth von $\sin x_{m+1}\pi$ kleiner. Ein solcher Grenzwerth von $\sin x_{m+1}\pi$ ist nur von $a$ und $b$, nicht aber von $m$ abhängig; er gilt auch für jedes beliebig grosse $m$.

Giebt man dem Ausdrucke (21.) die Form

$$(24.)\qquad \frac{dy}{dx} = -\sum_0^{m-1}{}_n (ab)^n \pi \sin\frac{\beta_m + x_{m+1}}{a^{m-n}}\pi - (-1)^{\beta_m}(ab)^m \pi \sin x_{m+1}\pi,$$

und setzt $dy:dx = 0$, so erhält man zu einer beliebigen ganzen Zahl $\beta_m$ das zugehörige $x_{m+1}$ und $x = x_0 = \frac{1}{a^m}(\beta_m + x_{m+1})$, wenn man in (24.) zuerst den Summenausdruck bei $x_{m+1} = 0$ berechnet, dazu einen angenäherten Werth von $x_{m+1}$ bestimmt, deren es wegen $0 \leqq x_{m+1} < 1$ zwei oder keinen giebt, einen derselben in den Summenausdruck einsetzt, wodurch sich dessen Werth nur wenig ändert, und so sich dem wahren Werthe von $x_{m+1}$ allmählich nähert. Zu einer Zunahme des $\beta_m$ um 2 gehören im Durchschnitt auch zwei reelle Werthe des $x_0$; ihre Anzahl wächst daher mit $m$. Mit wechselndem $m$ ändern sich im Allgemeinen auch die Werthe von $x_0$.

Soll aber ein $x_0$ bestimmt werden, für welches $dy:dx = 0$ wird bei zwei auf einander folgenden Werthen von $m$, oder in $y = \sum^m$ und in $y = \sum^{m+1}$, so muss sein

$$(25.)\qquad \frac{dy}{dx} = -\sum_0^m{}_n (ab)^n \pi \sin a^n x\pi = 0$$

und

$$\frac{dy}{dx} = -\sum_0^{m+1}{}_n (ab)^n \pi \sin a^n x\pi = -\sum_0^m{}_n (ab)^n \pi \sin a^n x\pi - (ab)^{m+1}\pi \sin a^{m+1} x\pi = 0,$$

woraus $\sin a^{m+1} x\pi = 0$ folgt. Daher muss $a^{m+1}x$ eine ganze Zahl sein, sodass man setzen kann

$$(26.)\qquad a^{m+1}x = a^{m+1}\alpha + \beta,$$

wo $\alpha$ eine ganze Zahl und $\beta$ eine positive ganze Zahl $< a^{m+1}$ $(0 \leqq \beta < a^{m+1})$.

Da nun

$$\sin a^n x\pi = \sin\left(a^n\alpha + \frac{\beta}{a^{m+1-n}}\right)\pi = (-1)^\alpha \sin\frac{\beta}{a^{m+1-n}}\pi,$$

so wird (25.), wenn man den Werth von $x$ aus (26.) einsetzt,

$$(27.)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -(-1)^\alpha\pi\Big(\sin\dfrac{\beta}{a^{m+1}}\pi + ab\sin\dfrac{\beta}{a^m}\pi + (ab)^2\sin\dfrac{\beta}{a^{m-1}}\pi + \cdots \\ \qquad\qquad \cdots + (ab)^m\sin\dfrac{\beta}{a}\pi\Big) = 0. \end{cases}$$

Für ein bestimmtes $\alpha$ und ein bestimmtes $\beta$ bilden die $m$ Wurzeln dieser Gleichung in Bezug auf $b$ diejenigen Werthe von $b$, für welche bei $x = \alpha + \frac{\beta}{a^{m+1}}$, $dy:dx = 0$ ist, sowohl in (20.) $y = \overset{m}{\Sigma}$, wie in $y = \overset{m+1}{\Sigma}$, und dann auch in jeder folgenden Summe, weil dann auch $a^{m+2}x$ u. s. w. ganze Zahlen sind (siehe (26.)), daher auch in unserer Function (1.) $y = \overset{\infty}{\Sigma}$.

Da die Gleichung (27.) bei $\beta = 0$, also bei $x = \alpha$, durch jedes $b$ befriedigt wird, so ergiebt sich, ***dass bei einem im Verhältniss zu $\frac{1}{a^m}$ unendlich kleinen Intervalle des $x$ der Differentialquotient der Function Null wird, wenn $x$ eine ganze Zahl ist, und ausserdem für diejenigen Werthe von $x$, bei welchen für irgend einen Werth von $m$ die $a^{m+1}x$ eine ganze Zahl und die $b$ eine der Wurzeln der Gleichung* (27.) *ist und zugleich der Bedingung $ab \geqq 2$ genügt.***

Soll $dy:dx$ irgend einen ***endlichen Werth*** annehmen, so muss in (23.), da $(ab)^m$ mit unbegrenzt wachsendem $m$ unendlich gross wird, der Werth der Klammer unendlich klein werden. Dies geschieht, wenn sich $x_{m+1}$ gegen den soeben bestimmten Werth um eine unendlich kleine Grösse $dx_{m+1}$ ändert, welche mit $\frac{1}{(ab)^m}$ in einem endlichen Verhältnisse steht, oder mit ihm unendlich klein von der ersten Ordnung ist; es ändert sich dann (22.) $x$ um $dx_{m+1}:a^m$, d. h. um eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung. Innerhalb dieses Intervalles nimmt daher $dy:dx$ jeden beliebigen endlichen Werth an; und die Stelle, wo dies geschieht, ist dieselbe, wie die vorhin für $dy:dx = 0$ durch $\sin x_{m+1}\pi = -\frac{\varepsilon}{ab-1}$ bestimmte.

Ist aber der Unterschied der beiden Glieder der Klammer in (23.) endlich, so wird $dy:dx$ mit dem ohne Ende wachsenden $m$ ***unendlich gross,*** und es wechselt im Allgemeinen dessen Zeichen mit $m$ in unregelmässiger

Weise. Bildet man für $a^m x$ eine Reihe, wie die (18.), und multiplicirt dieselbe durch $a^{n-m}$, so erhält man, wenn $0 \leqq x_{m+1} < 1$,

$$a^n x = c_0 a^n + c_1 a^{n-1} + c_2 a^{n-2} + \cdots + c_n + c_{n+1}\frac{1}{a} + \cdots + c_m \frac{1}{a^{m-n}} + \frac{x_{m+1}}{a^{m-n}} = \beta_n + x_{n+1},$$

wo $c_0 a^n + \cdots + c_n = \beta_n$ eine ganze Zahl und der Rest $x_{n+1} \geqq 0$ aber $< 1$ ist. Setzt man diesen Ausdruck in (21.) ein, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = -\sum_0^m{}_n (ab)^n \pi \sin(\beta_n + x_{n+1})\pi = -\sum_0^m{}_n (ab)^n \pi (-1)^{\beta_n} \sin x_{n+1}\pi.$$

Da $\sin x_{n+1}$ nie negativ, so ist das Zeichen eines Gliedes, wenn es nicht Null wird, positiv oder negativ, je nachdem $\beta_n$ ungerade oder gerade, also je nachdem in der Reihe $c_0 c_1 \ldots c_n$ die Anzahl der ungeraden Zahlen ungerade oder gerade ist. Sollen alle Glieder der Summe positiv oder alle negativ, und daher auch $dy:dx$ positiv oder negativ sein, so muss $c_0$ ungerade bezw. gerade, alle übrigen $c$ aber in beiden Fällen gerade sein. Gilt dies für jedes $m$, so besitzt $dy:dx$ bei wechselndem $m$ ein unveränderliches Zeichen und wird mit dem ohne Ende wachsenden $m$ entweder $+\infty$ oder $-\infty$.

Die verhältnissmässige Anzahl der Fälle, in welchen dies geschieht, erhält man nach (19.), indem man $k_0 = k_1 = \cdots = k_l = 1$ und $l = m$ setzt,

$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{a+1}{2a}\right)^m,$$

welches mit dem ohne Ende wachsenden $m$ unendlich klein wird.

*Es ergiebt sich daher, dass der Differentialquotient der Function* (1.), *wenn man das Intervall des $x$ unendlich klein im Verhältniss zu $\frac{1}{a^m}$ macht, und wenn $ab \geqq 2$, im Allgemeinen unendlich gross mit unbestimmtem Zeichen, für besondere Stellen, für welche nämlich alle $c$, abgesehen von $c_0$, gerade Zahlen sind, unendlich gross mit bestimmtem Zeichen ist, und für andere besondere Stellen, worunter die, für welche $x$ eine ganze Zahl, stets auftreten, jeden Werth besitzt.*

Die früher angenommenen Intervalle von $x$ waren im Verhältniss zu $\frac{1}{a^m}$ endlich, die letzteren unendlich klein; die ersteren wurden daher mit dem ohne Ende wachsenden $m$ unendlich klein von der ersten Ordnung, die letzteren unendlich klein von der zweiten Ordnung. Während der zu den ersteren Intervallen gehörige Differentialquotient im Allgemeinen vollständig unbestimmt ist und nur an besonderen Stellen, den s. g. Scheiteln,

den bestimmten Werth „unendlich gross" hat, welcher für den vorwärts und den rückwärts gerichteten Zuwachs des $x$ bestimmte aber entgegengesetzte Zeichen besitzt, so hat umgekehrt bei den letzteren Intervallen der Differentialquotient im Allgemeinen den Werth unendlich gross, dessen Zeichen im Allgemeinen unbestimmt und nur für besondere Stellen bestimmt ist, dagegen an anderen besonderen Stellen einen vollständig unbestimmten Werth, wie bei der Spitze einer Curve.

*Geometrisch genommen*, dürfte man von den durch den Differentialquotienten bestimmten Geraden nur den letzteren den Namen von *Tangenten* beilegen, sowohl weil sie, verglichen mit den ersteren, in innigerer Berührung stehen, indem sie zwei Punkte der Curve verbinden, deren Abstand unendlich klein von der zweiten Ordnung ist, als auch weil sie allein die sonst den Tangenten zukommende Eigenthümlichkeit besitzen, dass ihre Lage nicht geändert wird, wenn man den zweiten Punkt, welchen die Tangente ausser dem Berührungspunkte mit der Curve gemein hat, durch einen zwischen beiden Punkten liegenden Punkt der Curve ersetzt.

Karlsruhe, den 31. Mai 1880.

---

# Distortion of an elastic sphere.

(By *Thomas Craig* at Washington.)

The problems of the distortion and vibrations of an elastic sphere have received considerable attention from mathematicians *). The particular problem of which a solution is here attempted differs however from those proposed by the investigators mentioned below, as the force producing deformation is differently applied. The problem was suggested by a consideration of the geologists' problem of the effect of ice caps at the poles of the earth. So far as I am aware, the geologist concerns himself only with the effect of such caps upon the sea level, and ignores the change produced in the solid nucleus by the pressure of these enormous polar caps. A perfect solution of the problem however should certainly take account of this deformation. Practically the caps would be in shape somewhat like a segment of a hollow shell, but I have here assumed them as flat and having contact with the spherical nucleus only at the poles, i. e. the extremities of a diameter. I have also disregarded the effect of the fluid which elsewhere covers the nucleus, a supposition which is probably sufficiently exact as the weight of an ocean of uniform depth covering the solid sphere would have no effect in changing its form. It is further assumed that the shortening of the polar diameter is very slight, and that the longitude of a particle is unaltered by the deformation.

Denoting by $u$, $v$ and $w$ the component displacements of a particle in the direction of the rectangular axes of $x$, $y$ and $z$ having their origin at the center of the sphere, we have for the equations of motion (vide

*) *Lamé,* Théorie de l'élasticité.
*Clebsch,* Theorie der Elasticität.
*Henneberg,* Annali di Matematica.
*Jaerisch,* This Journal, Vol. 88.
*Pearson,* Quart. Journ. of Mathematics 1879.
*Hansen,* Phil. Trans. 1863.

*Riemann*'s Partielle Differentialgleichungen, page 241)

$$\varrho\left(\frac{d^2u}{dt^2}-X'\right)=(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dx}+\mu\nabla^2 u,$$
$$\varrho\left(\frac{d^2v}{dt^2}-Y'\right)=(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dy}+\mu\nabla^2 v,$$
$$\varrho\left(\frac{d^2w}{dt^2}-Z'\right)=(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dz}+\mu\nabla^2 w,$$

where

$$\theta=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\cdot$$

For equilibrium we have

$$(1.)\quad\begin{cases}(\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dx}+\mu\nabla^2 u=0,\\(\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dy}+\mu\nabla^2 v=0,\\(\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dz}+\mu\nabla^2 w=0;\end{cases}$$

and for the conditions at the surface

$$(2.)\quad\begin{cases}\alpha X_x+\beta X_y+\gamma X_z+\Xi=0,\\\alpha Y_x+\beta Y_y+\gamma Y_z+H=0,\\\alpha Z_x+\beta Z_y+\gamma Z_z+Z=0,\end{cases}$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ being the direction-cosines of the normal to the surface, $\Xi$, $H$, $Z$ the components of the surface forces, and the remaining quantities being given by

$$(3.)\quad\begin{cases}X_x=\lambda\theta+2\mu\dfrac{du}{dx}, & Y_z=Z_y=\mu\left(\dfrac{dv}{dz}+\dfrac{dw}{dy}\right),\\Y_y=\lambda\theta+2\mu\dfrac{dv}{dy}, & Z_x=X_z=\mu\left(\dfrac{dw}{dx}+\dfrac{du}{dz}\right),\\Z_z=\lambda\theta+2\mu\dfrac{dw}{dz}, & X_y=Y_x=\mu\left(\dfrac{du}{dy}+\dfrac{dv}{dx}\right),\end{cases}$$

We have also, if $P$ denote the total pressure on any element,

$$(4.)\quad\begin{cases}\Xi=\alpha P,\\H=\beta P,\\Z=\gamma P.\end{cases}$$

Equations (2.) can now be thrown into the form

$$0=\alpha\left(P+\lambda\theta+2\mu\frac{du}{dx}\right)+\beta\mu\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)+\gamma\mu\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right),$$
$$0=\beta\left(P+\lambda\theta+2\mu\frac{dv}{dy}\right)+\gamma\mu\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)+\alpha\mu\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right),$$
$$0=\gamma\left(P+\lambda\theta+2\mu\frac{dw}{dz}\right)+\alpha\mu\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right)+\beta\mu\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right);$$

multiplying through by

$$\gamma = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$$

and writing $\mu^{-1}(P+\lambda\theta) = -2Q$, these become again

$$(5.)\quad \begin{cases} 2x\left[Q-\dfrac{du}{dx}\right] = y\left(\dfrac{du}{dy}+\dfrac{dv}{dx}\right)+z\left(\dfrac{dw}{dx}+\dfrac{du}{dz}\right), \\ 2y\left[Q-\dfrac{dv}{dy}\right] = z\left(\dfrac{dv}{dz}+\dfrac{dw}{dy}\right)+x\left(\dfrac{du}{dy}+\dfrac{dv}{dx}\right), \\ 2z\left[Q-\dfrac{dw}{dz}\right] = x\left(\dfrac{dw}{dx}+\dfrac{du}{dz}\right)+y\left(\dfrac{dv}{dz}+\dfrac{dw}{dy}\right). \end{cases}$$

We have assumed that the difference in length of the initial and final polar diameter is a very small quantity which we shall now denote by $2\varepsilon$. Call $a$ the radius of the sphere, then the polar axis after deformation will be

$$= 2(a-\varepsilon).$$

Take the polar axis as the axis of $z$, then denoting by $s$ the distance from the foot of the $z$ ordinate of any particle to the origin of coordinates, we can write

$$x = s\cos\varphi,\quad y = s\sin\varphi,\quad z$$

for the coordinates of the particle. Similarly for the displacements of the particle

$$u = \sigma\cos\varphi,\quad v = \sigma\sin\varphi,\quad w,$$

$s$, $z$, $\sigma$ and $w$ being independent of $\varphi$. The quantities $u$, $v$, $w$ and $\theta$ can be written as

$$\begin{aligned} u &= u_1+u_2+\cdots+u_i+\cdots \\ v &= v_1+v_2+\cdots+v_i+\cdots \\ w &= w_1+w_2+\cdots+w_i+\cdots \\ \theta &= \theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_i+\cdots \end{aligned}$$

Sir *W. Thomson* has solved a problem of much greater generality and difficulty than the one here proposed, viz. to find the displacements produced by a given distribution of force over the entire surface of the sphere, and from his expressions for the displacements I am led to assume for $u_i$, $v_i$ and $w_i$ the following expressions

$$\begin{aligned} u_i &= A_i\frac{d\psi_i}{dx}+B_i r^2\frac{d\psi_{i-2}}{dx}, \\ v_i &= A_i\frac{d\psi_i}{dy}+B_i r^2\frac{d\psi_{i-2}}{dy}, \\ w_i &= C_i\frac{d\psi_i}{dz}+B_i r^2\frac{d\psi_{i-2}}{dz}, \end{aligned}$$

where $\psi_i$ is a rational integral and homogeneous function of $x, y, z$ of the degree $i$ and satisfying the equations

$$\nabla^2 \psi_i = 0, \quad \frac{d\psi_i}{dz} = i\psi_{i-1},$$

$$x\frac{d\psi_i}{dx} + y\frac{d\psi_i}{dy} + z\frac{d\psi_i}{dz} = i\psi_i.$$

The preceding equations then give for $\theta_i$ the value

$$\theta_i = \{(C_i - A_i)\,i\,(i-1) + 2\,(i-2)\,B_i\}\,\psi_{i-2}$$

or simply

$$\theta_i = \{i\,(i-1)\,G_i + 2\,(i-2)\,B_i\}\,\psi_{i-2}.$$

The functions $\psi$ are zonal solid harmonics and we can substitute for them the values given by

$$\psi_i = r^i S_i(n)$$

where

$$n = \cos\chi \quad \text{and} \quad \chi = \cos^{-1}\frac{z}{r},$$

the functions $\varphi$ being then zonal surface harmonics. As reversing the direction of the axes will change the signs of $u, v, w$ as also of $x, y, z$, the signs of the differential coefficients

$$\frac{du}{dx}, \quad \frac{dv}{dy}, \quad \frac{dw}{dz},$$

and consequently of $\theta$, will remain unchanged, it is obvious that the harmonics are of even degrees. Further more for $i = 0$ we should have at the center of the sphere an infinitely great value of $\theta_0$ which of course cannot be admitted, and so the least value that we can have for $i$ is

$$i = 2.$$

We have then

$$\theta_2 = 2G_2.$$

For each of equations (1.) we can now substitute a group of $\frac{1}{2}i$ equations, in the general one of which substituting the above values of $u_i$, $v_i$, $w_i$ and $\theta_i$, we find readily

$$-i(i-1)\,G_i = \left\{2\,(3i-5) - \frac{(2i-3)\lambda}{\lambda+\mu}\right\}B_i$$

from which

$$G_i = -\frac{(4i-7)\lambda + 2(3i-5)\mu}{i(i-1)(\lambda+\mu)}\,B_i.$$

Since $u^2 + v^2 = \sigma^2$ and

$$\frac{u}{\sigma}\frac{d\psi}{dx} + \frac{v}{\sigma}\frac{d\psi}{dy} = \frac{d\psi}{d\sigma},$$

we can replace $u$ and $v$ by $\sigma$ and have then for the displacements

$$\sigma = \Sigma\left[A_i \frac{d\psi_i}{ds} + B_i r^2 \frac{d\psi_{i-2}}{ds}\right]$$

$$w = \Sigma\left[(A_i + G_i)\frac{d\psi_i}{dz} + B_i r^2 \frac{d\psi_{i-2}}{dz}\right],$$

$A_{2j+1} = B_{2j+1} = C_{2j+1} = 0$, $j$ being any positive integer. Resuming now equations (5.) and substituting in them the values of $x$, $y$, $u$, $v$, i. e.

$$s\cos\varphi,\quad s\sin\varphi,\quad \sigma\cos\varphi,\quad \sigma\sin\varphi$$

we obtain

$$2sQ = \frac{2(s\,d\sigma + z\,dw)}{ds} + z\left(\frac{d\sigma}{dz} - \frac{dw}{ds}\right)$$

$$2zQ = \frac{2(s\,d\sigma + z\,dw)}{dz} - s\left(\frac{d\sigma}{dz} - \frac{dw}{ds}\right).$$

Multiply the first of these by $s$ and the second by $z$ and add; then multiply the first by $z$ and the second by $s$ and subtract; we have as the result of these operations

$$(6.)\qquad \begin{cases} r^2 Q = s\left(s\frac{d\sigma}{ds} + z\frac{d\sigma}{dz}\right) + z\left(s\frac{dw}{ds} + z\frac{dw}{dz}\right), \\ 0 = 2sz\left(\frac{d\sigma}{ds} - \frac{dw}{dz}\right) + (z^2 - s^2)\left(\frac{d\sigma}{dz} + \frac{dw}{ds}\right). \end{cases}$$

Take up the second of these equations: this can be written in the form

$$2r\left(z\frac{d\sigma}{dr} - s\frac{dw}{dr}\right) + r^2\left(\frac{dw}{ds} - \frac{d\sigma}{dz}\right) = 0.$$

Substituting in this the above values of $\sigma$ and $w$ we obtain

$$\begin{aligned} 2r\Big\{z\Big[A_i \frac{d^2\psi_i}{dr\,ds} + B_i r^2 \frac{d^2\psi_{i-2}}{dr\,ds} + 2B_i r \frac{d\psi_{i-2}}{ds}\Big] \\ - s\Big[(A_i - G_i)\frac{d^2\psi_i}{dr\,dz} + B_i r^2 \frac{d^2\psi_{i-2}}{dr\,dz} + 2B_i r \frac{d\psi_{i-2}}{dz}\Big]\Big\} \\ + r^2\Big\{\Big[(A_i - G_i)\frac{d^2\psi_i}{dz\,ds} + B_i r^2 \frac{d^2\psi_{i-2}}{dz\,ds} + 2B_i s \frac{d\psi_{i-2}}{dz}\Big] \\ - \Big[A_i \frac{d^2\psi_i}{dz\,ds} + B_i r^2 \frac{d^2\psi_{i-2}}{dz\,ds} + 2B_i z \frac{d\psi_{i-2}}{ds}\Big]\Big\} = 0. \end{aligned}$$

Collecting the terms containing $A_i$ as a factor gives

$$A_i r\left\{2\left(z\frac{d^2\psi_i}{dr\,ds} - s\frac{d^2\psi_i}{dr\,dz}\right)\right\};$$

since

$$\psi_i = r^i S_i$$

and

$$\frac{d\psi_i}{dz} = ir^{i-1} S_{i-1},$$

this becomes

$$A_i r^{i-1}.s.i(i-1)\{2[\mu S_i - S_{i-1}]\}$$

where $\mu = \frac{z}{r}$; but

$$\mu S_i - S_{i-1} = \frac{i+1}{2i+1}(S_{i+1} - S_{i-1})$$

and we have finally for this term

$$(i-1) A_i s r^{i-1}\left\{2i \frac{i+1}{2i+1}(S_{i+1} - S_{i-1})\right\}.$$

Similarly collecting all the terms which contain $B_i$ as a factor we have

$$(i-1) 2(i-2) B_i s r^{i-1}\left\{\frac{i-2}{2i-3}(S_{i-1} - S_{i-3})\right\}.$$

A similar reduction for the case of term involving $G_i$ enables us after some simple reductions to write this equation finally in the form

$$(7.) \quad \begin{cases} 0 = \sum_2^\infty (i-1)\left\{2i \frac{i+1}{2i+1}\left(A_i + \frac{iG_i}{2i-1}\right)(S_{i+1} - S_{i-1}) \right. \\ \left. \quad - \frac{i-2}{2i-3}\left(2(i-2) B_i + \frac{iG_i}{2i-1}\right)(S_{i-1} - S_{i-3})\right\} a^i \end{cases}$$

in which $r$ has been made equal to $a$.

The first of equations (6.) becomes by a like process of reduction

$$(8.) \quad Q = \sum_2^\infty (i-1)\left\{i\left[A_i S_i + G_i \frac{z}{a} S_{i-1}\right] + (i-2) B_i S_{i-2}\right\} a^{i-2}.$$

Before proceeding to the solution of (7.) we may take up again for a moment the value of $\theta_i$; we had for this

$$\theta_i = \{i(i-1) G_i + 2(i-2) B_i\} \psi_{i-2};$$

but

$$i(i-1) G_i = -\left\{2(3i-5) - \frac{2(2i-3)\lambda}{\lambda+\mu}\right\} B_i.$$

(It is convenient here to use the ratio $\frac{\lambda}{\mu}$ instead of $\lambda$ and $\mu$ and to write

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{\omega-2}.)$$

We have now

$$\theta_i = 2(2i-3)\frac{\omega-2}{\omega}B_i\psi_{i-2}$$

or using surface harmonics

$$\theta_i = 2(2i-3)\frac{\omega-2}{\omega}B_i r^{i-2}S_{i-2}.$$

For $i = 2$, $S_{i-2} = 1$, and since we have

$$\theta_2 = 2G_2,$$

we can write $\theta$ finally in the form

$$\theta = 2G_2 + 2\frac{\omega-2}{\omega}\sum_4^\infty (2i-3)B_i r^{i-2}S_{i-2}.$$

Resume now equation (7.)

$$\sum_2^\infty (i-1)\Big\{2i\frac{i+1}{2i+1}\Big(A_i+\frac{iG_i}{2i-1}\Big)(S_{i+1}-S_{i-1})$$
$$+\frac{i-2}{2i-3}\Big(2(i-2)B_i-\frac{iG_i}{2i-1}\Big)(S_{i-1}-S_{i-3})\Big\}a^i = 0;$$

or

$$\sum_2^\infty (i-1)\Big\{2i\frac{i+1}{2i+1}\alpha_i(S_{i+1}-S_{i-1})+\frac{i-2}{2i-3}\beta_i(S_{i-1}-S_{i-3})\Big\}a^i = 0$$

where for brevity we have written

$$\alpha_i = A+\frac{iG_i}{2i-1},$$
$$\beta_i = 2(i-2)B_i-\frac{iG_i}{2i-1}.$$

The second term on the left hand side of the equation vanishes for $i = 2$ and therefore need not be taken into account in finding the conditions for which the series vanishes. The relation sought between the constants exists then between $\alpha_i$ and $\beta_{i+2}$ and is obviously

$$\beta_{i+2} = 2(i+1)\frac{\alpha_i}{a^2}.$$

We can now obtain the values of all of the constants in terms of $B_2$, $B_4$, $B_6\cdots$ and $G_2$. To this end we have the equations

$$G_i = -\frac{2}{i}\frac{(3i-5)-\frac{2}{\omega}(2i-3)}{(i-1)}B_i,$$
$$\alpha_i = A_i+\frac{iG_i}{2i-1},$$
$$\beta_i = 2(i-2)B_i+\frac{iG_i}{2i-1},$$
$$\beta_{i+2} = 2(i+1)\frac{\alpha_i}{a^2}.$$

The first of these may be written in the form

$$G_i = -2\frac{2i-1}{i}\left\{\frac{(i-1)(2i-1)-2(i^2-3i+3)+\frac{2}{\omega}(2i-3)}{(i-1)(2i-1)}\right\}B_i$$

or

$$G_i = -2\frac{2i-1}{i}\left\{1-\frac{2\left[i^2-3i+3+\frac{1}{\omega}(2i-3)\right]}{(i-1)(2i-1)}\right\}B_i;$$

writing for brevity

$$\Omega_i = \frac{(i^2-3i+3)+\frac{1}{\omega}(2i-3)}{(i-1)(2i-1)}$$

we have

$$G_i = -2\frac{2i-1}{i}(1-2\Omega_i)B_i.$$

The values of $\alpha_i$ and $\beta_i$ can now be immediately written down, they are

$$\beta_i = 2(i-3+2\Omega_i)B_i,$$

$$\alpha_i = \left(1+\frac{2\Omega_{i+2}}{i-1}\right)B_{i+2}a^2;$$

finally

$$A_i = \alpha_i-\frac{iG_i}{2i-1}$$

$$= \left(1+\frac{2\Omega_{i+2}}{i-1}\right)B_{i+2}a^2+2(1-2\Omega_i)B_i.$$

In all of these formulae $i$ is even and greater than 2.

We may proceed now to examine the particular conditions to be fulfilled at the poles. The normal strain all over the free surface of the sphere is equal to zero except in the two small areas of contact, or

$$2\frac{\mu}{\lambda}Q+\theta = 0$$

except round the poles. The normal pressure on unity of surface is

$$\frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\left\{Q+\frac{\lambda}{2\mu}\theta\right\}E$$

where $E$ is a coefficient of elasticity, or adopting the notation heretofore employed

$$\frac{\omega}{\omega+1}\left\{Q+\frac{\theta}{\omega-2}\right\}E$$

(vide *Stokes* on the Theory of Elastic Solids Cambr. Phil. Trans.). The value of the quantity

$$Q+\frac{\theta}{\omega-2}$$

has to be determined. For brevity write

$$Q+\frac{\theta}{\omega-2} = T.$$

Substituting the values of $Q$ and $\theta$ already found and introducing the abbreviations $\alpha_i$ and $\beta_i$, we have readily

$$T = \frac{\omega G_2}{\omega-2}+B_2+\sum_2^\infty a^{i-2}\Big\{i(i-1)\alpha_i S_i+\Big[\frac{i}{2}\,\frac{1-i}{2i-1}G_i+(i^2-6i+7)B_i\Big]S_{i-2}\Big\}.$$

In the term

$$\Big[\frac{i}{2}\,\frac{1-i}{2i-1}G_i+(i^2-6i+7)B_i\Big]S_{i-2}$$

make $i=2$, and it becomes

$$-\tfrac{1}{3}G_2-B_2 \quad \text{since} \quad S_0 = 1;$$

we can consequently place $T$ in the form

$$T = \tfrac{2}{3}\frac{\omega+1}{\omega-2}G_2+\sum_2^\infty\Big\{\frac{i(i-1)}{a^2}\alpha_i+\frac{i+2}{2}\cdot\frac{i+1}{2i+3}G_{i+2}+(i^2-2i-1)B_{i+2}\Big\}a^i S_i$$

and finally

$$T = \tfrac{2}{3}\frac{\omega+1}{\omega-2}G_2+2\sum_2^\infty(2i+1)\Omega_{i+2}a^i B_{i+2}S_i.$$

Multiply this through by $S_i$ and integrate with respect to $n$ from $-1$ to $+1$, $n$ for the free surface being equal to $\frac{z}{a}$; we have then

$$\int_{-1}^{1}TS_i dn = \tfrac{2}{3}\frac{\omega+1}{\omega-2}G_2\int_{-1}^{1}S_i dn+2\Sigma(2i+1)\Omega_{i+2}a^i B_{i+2}\int_{-1}^{1}S_i^2 dn;$$

from the theory of spherical harmonics we know that

$$\int_{-1}^{1}S_i S_j dn = 0,\quad \int_{-1}^{1}S_i dn = 0,\quad \int_{-1}^{1}S_i^2 dn = \frac{2}{2i+1};$$

therefore

$$\int_{-1}^{1}TS_i dn = 4B_{i+2}\Omega_{i+2}a^i$$

and consequently

$$B_{i+2} = \frac{1}{4\Omega_{i+2}a^i}\int_{-1}^{1}TS_i dn.$$

Denote the value which $n$ possesses all around the periphery of the small polar areas of contact by $\nu$, then for all points of the surface between $n=\nu$ and $n=-\nu$ we must have $T=0$; this gives

$$\int_{-1}^{1}TS_i dn = \int_{-1}^{-\nu}TS_i dn+\int_{\nu}^{1}TS_i dn = 2\int_{\nu}^{1}TS_i dn,$$

and consequently

$$B_{i+2} = \frac{1}{2\Omega_{i+2}a^i}\int_\nu^1 TS_i\,dn$$

and also

$$G_2 = \tfrac{3}{2}\cdot\frac{\omega-2}{\omega+1}\int_\nu^1 T\,dn.$$

Since $T$ vanishes for $n=\nu$ it must have within the limits of the integration the value

$$K(n-\nu)$$

where $K$ is a constant.

From the theory of spherical harmonics we have the formula

$$\int_n^1 S_i\,dn = \frac{1}{i+1}(S_i n - S_{i-1})$$

or

$$(i+1)S_i\,dn = S_i n - S_{i-1},$$

according to this

$$(i+1)\int TS_i\,dn + K\int(S_i n - S_{i-1})\,dt = T(S_i n - S_{i-1})$$

or

$$[T(S_i n - S_{i-1})]_\nu^1 = (i+2)\int_\nu^1 TS_i\,dn + K\int_\nu^1(\nu S_i - S_{i-1})\,dn$$

since

$$Kn = T + K\nu.$$

$T=0$ for $n=\nu$; $S_i = S_{i-1}$ for $n=1$; therefore the quantity on the left hand side of this equation is equal to zero and then results

$$(i+2)\int_\nu^1 TS_i\,dn = -K\int_\nu^1(\nu S_i - S_{i-1})\,dn.$$

By the preceding formula

$$\int_n^1 \nu S_i\,dn = \frac{\nu}{i+1}(nS_i - S_{i-1})$$

$$\int_n^1 S_{i-1}\,dn = \frac{1}{i}(nS_{i-1} - S_{i-2});$$

denoting then by $P_i$ the value of $S_i$ for $n=\nu$ we have

$$A.)\quad (i+2)\int_\nu^1 TS_i\,dn = -K\left\{\frac{\nu}{i+1}(\nu P_i - P_{i-1}) + \frac{1}{i}(\nu P_{i-1} - P_{i-2})\right\}$$

or

$$(i+2)\int_\nu^1 TS_i\,dn = -K\left\{\frac{\nu}{2i+1}(P_{i+1} - P_{i-1}) + \frac{1}{2i-1}(P_i - P_{i-2})\right\}.$$

Since

$$\nu P_i = \frac{1}{2i+1}((i+1)P_{i+1}+iP_{i-1})$$

this last can be written in the form

$$(i+2)\int_\nu^1 TS_i\,dn = -K\left\{\frac{1}{2i+1}\left[\frac{i+2}{2i+3}P_{i+2}+\frac{4i-1}{(2i-1)(2i+3)}P_i-\frac{i-1}{2i-1}P_{i-2}\right]\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2i-1}[P_i-P_{i-2}]\right\},$$

and this can be again reduced to a still simpler form by means of the known relations between three consecutive zonal spherical harmonics, but it is simpler to take equation $A$.) and eliminate $\nu$ by means of the formula

$$iP_i = (2i-1)\nu P_{i-1}-(i-1)P_{i-2};$$

this gives after the necessary reductions

$$-\frac{(i+2)}{K}\int_\nu^1 TS_i\,dn = \frac{(2i-1)P_{i+2}-2(2i+1)P_i+(2i+3)P_{i-2}}{(2i-1)(2i+1)(2i+3)};$$

for brevity denote this by $J_{i+2}$, then

$$J_i = \frac{(2i-5)P_i-2(2i-3)P_{i-2}+(2i-1)P_{i-4}}{(2i-1)(2i-3)(2i-5)}.$$

We have already found

$$B_i = \frac{1}{2\Omega_i a^{i-2}}\int_\nu^1 TS_{i-2}\,dn,$$

this is now

$$B_i = \frac{KJ_i}{\Omega_i a^{i-2}}.$$

The constant $K$ remains to be determined. At the north (or positive) pole we must have

$$w = -\varepsilon$$

since for the areas of contact

$$z+w = \pm(a-\varepsilon).$$

At the pole we have $\nu=1$ and by the known properties of the functions $S$

$$S_i = S_{i-1} = \cdots = 1.$$

The value for $w$ has been already found to be

$$w = \sum_2^\infty\left[(A_i+G_i)\frac{d\psi_i}{dz}+B_i r^2\frac{d\psi_{i-2}}{dz}\right];$$

since $\psi_i = r^i S_i$ and

$$\frac{d\psi_i}{dz} = i\psi_{i-1}$$

this becomes

$$w = \sum_2^\infty [i(A_i+G_i)S_{i-1}+B_i(i-2)S_{i-3}]r^{i-1}$$

and at the pole

$$-\varepsilon = \sum_2^\infty [i(A_i+G_i)+(i-2)B_i]a^{i-1}$$

or

$$-\varepsilon = 2(A_2+G_2)a+\sum_4^\infty [i(A_i+G_i)+(i-2)B_i]a^{i-1}.$$

In order to reduce this finally it is necessary to observe that

$$G_2 = \tfrac{3}{4}\frac{\omega-2}{\omega+1}\int_\nu^1 T\,dt$$

and

$$\int_\nu^1 T\,dt = \tfrac{1}{2}K(1-\nu)^2,$$

therefore

$$G_2 = \tfrac{3}{8}\frac{\omega-2}{\omega+1}K(1-\nu)^2.$$

Again from the formula

$$G_i = -\frac{2}{i}\,\frac{(3i-5)-\frac{2}{\omega}(2i-3)}{i-1}B_i$$

we have

$$B_2 = -\frac{\omega}{\omega-2}G_2;$$

and from

$$A_i = 2(1-2\Omega_i)B_i+\left(1+\frac{2\Omega_{i+2}}{i-1}\right)B_{i+2}a^2$$

we have

$$A_2 = 2\left(1-\tfrac{2}{3}\frac{\omega+1}{\omega}\right)B_2+(1+2\Omega_4)B_4a^2$$

and then

$$A_2 = -\tfrac{2}{3}G_2+(1+2\Omega_4)B_4a^2.$$

Collecting all of these results and we are enabled to write the value of $\varepsilon$ in the form

$$-\varepsilon = \tfrac{1}{2}\frac{\omega-2}{\omega+1}Ka(1-\nu)^2+2Ka\sum_4^\infty\left\{\frac{(i-1)}{\Omega_i}-\frac{i(2i-9)+8}{i-3}\right\}J_i.$$

The quantity $\nu$ differs from unity only by a quantity of the first order, therefore the term in $(1-\nu)^2$ is of the second order and may be disregarded. For brevity write

$$\Theta_i^{-1} = -\sum_4^\infty \left\{ \frac{i-1}{\Omega_i} - \frac{i(2i-9)+8}{i-3} \right\} J_i,$$

then

$$K = \frac{\varepsilon\Theta}{2a}.$$

The last value found for $B_i$ was

$$B_i = \frac{KJ_i}{\Omega_i a^{i-2}},$$

this becomes now

$$B_i = \frac{\varepsilon J_i \Theta_i}{2\Omega_i a^{i-1}};$$

substituting this value of $B_i$ in the equations giving $A_i$ and $G_i$, and we have

$$A_i = \frac{\varepsilon\Theta_i}{a^{i-1}} \left\{ (\Omega_i - 2) J_i + \left[ \frac{2}{i-1} + \Omega_{i+2} \right] J_{i+2} \right\},$$

$$G_i = -\frac{\varepsilon\Theta_i}{a^{i-1}} \left\{ \frac{2i-1}{i} [\Omega_i - 2] J_i \right\}.$$

For the case of $i = 2$ then results

$$A_2 = \tfrac{1}{4} \frac{\omega-2}{\omega+1} \cdot \varepsilon (1-\nu)^2 \frac{\Theta_2}{a} + \frac{\varepsilon\Theta_4}{a} (\Omega_4 + 2) J_4,$$

$$G_2 = \tfrac{3}{8} \frac{\omega-2}{\omega+1} \cdot \varepsilon (1-\nu)^2 \frac{\Theta_2}{a};$$

$G_2$ is thus seen to be of the third order of magnitude. The constant $G_i$ was defined as equal to

$$C_i - A_i$$

and therefore

$$C_i = A_i + G_i = \frac{\varepsilon\Theta_i}{a^{i-1}} \left\{ \left[ \frac{2}{i-1} + \Omega_{i+2} \right] J_{i+2} - \frac{i-1}{2i-1} (\Omega_i - 2) J_i \right\}.$$

In the expressions for the displacements $\sigma$ and $w$ substituting for the solid spherical harmonic functions $\psi_i$ and $\psi_{i-2}$ their values $r^i S_i$ and $r^{i-2} S_{i-2}$, these are

$$\sigma = \sum_2^\infty r^{i-2} s \left\{ i A_i S_i + (i-2) B_i S_{i-2} \right\},$$

$$w = \sum_2^\infty r^{i-1} \left\{ i C_i S_{i-1} + (i-2) B_i S_{i-3} \right\};$$

substituting now the values of the constants $A_i$, $B_i$, $C_i$ we have

$$\sigma = a\varepsilon \sum_2^\infty s \left( \frac{r}{a} \right)^{i-2} \Theta_i \left\{ i \left[ (\Omega_i - 2) J_i + \left( \frac{2}{i-1} + \Omega_{i+2} \right) J_{i+2} \right] S_i + \frac{i-2}{2} \frac{J_i}{\Omega_i} S_{i-2} \right\}$$

$$w = \varepsilon \sum_2^\infty \left( \frac{r}{a} \right)^{i-1} \Theta_i \left\{ i \left[ \left( \frac{2}{i-1} + \Omega_{i+2} \right) J_{i+2} - \frac{i-1}{2i-1} (\Omega_i - 2) J_i \right] S_{i-1} + \frac{i-2}{2} \frac{J_i}{\Omega_i} S_{i-3} \right\}$$

and also

$$\theta = \frac{3\varepsilon}{4a}\cdot\frac{\omega-2}{\omega+1}\cdot\Theta_2(1-\nu)^2+a\varepsilon\frac{\omega-2}{\omega}\sum_4^\infty(2i-3)\left(\frac{r}{a}\right)^{i-2}\frac{J_i}{\Omega_i}\Theta_i S_{i-2}.$$

For the determination of $\nu$, or the value of $\frac{z}{a}$ at the periphery of the area of contact, it is necessary to make $w=-\varepsilon$ and also in the functions $S$ make $n=\nu$; we have then for the determination of $\nu$ the equation

$$1 = -\Sigma\Theta_i\left\{i\left[\left(\frac{2}{i-1}+\Omega_{i+2}\right)J_{i+2}-\frac{i-1}{2i-1}(\Omega_i-2)J_i\right]P_{i-1}+\frac{i-2}{2}\frac{J_i}{\Omega_i}P_{i-3}\right\};$$

the functions $P_{i-1}$, $P_{i-3}$ are rational integral functions of $\nu$ of the degrees $i-1$ and $i-3$ and so a general algebraic solution cannot be given; but since $\nu=$ cosine of the angle which a radius vector to the periphery of the area of contact makes with the axis of $z$, we have $a\nu$ as the projection of this radius vector on $z$ and

$$a(1-\nu)$$

will only differ from $\varepsilon$ by a quantity of the second order, therefore for $\nu$ we have approximately

$$\nu = \frac{a-\varepsilon}{a}.$$

The problem of the vibrations of the sphere on supposing the deforming forces removed would probably prove interesting though I have made no attempt to solve it. Sir *William Thomson*'s solution of the problem of the time of vibration of a sphere which has been deformed according to a spherical harmonic of the order $i$ may possibly indicate the method to be pursued in obtaining the required solution.

Washington, May 29, 1880.

---

# Ueber algebraisch-logarithmische Integrale nicht homogener linearer Differentialgleichungen.

(Von Herrn *L. Königsberger* in Wien.)

---

*Abel* hat bekanntlich den für die Integralrechnung fundamentalen Satz bewiesen, dass, wenn das Integral

$$\int y\,dx,$$

worin $y$ eine algebraische Function von $x$ bedeutet, eine *algebraische* oder *algebraisch-logarithmische* Function ist, diese oder ihr Logarithmand sich als eine *rationale* Function von $x$ und $y$ darstellen lassen muss — was auch folgendermassen ausgesprochen werden kann: Wenn die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = y$$

ein algebraisches oder algebraisch-logarithmisches Integral besitzt, so ist dieses oder sein Logarithmand als rationale Function von $x$ und $y$ darstellbar, und in diesem Sinne gestattet der Satz eine Erweiterung auf nicht homogene lineare Differentialgleichungen beliebiger Ordnung.

Sei die lineare Differentialgleichung

$$(1.)\qquad \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + Y_2\frac{d^{m-2}z}{dx^{m-2}} + \cdots + Y_m z = y_1$$

gegeben, in welcher $Y_1, Y_2, \dots Y_m, y_1$ algebraische Functionen von $x$ bedeuten, und werde angenommen, dass diese Differentialgleichung ein algebraisches Integral $z_1$ besitze, welches einer algebraischen Gleichung genügen mag, die gleich von vornherein als eine mit Adjungirung der Grössen $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ irreductible Gleichung

$$(2.)\qquad F(z, x, Y_1, Y_2, \dots Y_m) = 0$$

vorausgesetzt werden soll.

Da die Ableitungen von $z_1$ sich wieder rational durch $z_1$, $x$, $Y_1, \dots Y_m$ ausdrücken lassen, wenn die resp. wiederum als irreductibel vorausgesetzten Gleichungen, deren Lösungen die Grössen $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ sind, hinzugenommen werden, so wird sich vermöge der Gleichung (1.) $y_1$ als rationale Function von $z_1$, $x$, $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ in der Form darstellen lassen

$$y_1 = \frac{\varphi(z_1, x, Y_1, Y_2, \dots Y_m)}{\psi(z_1, x, Y_1, Y_2, \dots Y_m)},$$

worin $\varphi$ und $\psi$ ganze Functionen der in ihnen enthaltenen Grössen bedeuten, und diese Function können wir in eine ganze Function von $z_1$ verwandeln, indem wir Zähler und Nenner mit den Werthen des Nenners für alle Lösungen der Gleichung (2.) multipliciren, von denen keiner verschwinden kann, da sonst auch vermöge der Irreductibilität der Gleichung (2.) $\psi_1(z_1, x, Y_1, Y_2, \dots Y_m)$ Null sein müsste. Werde nun die ganze Function durch

$$(3.) \qquad y_1 = f(z_1, x, Y_1, Y_2, \dots Y_m)$$

dargestellt, so wird man, indem für $z_1$ der Reihe nach alle Lösungen der Gleichung (2.) vom Grade $\varkappa$

$$z_1, \quad z_2, \quad \dots \quad z_\varkappa$$

eingesetzt werden, eine Reihe von Werthen

$$y_1, \quad y_2, \quad \dots \quad y_\varkappa$$

erhalten, welche bekanntlich die Lösungen einer Gleichung $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades bilden, deren Coefficienten wieder rationale Functionen von $x$, $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ sind und die man erhalten kann, wenn man die Gleichung (3.) auf die successiven Potenzen erhebt und so die Potenzsummen der Lösungen der neu zu bildenden Gleichung herstellt.

Sei nun die rechte Seite $y_1$ der Differentialgleichung (1.) die Lösung einer mit Adjungirung der Grössen $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ irreductiblen Gleichung $\lambda^{\text{ten}}$ Grades

$$(4.) \qquad F_1(y, x, Y_1, Y_2, \dots Y_m) = 0,$$

deren Coefficienten also rationale Functionen von $x$, $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ sein sollen, so werden die oben erhaltene Gleichung $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades und diese irreductible Gleichung $\lambda^{\text{ten}}$ Grades die Lösung $y_1$ gemein haben, und daher wird der Grad $\varkappa$ im Allgemeinen grösser sein müssen als $\lambda$, kann jedoch auch $= \lambda$ sein; ist das Letztere der Fall, so muss jene Gleichung $\varkappa^{\text{ten}}$

Grades mit der Gleichung (4.) identisch sein, und es wird daher, weil (4.) mit Adjungirung der Grössen $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ irreductibel ist, diese Gleichung nicht gleiche Wurzeln haben können; bekanntlich ist dies aber auch die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass sich auch $z_1$ umgekehrt als rationale Function von $y_1$ darstellen lässt, deren Coefficienten rationale Functionen von $x, Y_1, Y_2, \dots Y_m$ sind, und es wird somit die rationale Umkehrbarkeit der Gleichung (3.) in allen jenen Fällen nachgewiesen sein, in welchen gezeigt werden kann, dass $\varkappa$ nicht grösser als $\lambda$ ist.

Nehmen wir nun an, es sei $\varkappa > \lambda$, also die Anzahl der Lösungen der Gleichung (2.) grösser als die der Gleichung (4.); setzt man in die Differentialgleichung (1.) $z = z_1$ und für die Differentialquotienten von $z_1$ die rationalen Functionen von $z_1, x, Y_1, Y_2, \dots Y_m$, durch welche sie dargestellt werden können, so erhält man die Gleichung (3.), welche eine in $x$ identische sein muss. Lässt man in dieser Gleichung $x$ solche geschlossene Umkreise beschreiben, dass $z_1$ der Reihe nach die Werthe $z_1, z_2, \dots z_\varkappa$ annimmt, während $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ ihre früheren Werthe behalten oder wieder annehmen — und dass dies im Allgemeinen möglich ist, wird in der untenstehenden*) An-

*) Denken wir uns eine Function $z$, welche die Eigenschaft hat, für alle möglichen geschlossenen Umläufe, welche $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ zu ihren ursprünglichen Werthen zurückführen, $r$ verschiedene Werthe $z_1, z_2, \dots z_r$ anzunehmen, so wird, wenn gezeigt werden kann, dass diese $r$ Werthe die Lösungen einer algebraischen Gleichung $r^{\text{ten}}$ Grades sind, deren Coefficienten durch rationale Functionen von $x, Y_1, Y_2, \dots Y_m$ gebildet werden, keine dieser Lösungen die Wurzel einer mit Adjungirung der Grössen $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ irreductibeln Gleichung höheren Grades sein dürfen und daher die obige Behauptung erwiesen sein, dass man durch geschlossene Umläufe, welche $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ unverändert lassen, zu allen Werthen $z_1, z_2, \dots z_\varkappa$ gelangen wird. Es bleibt somit nur nachzuweisen, dass, wenn eine Function $z$ für alle geschlossenen Umläufe, welche $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ unverändert lassen, die $r$ verschiedenen Werthe $z_1, z_2, \dots z_r$ annimmt, diese die Lösungen einer algebraischen Gleichung $r^{\text{ten}}$ Grades sind, deren Coefficienten rational durch $x, Y_1, Y_2, \dots Y_m$ dargestellt werden können, und zwar wird diese Gleichung $r^{\text{ten}}$ Grades wiederum eine irreductible sein. Bilden wir uns nämlich eine Function $t$ durch die in den Grössen $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ lineare mit constanten Coefficienten versehene Beziehung

$$t = a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \dots + a_m Y_m,$$

so wird bekanntlich jede andere, mit willkürlichen anderen constanten Coefficienten versehene lineare Function derselben Grössen als ähnliche Function der ersteren rational durch $t$ ausdrückbar sein mit Hülfe der Coefficienten derjenigen algebraischen Gleichung, deren Lösungen $Y_1, \dots Y_m$ sind, d. h. mit Hülfe von rationalen Functionen von $x$; stellt man nun $m$ solcher linearen Beziehungen zusammen, so kann man mit Hülfe dieser die Grössen $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ rational durch $t$ und $x$ ausdrücken, und es sind somit $t$ rational durch $x$ und $Y_1, Y_2, \dots Y_m$, so wie jedes der $Y$ rational durch $t$ und $x$ ausdrückbar. Jeder geschlossene Umkreis für $x$, welcher $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ unverändert lässt, wird $t$ unverändert lassen, und jeder geschlossene Umkreis, welcher $t$

merkung nachgewiesen — so wird die linke Seite $y$ der Gleichung (3.), da $\varkappa > \lambda$ sein sollte, mindestens zweimal denselben Werth annehmen, oder, was offenbar dasselbe ist, es werden mindestens zwei verschiedenen Functionen $z$ in der Differentialgleichung (1.) zwei gleiche Werthe von $y$ entsprechen.

Seien zwei solche $z$-Werthe, welche gleichen Werthen von $y$ entsprechen, $z_\alpha$ und $z_\beta$, und setzt man $z_\alpha - z_\beta = \zeta$, so wird durch Abziehen

---

unverändert lässt, wird auch die Grössen $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ nicht ändern. Sei nun $w$ eine algebraische Function von $x, Y_1, Y_2, \dots Y_m$, welche für jeden geschlossenen Umkreis, für welchen $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ unverändert bleiben, auch seinen Werth nicht ändert, so wird es auch für jeden geschlossenen Umkreis, welcher $t$ unverändert lässt, selbst unverändert bleiben, weil, wenn $t$ unverändert bleibt, auch die Grössen $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ sich nicht ändern. Fassen wir somit $w$ als Function von $x$ und $t$ auf, so ist klar, dass $w$ mit $t$ von gleicher Vieldeutigkeit sein muss, weil alle geschlossenen Wege, welche $t$ zu seinem Anfangswerthe zurückführen, auch $w$ den ursprünglichen Werth wiedergeben; seien die entsprechenden Werthe von $w$ und $t$

$$w_1 \; w_2 \; \dots \; w_\varrho,$$
$$t_1 \; t_2 \; \dots \; t_\varrho,$$

so wird

$$w_1 t_1^\lambda + w_2 t_2^\lambda + \dots + w_\varrho t_\varrho^\lambda$$

für jeden einfach geschlossenen Weg von $x$ unverändert bleiben, also eindeutig sein und sich somit als rationale Function von $x$ darstellen lassen; bekannte Schlüsse führen, wenn man $\lambda = 0, 1, 2, \dots \varrho - 1$ setzt, zu dem Resultat, dass $w$ sich als rationale Function von $x$ und $t$ ausdrücken lässt. Sind nunmehr $z_1, z_2, \dots z_r$ die $r$ verschiedenen Werthe, welche eine Function $z$ für alle geschlossenen Umläufe annimmt, welche $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ unverändert lassen, so wird diese Function für alle geschlossenen Umläufe, welche $t$ unverändert lassen, auch nur diese $r$ verschiedenen Werthe annehmen, da geschlossene Umläufe, welche $t$ nicht ändern, auch $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ unverändert lassen; bildet man nunmehr die Potenzsummen

$$w = z_1^\mu + z_2^\mu + \dots + z_r^\mu,$$

so wird diese Function $w$ für alle geschlossenen Umläufe, welche $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ unverändert lassen, selbst unverändert bleiben und daher nach dem Obigen durch $x$ und $t$ rational ausdrückbar sein; da nun $t$ eine rationale lineare Function von $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ ist, so folgt unmittelbar, dass $z_1, z_2, \dots z_r$ die Lösungen einer algebraischen Gleichung bilden, deren Coefficienten rational durch $x, Y_1, Y_2, \dots Y_m$ ausdrückbar sind. Es bleibt endlich nur noch zu zeigen, dass diese Gleichung eine mit Adjungirung der Grössen $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ irreductible ist; denn angenommen, dieselbe wäre nicht irreductibel, so mag einer ihrer rationalen Factoren mit

$$f(z, x, Y_1, Y_2, \dots Y_m)$$

bezeichnet werden; dann ist diese $f$-Function für eine Reihe jener $z$-Werthe identisch Null, lassen wir aber $x$ alle geschlossenen Umläufe machen, welche $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ unverändert lassen, so wird $f$ bekanntlich immer identisch Null bleiben müssen, während $z$ der Reihe nach alle $r$ Werthe $z_1, z_2, \dots z_r$ annimmt, d. h. die Gleichung

$$f(z, x, Y_1, Y_2, \dots Y_m) = 0$$

wird $r$ Lösungen haben, kann also nicht ein rationaler Factor jener Gleichung $r^{\text{ten}}$ Grades sein.

der zu jenen $z$-Werthen gehörigen Differentialgleichungen (1.) sich die Differentialgleichung ergeben

$$(5.)\qquad \frac{d^m\zeta}{dx^m}+Y_1\frac{d^{m-1}\zeta}{dx^{m-1}}+\cdots+Y_{m-1}\frac{d\zeta}{dx}+Y_m\zeta = 0,$$

also die reducirte Differentialgleichung von (1.), und wenn man daher die Annahme macht, dass dieselbe überhaupt kein algebraisches Integral hat, so kann, da $\zeta = z_\alpha - z_\beta$ eine algebraische Function ist, welche eben dieser Differentialgleichung genügt, die obige Annahme $\varkappa > \lambda$ nicht statthaben und es wird daher $\varkappa = \lambda$ sein müssen.

Aber auch noch in einem anderen Falle kann die Ungleichheit $\varkappa > \lambda$ nicht bestehen; nehmen wir nämlich an, dass auch die reducirte Differentialgleichung algebraische Integrale hat, dieselben jedoch sämmtlich rationale Functionen von $x$, $Y_1$, $Y_2$, ... $Y_m$ sind, so müssten sich $z_\alpha$ und $z_\beta$ um eine in $x$, $Y_1$, $Y_2$, ... $Y_m$ rationale Function $\zeta$ unterscheiden, und da beide Functionen der Gleichung (2.) genügen, so müssten zwei Lösungen einer irreductibeln Gleichung, deren Coefficienten rationale Functionen von $x$, $Y_1$, $Y_2$, ... $Y_m$ sind, eine Differenz haben, welche wiederum in eben diesen Grössen rational ist, und dies ist offenbar unmöglich; denn sei die Gleichung

$$z^\varkappa+\varphi_1(x, Y_1, \dots Y_m)z^{\varkappa-1}+\cdots+\varphi_{\varkappa-1}(x, Y_1, \dots Y_m)z+\varphi_\varkappa(x, Y_1, \dots Y_m) = 0,$$

und genügen derselben die beiden Lösungen

$$z' \quad\text{und}\quad z'+f(x, Y_1, \dots Y_m),$$

worin die $f$-Function eine rationale Function der in ihr enthaltenen Grössen bedeutet, so folgt aus den beiden Gleichungen

$$z'^\varkappa+\varphi_1(x, Y_1, \dots Y_m)z'^{\varkappa-1}+\cdots+\varphi_{\varkappa-1}(x, Y_1, \dots Y_m)z'+\varphi_\varkappa(x, Y_1, \dots Y_m) = 0$$

$$[z'+f(x, Y_1, \dots Y_m)]^\varkappa+\varphi_1(x, Y_1, \dots Y_m)[z'+f(x, Y_1, \dots Y_m)]^{\varkappa-1}+\cdots$$
$$\cdots+\varphi_\varkappa(x, Y_1, \dots Y_m) = 0$$

die Beziehung

$$\varkappa f(x, Y_1, \dots Y_m)z'^{\varkappa-1}+\cdots = 0,$$

also eine Gleichung $(\varkappa-1)^{\text{ten}}$ Grades, deren Lösung ebenfalls $z'$ ist und deren Coefficienten wiederum rational aus $x$, $Y_1$, ... $Y_m$ zusammengesetzt sind, was, da der Coefficient von $z'^{\varkappa-1}$ nicht verschwinden kann, der Irreductibilität der $z$-Gleichung wegen nicht angeht — also muss auch in diesem Falle $\varkappa = \lambda$ sein.

Wenn aber $\varkappa = \lambda$ ist, so folgte vorher, dass auch umgekehrt $z_1$ rational durch $y_1$ ausdrückbar ist, und wir erhalten somit als Verallgemeinerung des oben angeführten *Abel*schen Satzes das folgende Theorem:

***Wenn eine Differentialgleichung $m^{ter}$ Ordnung***

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} + Y_m z = y_1,$$

***in welcher $Y_1, Y_2, \ldots Y_m, y_1$ algebraische Functionen von $x$ bedeuten, ein algebraisches Integral $z_1$ besitzt, und die reducirte Differentialgleichung hat entweder gar kein algebraisches Integral oder nur solche, welche rational aus $x, Y_1, Y_2, \ldots Y_m$ zusammengesetzt sind, dann wird sich das Integral $z_1$ als rationale Function von $x, Y_1, Y_2, \ldots Y_m$ und $y_1$ darstellen lassen.***

So hat z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} + z = x,$$

deren reducirte Gleichung

$$\frac{dz}{dx} + z = 0$$

nur transcendente Integrale hat, das algebraische Integral $x-1$, und ebenso hat die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x} z = x^2,$$

deren reducirte Gleichung

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x} z = 0$$

nur die rationalen algebraischen Integrale $z = cx^2$ besitzt, das in $x$ und $x^2$ rationale Integral $z = x^2(x+1)$; endlich hat die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} + \frac{z}{x} = \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{x}},$$

deren reducirte Gleichung

$$\frac{dz}{dx} + \frac{z}{x} = 0$$

nur in $x$ rationale Integrale besitzt, das in $\sqrt{x}$ rationale Integral

$$z = \sqrt{x}.$$

In wie weit specielle Fälle dieses Satzes auch mit Hülfe der Variation der Constanten begründet werden können, braucht hier nicht weiter erörtert zu werden *).

---

*) Es mag noch bemerkt werden, dass, wenn $Y_1, Y_2, \ldots Y_m$ ganze Functionen von $x$ sind, wie sofort zu sehen, ohne weitere Bedingungen *jedes algebraische Integral der obigen Differentialgleichung rational in $x$ und $y_1$ ausdrückbar ist.*

Ich gehe jetzt dazu über, den Fall der algebraisch-logarithmischen Integrale linearer Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{d^m z}{dx^m}+Y_1\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}+\cdots+Y_{m-1}\frac{dz}{dx}+Y_m z = y_1$$

etwas genauer zu untersuchen.

Es ist unmittelbar ersichtlich, dass eine solche Differentialgleichung rein logarithmische Integrale von der Form

$$z = \log v,$$

worin $v$ eine algebraische Function von $x$ bedeutet, nur dann besitzen kann, wenn $Y_m = 0$ ist, da die Transcendente nur durch den letzten Posten der linken Seite eingeführt wird. Sei nun $Y_m = 0$, also die gegebene Differentialgleichung

$$\frac{d^m z}{dx^m}+Y_1\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}+\cdots+Y_{m-1}\frac{dz}{dx} = y_1,$$

so wird unter der Voraussetzung, dass $z = \log v$ ist, $y_1$ als rationale, also auch als ganze Function von $v$ darstellbar sein, deren Coefficienten rationale Functionen von $x$ sind; angenommen nun, es liesse sich diese Functionalbeziehung nicht rational umkehren, so müssten, genau wie in dem Falle algebraischer Integrale nachgewiesen worden, mindestens zwei $v$-Werthe demselben $y$-Werthe entsprechen, oder mindestens zwei $z$-Werthe, $\log v_1$ und $\log v_2$ demselben $y$-Werthe zugehören; dann würde aber die reducirte Differentialgleichung

$$\frac{d^m z}{dx^m}+Y_1\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}+\cdots+Y_{m-1}\frac{dz}{dx} = 0$$

ein Integral von der Form

$$\log v_1-\log v_2 = \log\frac{v_1}{v_2}$$

besitzen; hat nun die reducirte Differentialgleichung überhaupt kein logarithmisches Integral dieser Form, so ist die Annahme unmöglich, und es muss sich somit jene algebraische Beziehung zwischen $v$ und $y_1$ rational umkehren lassen. Aber wir können auch noch einen zweiten wesentlichen Fall hinzufügen, in dem die rationale Umkehrbarkeit ebenfalls statthat. Nehmen wir nämlich an, die reducirte Differentialgleichung habe logarithmische Integrale von der Form

$$\log w,$$

worin jedoch $w$ eine rationale Function von $x, Y_1, Y_2, \dots Y_m$ sein soll, so wird der gemachten Annahme zufolge

$$v_2 = v_1 . r$$

sein müssen, worin $r$ eine in $x, Y_1, Y_2, \dots Y_m$ rationale Function bedeutet, und indem wir wieder von der mit Adjungirung der Grössen $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ irreductibeln $v$-Gleichung ausgehen, würden sich die beiden Beziehungen ergeben

$$v_1^\varkappa + \varphi_1(x, Y_1, \dots Y_m) v_1^{\varkappa-1} + \dots + \varphi_\varkappa(x, Y_1, \dots Y_m) = 0,$$
$$r^\varkappa v_1^\varkappa + r^{\varkappa-1} \varphi_1(x, Y_1, \dots Y_m) v_1^{\varkappa-1} + \dots + \varphi_\varkappa(x, Y_1, \dots Y_m) = 0.$$

Da aus diesen beiden Gleichungen folgt, dass

$$r^{\varkappa-1}\varphi_1(x, Y_1, \dots Y_m)(r-1)v_1^{\varkappa-1} + r^{\varkappa-2}\varphi_2(x, Y_1, \dots Y_m)(r^2-1)v_1^{\varkappa-2} + \cdots$$
$$\cdots + \varphi_\varkappa(x, Y_1, \dots Y_m)(r^\varkappa - 1) = 0,$$

und die $v$-Gleichung eine irreductible Gleichung $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades sein sollte, so müssen entweder

$$\varphi_\varrho(x, Y_1, Y_2, \dots Y_m) \quad \text{oder} \quad r^\varrho - 1$$

für jedes $\varrho$ verschwinden, jedenfalls also, da nicht alle $\varphi$-Functionen Null sein können, $r$ eine Constante und zwar eine Einheitswurzel sein; daraus folgt nun unmittelbar, dass, wenn $\delta$ die niedrigste Potenz ist, zu der $r$ erhoben der Einheit gleich wird, die irreductible $v$-Gleichung die Form hat

$$v^{\mu\delta} + \varphi_\delta(x, Y_1, \dots Y_m) v^{(\mu-1)\delta} + \varphi_{2\delta}(x, Y_1, \dots Y_m) v^{(\mu-2)\delta} + \cdots$$
$$\cdots + \varphi_{\mu\delta}(x, Y_1, \dots Y_m) = 0;$$

denkt man nun $v^\delta = V$ gesetzt, so wird das hypothetisch vorausgesetzte logarithmische Integral

$$z = \log v \quad \text{in} \quad z = \frac{1}{\delta} \log V$$

übergehen, worin $V$ als eine Lösung der algebraischen Gleichung

$$V^\mu + \varphi_\delta(x, Y_1, \dots Y_m) V^{\mu-1} + \cdots + \varphi_{\mu\delta}(x, Y_1, \dots Y_m) = 0$$

definirt ist. Es wird aber jetzt ebenso $y_1$ vermöge der vorgelegten Differentialgleichung eine rationale ganze Function von $V$ sein, welches durch die eben hingeschriebene, offenbar wieder irreductible Gleichung definirt ist, und wenn sich jetzt wieder $V$ nicht umgekehrt rational durch $y_1$ und $x, Y_1, \dots Y_m$ ausdrücken liesse, sondern einem $y$-Werthe zwei Werthe $V_1$ und $V_2$ entsprächen, so würde wieder $z$ auf die Form

$$z = \frac{1}{\delta\delta_1}\log W$$

reducirt werden können, u. s. w.; da man schliesslich zu einer linearen Gleichung für die $V$, $W$, ... Grössen gelangen muss, für welche eine weitere Zerlegung nicht mehr möglich, so finden wir, dass das angenommene logarithmische Integral nothwendig die Form haben muss

$$A\log v,$$

worin $A$ eine Constante und $v$ eine rational durch $x$, $Y_1$, ... $Y_m$ und $y_1$ darstellbare Function ist; es folgt somit der nachstehende Satz:

*Wenn eine Differentialgleichung $m^{ter}$ Ordnung*

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1}\frac{dz}{dx} = y_1,$$

*in welcher $Y_1$, $Y_2$, ... $Y_{m-1}$, $y_1$ algebraische Functionen von $x$ sind, ein logarithmisches Integral von der Form $z = \log v$ besitzt, worin $v$ eine algebraische Function von $x$ bedeutet, und die reducirte Differentialgleichung hat entweder gar kein logarithmisches Integral derselben Form oder nur solche, deren Logarithmand rational aus $x$, $Y_1$, $Y_2$, ... $Y_m$ zusammengesetzt ist, so wird man das logarithmische Integral auf die Form $A\log v_1$ bringen können, worin $A$ eine Constante und der Logarithmand $v_1$ sich als rationale Function von $x$, $Y_1$, ... $Y_m$ und $y_1$ ausdrücken lässt.*

So wird z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\frac{dz}{dx} = x,$$

deren reducirte Gleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\frac{dz}{dx} = 0$$

das allgemeine nicht logarithmische Integral

$$z = c\int x^{-1}e^{-\frac{x^3}{3}}dx + c_1$$

hat, durch

$$z = \log x$$

befriedigt.

Ist nun aber der Coefficient von $z$ nicht Null, lautet also die lineare Differentialgleichung wieder allgemein

$$(6.)\qquad \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1}\frac{dz}{dx} + Y_m z = y_1,$$

und fragen wir, welche Form ein algebraisch-logarithmisches Integral einer

solchen Differentialgleichung haben muss, so mag allgemein

$$(7.)\qquad z_1 = f(x, u_1, u_2, \dots u_\sigma, \log v_1, \log v_2, \dots \log v_\varrho)$$

gesetzt werden, worin $u_1, u_2, \dots u_\sigma, v_1, v_2, \dots v_\varrho$ algebraische Functionen von $x$, $f$ eine algebraische Function der in ihr enthaltenen Grössen bedeuten mag. Da nun die Functionen

$$\zeta_1 = \log v_1, \quad \zeta_2 = \log v_2, \quad \dots \quad \zeta_\varrho = \log v_\varrho$$

den irreductibeln algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung genügen

$$(8.)\qquad v_1 \frac{d\zeta}{dx} = \frac{dv_1}{dx}, \quad v_2 \frac{d\zeta}{dx} = \frac{dv_2}{dx}, \quad \dots \quad v_\varrho \frac{d\zeta}{dx} = \frac{dv_\varrho}{dx},$$

so wird nach einem von mir bewiesenen Satze über Differentialgleichungen (dieses Journal Bd. 84) die algebraische Beziehung (7.) erhalten bleiben, wenn statt der Integrale $\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_\varrho$ der Differentialgleichungen (8.) beliebige andere particuläre Integrale derselben, also

$$\zeta_1 + \mu_1, \quad \zeta_2 + \mu_2, \quad \dots \quad \zeta_\varrho + \mu_\varrho,$$

in denen $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_\varrho$ willkürliche Constanten bedeuten, gesetzt werden, wenn nur für $z_1$ ein passendes anderes particuläres Integral der Differentialgleichung (6.) substituirt wird — vorausgesetzt, was wir von vornherein annehmen, dass nicht schon zwischen den Functionen

$$\log v_1, \quad \log v_2, \quad \dots \quad \log v_\varrho$$

ein algebraischer Zusammenhang stattfindet, mit Hülfe dessen dann immer aus der Beziehung (7.) auf algebraischem Wege einer der Logarithmen herausgeschafft werden könnte. Bezeichnen wir nun ein System particulärer Fundamentalintegrale der reducirten Differentialgleichung

$$(9.)\qquad \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \dots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} + Y_m z = 0$$

mit

$$z^{(1)}, \quad z^{(2)}, \quad \dots \quad z^{(m)},$$

so wird nach dem eben angeführten Satze, wenn die Gleichung (7.) mit Hervorhebung nur *eines* Logarithmus kurz durch

$$(10.)\qquad z_1 = \varphi(\zeta_\alpha)$$

bezeichnet wird, dieselbe in

$$z_1 + M_1 z^{(1)} + M_2 z^{(2)} + \dots + M_m z^{(m)} = \varphi(\zeta_\alpha + \mu_\alpha)$$

oder in

$$(11.)\qquad \varphi(\zeta_\alpha + \mu_\alpha) = \varphi(\zeta_\alpha) + M_1 z^{(1)} + M_2 z^{(2)} + \dots + M_m z^{(m)}$$

übergehen, worin $\mu_\alpha$ eine willkürliche, $M_1, M_2, \dots M_m$ von $\mu_\alpha$ abhängige Constanten bedeuten. Ist nun die Gleichung (11.) keine identische, so könnte man durch verschiedene Wahl der Constanten $\mu_\alpha$ oder durch Vermehrung der anderen logarithmischen Functionen um willkürliche Constanten $z^{(1)}, z^{(2)}, \dots z^{(m)}$ im Allgemeinen als algebraisch-logarithmische Functionen ausdrücken; nimmt man daher an, dass die particulären Integrale der reducirten Differentialgleichung von (6.) ***nicht algebraisch durch logarithmische Functionen*** ausdrückbar sind, für welche der Logarithmand ebenfalls eine algebraische Function von $x$ ist, so muss (11.) eine in $\zeta_\alpha$ identische Gleichung sein, und wenn man daher $\zeta_\alpha = 0$ setzt,

$$(12.)\qquad \varphi(\mu_\alpha) = \varphi(0) + M_1 z^{(1)} + M_2 z^{(2)} + \cdots + M_m z^{(m)}$$

und aus (11.) und (12.)

$$(13.)\qquad \varphi(\zeta_\alpha + \mu_\alpha) = \varphi(\zeta_\alpha) + \varphi(\mu_\alpha) - \varphi(0)$$

sein. Bekanntlich führt die Auflösung der Functionalgleichung (13.) zu der Form

$$(14.)\qquad \varphi(\zeta_\alpha) = A\zeta_\alpha + B,$$

worin $A$ nach Gleichung (11.) in der Form bestimmt ist

$$(15.)\qquad A\mu_\alpha = M_1 z^{(1)} + M_2 z^{(2)} + \cdots + M_m z^{(m)},$$

und da die particulären Integrale der reducirten Differentialgleichung nicht algebraisch durch logarithmische Functionen ausdrückbar sein sollten, die anderen $\zeta$-Grössen nicht mehr enthält. Da diese Auseinandersetzung für jedes $\zeta$ gilt, so wird somit die Gleichung (7.) die Gestalt annehmen

$$(16.)\qquad z_1 = u_1 \log v_1 + u_2 \log v_2 + \cdots + u_\varrho \log v_\varrho + U,$$

worin, da $z_1$ als algebraisch-logarithmische Function vorausgesetzt wurde,

$$u_1,\ u_2,\ \dots\ u_\varrho,\ U$$

algebraische Functionen von $x$ darstellen werden.

So hat z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x} z = x,$$

deren reducirte Gleichung

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x} z = 0$$

nur die rein algebraischen Integrale

$$z = cx^2$$

besitzt, das logarithmische Integral

$$z = x^2 \log x;$$

hier ist in der That

$$A\mu_a = M_1 z^{(1)} \quad \text{oder} \quad A = cx^2.$$

Man sieht ferner leicht, dass in der Form des Integrales (16.) die algebraischen Functionen $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ Integrale der reducirten Differentialgleichung sein müssen, da durch Einsetzen dieses Ausdruckes die linke Seite der Gleichung den folgenden Complex logarithmischer Glieder enthält

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d^m u_1}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} u_1}{dx^{m-1}} + \dots + Y_m u_1\right) \log v_1 \\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ \left(\frac{d^m u_\varrho}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} u_\varrho}{dx^{m-1}} + \dots + Y_m u_\varrho\right) \log v_\varrho, \end{aligned}$$

welcher, wenn, was immer geschehen darf, vorausgesetzt wird, dass keine Beziehung von der Form

$$U_1 \log v_1 + U_2 \log v_2 + \dots + U_\varrho \log v_\varrho = 0$$

besteht, in welcher $U_1, U_2, \dots U_\varrho$ algebraische Functionen von $x$ bedeuten, die Beziehungen nach sich zieht

$$\begin{aligned} &\frac{d^m u_1}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} u_1}{dx^{m-1}} + \dots + Y_m u_1 = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\frac{d^m u_\varrho}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} u_\varrho}{dx^{m-1}} + \dots + Y_m u_\varrho = 0. \end{aligned}$$

Sei nun die Form des Integrales der Differentialgleichung (6.)

$$(17.) \qquad z_1 = u_1 \log v_1 + U,$$

worin $u_1, v_1, U$ algebraische Functionen von $x$ bedeuten, und bildet man mit dem algebraischen Integrale $u_1$ der reducirten Differentialgleichung die Substitution

$$(18.) \qquad z = u_1 \int t\, dx,$$

so erhält man bekanntlich für $t$ eine lineare Differentialgleichung $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, deren Coefficienten rational aus $Y_1, Y_2, \dots Y_m$, $u_1$ und $x$ zusammengesetzt sein werden, und da einer der Werthe von $z$ durch die Gleichung (17.) gegeben ist, so wird auch eines der Integrale dieser Differentialgleichung $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung durch den Ausdruck bestimmt sein

$$u_1 \log v_1 + U = u_1 \int t\, dx$$

oder

$$t_1 = \frac{\frac{dv_1}{dx}}{v_1} + \frac{d\left(\frac{U}{u_1}\right)}{dx},$$

d. h. es wird diese Differentialgleichung ein algebraisches Integral haben. Nun wird aber die reducirte Gleichung dieser Differentialgleichung aus der reducirten der ursprünglichen erhalten, wenn man dieselbe Substitution (18.) anwendet; nimmt man nun an, dass die reducirte Differentialgleichung in $t$ entweder gar keine algebraischen Integrale besitzt oder nur solche, welche rational aus $x, Y_1, Y_2, \dots Y_m, u_1$ zusammengesetzt sind, oder *dass die reducirte der gegebenen Differentialgleichung kein Integral $u_2$ besitzt, für welches der Quotient $\frac{u_2}{u_1}$ sich als ein Integral einer algebraischen Function darstellt* — also ein *Abel*sches Integral ist — *oder wenn sie ein solches besitzt, wenigstens die Function unter dem Integral als rationale Function von $x, Y_1, Y_2, \dots Y_m$ und $u_1$ darstellbar ist,* so wird nach dem oben bewiesenen Satze von den algebraischen Integralen nicht homogener linearer Differentialgleichungen das Integral der nicht homogenen Differentialgleichung in $t$ als rationale Function von $x, Y_1, Y_2, \dots Y_m, u_1$ und $y_1$ dargestellt werden können. Da nun aber

$$\int t\,dx = \log v_1 + \frac{U}{u_1}$$

ist, so wird nach dem oben bewiesenen Satze von den logarithmischen Integralen von Differentialgleichungen — hier für Quadraturen der *Abel*sche Satz — *$v_1$ selbst eine rationale Function von $x, Y_1, Y_2, \dots Y_m, u_1$ und $y_1$ sein, ebenso wie $U$.*

Nehmen wir nun mit Beibehaltung der ursprünglichen Voraussetzung, dass die particulären Integrale der reducirten Gleichung der gegebenen Differentialgleichung (6.) nicht algebraisch-logarithmisch sind von der Art, dass der Logarithmand eine algebraische Function von $x$ ist, das Integral der gegebenen Differentialgleichung in der allgemeinen, oben vorausgesetzten Form an

$$z = u_1 \log v_1 + u_2 \log v_2 + \dots + u_\varrho \log v_\varrho + U,$$

in welchem

$$u_1,\ v_1,\ u_2,\ v_2,\ \dots\ u_\varrho,\ v_\varrho,\ U$$

algebraische Functionen von $x$ bedeuten und $u_1, u_2, \dots u_\varrho$, wie oben nachgewiesen worden, algebraische Integrale der reducirten Differentialgleichung

bedeuten, so wird, wenn man wieder

$$z = u_1\int t\,dx$$

setzt, die transformirte Differentialgleichung $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung in $t$ im Allgemeinen ein algebraisch-logarithmisches Integral von der Form

$$t = u_2^{(1)}\log v_2 + u_3^{(1)}\log v_3 + \cdots + u_\varrho^{(1)}\log v_\varrho + U^{(1)}$$

besitzen, worin $u_2^{(1)}, u_3^{(1)}, \ldots u_\varrho^{(1)}, U^{(1)}$ wieder algebraische Functionen von $x$, die Logarithmen die früheren, nur in der Anzahl um einen geringer, und die $u_2^{(1)}, u_3^{(1)}, \ldots u_\varrho^{(1)}$ wieder algebraische Integrale der reducirten Differentialgleichung der $t$-Gleichung sein werden. So kann man durch successiv angewandte Substitutionen der obigen Form die gegebene Differentialgleichung schliesslich auf eine lineare nicht homogene Differentialgleichung reduciren, deren rechte Seite wiederum $y_1$ ist und die ein algebraisches Integral besitzen muss, für welches sich dann wieder in Betreff der rationalen Ausdrückbarkeit durch $x, Y_1, Y_2, \ldots Y_m, y_1$ und die algebraischen Integrale der reducirten Differentialgleichung ähnliche Schlüsse machen lassen wie in dem eben behandelten Falle.

Wird endlich angenommen, dass auch die reducirte Differentialgleichung von (6.) algebraisch-logarithmische Integrale besitzt, für welche der Logarithmand algebraisch durch $x$ ausdrückbar ist, so wird die Gleichung (11.) keine identische zu sein brauchen, und man wird nicht mehr schliessen können, dass $z$ eine lineare Function der Logarithmen sein muss, es werden vielmehr im Allgemeinen Potenzen von Logarithmen im Integral enthalten sein können.

So hat z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dz}{dx} + \frac{z}{x^2} = \frac{2}{x},$$

deren reducirte

$$\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dz}{dx} + \frac{z}{x^2} = 0$$

die beiden particulären Integrale

$$z = x, \quad z = x\log x$$

besitzt, das Integral

$$z = x + x(\log x)^2.$$

Wien, im Juni 1880.

---

# Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques.

(Par M. *Emile Picard* à Toulouse.)

Les profondes recherches de M. *Hermite* sur l'équation de *Lamé* appellent l'attention sur une classe importante d'équations différentielles linéaires. On sait que l'illustre géomètre écrit cette équation sous la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = [n(n+1)k^2\operatorname{sn}^2 x + h]y,$$

où $\operatorname{sn} x$ désigne la fonction elliptique ordinaire de module $k$, $n$ un entier positif et $h$ une constante quelconque. M. *Hermite* a montré qu'un système fondamental d'intégrales est formé de fonctions doublement périodiques de seconde espèce. Nous disons, avec M. *Hermite*, qu'une fonction $F(x)$ est une fonction doublement périodique de seconde espèce aux périodes $2K$ et $2iK'$, quand on a:

$$F(x+2K) = \mu F(x), \quad F(x+2iK') = \mu' F(x)$$

$\mu$ et $\mu'$ étant deux constantes (voir *Hermite*, Comptes rendus tome 85 page 690). Si $\mu = \mu' = 1$ la fonction sera dite doublement périodique de première espèce. Le résultat, qui se présente dans l'équation de *Lamé*, n'est pas fortuit; des circonstances analogues vont se présenter pour toute équation différentielle linéaire à coefficients doublement périodiques de première espèce dont l'intégrale générale est uniforme. Les équations de ce genre jouissent d'une propriété dont la démonstration fait l'objet de la première partie de ce travail; j'établis qu'une équation d'ordre $m$ admettra, en général, comme intégrales distinctes $m$ fonctions doublement périodiques de seconde espèce; c'est ce qui arrive pour l'équation de *Lamé*, quand $h$ est quelconque. Les changements de forme analytique que peuvent subir les intégrales dans certains cas particuliers, sont l'objet d'une étude spéciale. Dans la seconde partie je considère des systèmes d'équations linéaires simultanées à coefficients

doublement périodiques; j'étudie en particulier un système du troisième ordre jouissant d'une propriété remarquable et je termine par une application géométrique de cette étude. J'ajouterai que les équations considérées dans ce mémoire sont supposées appartenir à la classe de M. ***Fuchs***, c'est-à-dire que toutes les intégrales sont régulières. Dans ce cas on pourra reconnaître, d'après les principes de M. ***Fuchs***, si l'intégrale générale est uniforme.

## Chapitre I.

1. Considérons tout d'abord le cas d'une équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy = 0,$$

$p$ et $q$ sont supposés doublement périodiques et l'intégrale générale uniforme. Nous allons faire voir que cette équation admet toujours comme intégrale une fonction doublement périodique de seconde espèce. Soit $f(x)$ une intégrale qui ne soit pas une fonction de cette nature. Quand on changera $x$ en $x+2K$ et $x+2iK'$, la fonction ne pourra se reproduire dans les deux cas à un facteur constant près; supposons, par exemple, que le quotient $f(x+2K):f(x)$ ne se réduise pas à une constante. Ceci posé, l'équation ne changeant pas par les substitutions de $x+2K$, $x+4K$ à $x$, $f(x+2K)$ et $f(x+4K)$ seront, comme $f(x)$ des intégrales de l'équation, et l'on aura par suite entre ces expressions une relation linéaire à coefficients constants que nous pourrons écrire:

$$(1.) \qquad f(x+4K) = Af(x)+Bf(x+2K)$$

$A$ et $B$ étant deux constantes. J'envisage maintenant l'expression

$$\varphi(x) = f(x+2K)+\mu f(x).$$

On peut choisir la constante $\mu$ de manière que cette fonction se reproduise à un facteur constant près par le changement de $x$ en $x+2K$. On a en effet

$$\varphi(x+2K) = (B+\mu)f(x+2K)+Af(x).$$

On devra donc prendre pour $\mu$ une racine de l'équation

$$(2.) \qquad \mu^2+B\mu-A = 0.$$

Revenons maintenant à la fonction $\varphi(x)$ dans laquelle nous supposons que $\mu$ désigne une racine de l'équation (2.), et qui, d'après ce que j'ai supposé

sur $f(x)$, ne peut être identiquement nulle. $\varphi(x)$ sera manifestement une intégrale de l'équation proposée. Elle se reproduit déjà à un facteur constant près par le changement de $x$ en $x+2K$: si elle se reproduit également à un facteur près par le changement de $x$ en $x+2iK'$, notre théorème est établi; s'il en est autrement, on a évidemment

$$\varphi(x+4iK') = A'\varphi(x)+B'\varphi(x+2iK')$$

$A'$ et $B'$ étant des constantes. En raisonnant comme plus haut, on voit que si on prend pour $\mu'$ une racine de l'équation

$$\mu'^2+B'\mu'-A' = 0,$$

l'expression

$$\psi(x) = \varphi(x+2iK')+\mu'\varphi(x)$$

se reproduira à un facteur près quand on change $x$ en $x+2iK'$. $\psi(x)$ est donc une intégrale doublement périodique de l'équation donnée. On remarquera, d'après ce qui a été dit sur $\varphi(x)$, que $\psi(x)$ n'est pas identiquement nul. Le théorème est donc établi.

2. Cherchons maintenant une seconde intégrale de l'équation différentielle. $\psi_1(x)$ désignant la première intégrale que nous venons de trouver, nous pourrons prendre comme seconde intégrale

$$\psi_2(x) = \psi_1(x)\int\frac{1}{\psi_1^2(x)}e^{-\int p\,dx}dx.$$

Etudions la forme de cette fonction. L'intégrale générale étant supposée uniforme, $e^{-\int p\,dx}$ sera une fonction uniforme doublement périodique. On a en effet nécessairement

$$\psi_1\frac{d\psi_2}{dx}-\psi_2\frac{d\psi_1}{dx} = Ce^{-\int p\,dx},$$

où $C$ est une constante. L'expression considérée sera donc uniforme comme $\psi_1$ et $\psi_2$; et on voit de suite alors que c'est une fonction doublement périodique de seconde espèce. Il en est par suite de même de

$$F(x) = \frac{1}{\psi_1^2(x)}e^{-\int p\,dx}.$$

Cherchons la forme de l'intégrale $\int F(x)\,dx$, entrant dans l'expression de $\psi_2(x)$; or nous pouvons décomposer la fonction $F(x)$ en éléments simples de la manière suivante (*Hermite,* Comptes rendus loc. cit.)

$$F(x) = \Sigma[A_0 f(x-a)+\cdots+A_\alpha D_x^\alpha f(x-a)]$$

la sommation s'étendant à tous les pôles de $F(x)$, où $f(x) = \frac{H(x+\omega)e^{\lambda x}}{H(x)}$, $\omega$ et $\lambda$ étant deux constantes convenablement choisies. On suppose que les multiplicateurs $\mu$ et $\mu'$ de $F(x)$ ne peuvent être mis sous la forme

$$(3.)\qquad \mu = e^{2hK},\quad \mu' = e^{2hiK'}.$$

L'intégrale devant être uniforme, tous les coefficients $A_0$ seront nuls, et on aura:

$$\int F(x)\,dx = \Sigma[A_1 f(x-a) + \cdots + A_\alpha D_x^{\alpha-1} f(x-a)].$$

On pourra donc prendre

$$\psi_2(x) = \psi_1(x)[\Sigma(A_1 f(x-a) + \cdots + A_\alpha D_x^{\alpha-1} f(x-a))],$$

et cette seconde intégrale sera par suite comme la première une fonction doublement périodique de seconde espèce.

Supposons maintenant que les multiplicateurs $\mu$ et $\mu'$ de $F(x)$ aient la forme (3.); la décomposition en éléments simples aura alors la forme suivante (*Mittag-Leffler*, Comptes rendus 26 janvier 1880).

$$F(x) = a_0 e^{hx} + \Sigma[A_0 f(x-a) + \cdots + A^\alpha D_x^\alpha f(x-a)]$$

en posant cette fois $f(x) = \frac{H'(x)}{H(x)} e^{hx}$; et on aura la relation

$$(4.)\qquad \Sigma(A_0 + A_1 h + \cdots + A_\alpha h^\alpha) e^{-ha} = 0.$$

Les coefficients $A_0$ devant être nuls, dans le cas qui nous occupe, on aura en supposant d'abord $h$ différent de zéro

$$\int F(x)\,dx = \frac{a_0}{h} e^{hx} + \Sigma[A_1 f(x-a) + \cdots + A_\alpha D_x^{\alpha-1} f(x-a)].$$

Mais la relation (4.) devient alors

$$\Sigma(A_1 + \cdots + A_\alpha h^{\alpha-1}) e^{-ha} = 0$$

et l'expression précédente est par suite une fonction de seconde espèce aux multiplicateurs $e^{2hK}$ et $e^{2hiK'}$. L'intégrale $\psi_2(x)$ est donc encore une fonction doublement périodique.

Supposons enfin que $h$ soit nul; on a

$$\int F(x)\,dx = a_0 x + \Sigma\left[A_1 \frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + \cdots\right].$$

Désignons par $P(x)$ cette expression, on aura

$$P(x+2K) = P(x) + C,\quad P(x+2iK') = P(x) + C'$$

$C$ et $C'$ étant deux constantes.

Soient $\lambda_1$, $\lambda_1'$ les multiplicateurs de la première intégrale $\psi_1(x)$, la seconde intégrale $\psi_2(x)$ jouira de la propriété suivante

$$(5.)\quad \begin{cases} \psi_2(x+2K) = \lambda_1\psi_2(x)+\mu_1\psi_1(x) \\ \psi_2(x+2iK') = \lambda_1'\psi_2(x)+\mu_1'\psi_1(x) \end{cases}$$

$\mu_1$ et $\mu_1'$ étant deux constantes; il pourrait arriver que celles-ci fussent nulles, et l'équation aurait alors deux intégrales doublement périodiques aux mêmes multiplicateurs.

3. Supposons que les intégrales $\psi_1$ et $\psi_2$ soient doublement périodiques aux multiplicateurs $\lambda_1$, $\lambda_1'$ et $\lambda_2$, $\lambda_2'$, on pourra trouver de suite les produits $\lambda_1\lambda_2$ et $\lambda_1'\lambda_2'$. On a en effet

$$(6.)\quad \psi_1\frac{d\psi_2}{dx}-\psi_2\frac{d\psi_1}{dx} = Ce^{-\int p\,dx}$$

Or le premier membre admet précisément pour multiplicateurs $\lambda_1\lambda_2$ et $\lambda_1'\lambda_2'$; l'identité précédente fera donc connaître immédiatement ces produits. Si $e^{-\int p\,dx}$ est une fonction doublement périodique de première espèce on aura $\lambda_1\lambda_2 = 1$ et $\lambda_1'\lambda_2' = 1$; c'est ce qui arrive notamment dans l'équation de *Lamé* où $p$ est nul.

Supposons maintenant que nous soyons dans ce que l'on pourrait appeler le cas d'exception; c'est-à-dire quand notre seconde intégrale $\psi_2(x)$ n'est pas doublement périodique. Les relations (5.) montrent que

$$\psi_1\frac{d\psi_2}{dx}-\psi_2\frac{d\psi_1}{dx}$$

est encore une fonction doublement périodique et ses multiplicateurs sont $\lambda_1^2$ et $\lambda_1'^2$. L'identité (6.) fait connaître alors immédiatement au signe près les valeurs de $\lambda_1$ et $\lambda_1'$. Dans l'équation de *Lamé*, on voit ainsi que l'on aura

$$\lambda_1^2 = \lambda_1'^2 = 1.$$

Par suite, à l'égard de cette équation, les multiplicateurs de l'intégrale doublement périodique ne peuvent être que $\pm 1$, quand on se trouve dans le cas d'exception.

4. Passons maintenant à une équation différentielle d'ordre quelconque. Soit $f(x)$ une intégrale de l'équation

$$\frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+p_m y = 0$$

où les coefficients $p_1, \dots p_m$ sont des fonctions doublement périodiques de $x$, et dont l'intégrale générale est supposée uniforme.

$f(x+2K), f(x+4K), \dots f(x+2mK)$ seront, comme $f(x)$, des intégrales d'après la forme de l'équation précédente, et on aura par suite.

$$f(x+2mK) = A_1 f(x) + A_2 f(x+2K) + \cdots + A_m f(x+2(m-1)K).$$

J'envisage l'expression:

$$(6.) \quad f(x+2(m-1)K) + \mu_1 f(x+2(m-2)K) + \cdots + \mu_{m-1} f(x).$$

On peut choisir les constantes $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_{m-1}$ de manière que cette fonction se reproduise à un facteur constant près par le changement de $x$ en $x+2K$; il suffira que l'on ait

$$A_m + \mu_1 = \frac{A_{m-1}+\mu_2}{\mu_1} = \cdots = \frac{A_2+\mu_{m-1}}{\mu_{m-2}} = \frac{A_1}{\mu_{m-1}}.$$

Les $m-2$ premières équations montrent que $\mu_2$ est un polynôme du second degré en $\mu_1$, $\mu_3$ du troisième degré, et enfin $\mu_{m-1}$ un polynôme de degré $m-1$; en substituant cette valeur de $\mu_{m-1}$ dans l'égalité

$$A_m + \mu_1 = \frac{A_1}{\mu_{m-1}}$$

on obtient pour $\mu_1$ une équation de degré $m$.

Désignons par $\mu_1$ l'une de ces racines et soient de même $\mu_2, \dots \mu_{m-1}$ les valeurs correspondantes. L'expression (6.) sera une intégrale de l'équation différentielle se reproduisant à un facteur constant près par le changement de $x$ en $x+2K$. Ce résultat ne présente évidemment d'intérêt que si l'expression (6.) n'est pas identiquement nulle. Supposons qu'il en soit ainsi; nous considérerons alors l'expression suivante

$$(7.) \quad f(x+2(m-2)K) + \nu_1 f(x+2(m-3)K) + \cdots + \nu_{m-2} f(x),$$

et on verra par un calcul tout semblable au précédent, que l'on peut choisir les constantes $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_{m-2}$, de manière que cette expression se reproduise à un facteur constant près par le changement de $x$ en $x+2K$, et nous arriverons de nouveau à cette conclusion qu'il existe pour l'équation une intégrale jouissant de cette propriété; si l'expression (7.) était identiquement nulle, on continuerait le même raisonnement et on arriverait nécessairement à une expression, intégrale de l'équation différentielle et différente de zéro, se reproduisant à un facteur constant près par le changement de $x$ en $x+2K$. Désignons par $f_1(x)$ cette intégrale; nous allons raisonner sur $f_1(x)$ relativement à la période $2iK'$, comme nous avons

fonction de même nature aux mêmes multiplicateurs. Prenons $y_3$ par exemple; nous aurons d'abord à prendre $\int\psi_3(x)\,dx$ qui nous donnera une fonction de seconde espèce, celle-ci multipliée par $\psi_2(x)$ sera encore une fonction de même nature, et les multiplicateurs seront respectivement égaux à ceux du produit $\psi_2\psi_3$, qui par hypothèse ne sont pas simultanément égaux à l'unité. Donc l'intégration $\int\psi_2(x).\left[\int\psi_3(x)\,dx\right].dx$ donnera encore certainement une fonction de seconde espèce, comme nous voulions l'établir, et il est clair que le raisonnement est général.

Indiquons une propriété des intégrales écrites plus haut, qui subsistera dans tous les cas. Considérons un instant la suite

$$P_1(x) = 1,\quad P_2(x) = \int\psi_2(x)\,dx,\quad \dots,\quad P_m(x) = \int\psi_2(x)\,dx\int\dots\int\psi_m(x)\,dx$$

les constantes dans chacune des intégrales superposées étant fixées arbitrairement. Je dis que l'on aura

$$P_p(x+2K) \;=\; a_p P_p(x) + a_{p-1}P_{p-1}(x) + \dots + a_1,$$

et

$$P_p(x+2iK') \;=\; a'_p P_p(x) + a'_{p-1}P_{p-1}(x) + \dots + a'_1,$$

les $a$ et les $a'$ étant des constantes. Admettons en effet que la proposition soit vraie jusqu'au rang $p-1$, nous allons voir qu'elle est vraie pour le suivant.

On aura

$$P'_p(x) \;=\; \psi_2(x)\int\psi_3(x)\,dx\dots\int\psi_p(x)\,dx$$

et en changeant $x$ en $x+2K$, on aura, d'après ce qui a été admis,

$$P'_p(x+2K)$$

$$= \lambda_2\psi_2(x)\left[b_{p-1}\int\psi_3(x)\,dx\dots\int\psi_p(x)\,dx + b_{p-2}\int\psi_3(x)\,dx\dots\int\psi_{p-1}(x)\,dx + \dots + b_1\right]$$

qui peut s'écrire

$$P'_p(x+2K) \;=\; a_p P'_p(x) + a_{p-1}P'_{p-1}(x) + \dots + a_2 P'_2(x)$$

et en intégrant

$$P_p(x+2K) \;=\; a_p P_p(x) + a_{p-1}P_{p-1}(x) + \dots + a_2 P_2(x) + a_1.$$

On raisonnera de même pour l'accroissement $2iK'$, et la proposition est donc établie, si on remarque qu'elle a lieu évidemment pour $p = 2$.

Il suit de là qu'on aura dans tous les cas pour $y_1, y_2, \dots y_m$ les relations suivantes

$$\begin{aligned}
y_1(x+2K) &= \lambda_{11}\, y_1(x)\\
y_2(x+2K) &= \lambda_{21}\, y_1(x)+\lambda_{22}\, y_2(x)\\
y_3(x+2K) &= \lambda_{31}\, y_1(x)+\lambda_{32}\, y_2(x)+\lambda_{33} y_3(x)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
y_m(x+2K) &= \lambda_{m1} y_1(x)+\lambda_{m2} y_2(x)+\cdots+\lambda_{mm} y_m(x)
\end{aligned}$$

les $\lambda$ étant des constantes, et on aura des relations analogues avec des constantes $\lambda'$ pour l'accroissement $2iK'$.

Arrêtons-nous un instant sur le cas de $m=3$. On aura

$$y_1=\psi_1(x),\quad y_2=\psi_1(x).\int\psi_2(x)\,dx,\quad y_3=\psi_1(x).\int\psi_2(x).\left[\int\psi_3(x)\,dx\right].dx.$$

Si aucune des fonctions $\psi_2$, $\psi_3$ et le produit $\psi_2\psi_3$ ne sont des fonctions de première espèce, ces trois intégrales seront des fonctions de seconde espèce; ce sera si l'on peut dire, le cas général.

Supposons que $\psi_2$ et $\psi_3$ n'étant pas de première espèce, il en soit ainsi pour $\psi_2\psi_3$.

$y_1$ et $y_2$ seront doublement périodiques, et on aura dans l'expression de $y_3$ une intégration portant sur une fonction de première espèce; on en déduit

$$y_3(x+2K)=\lambda_1 y_3(x)+a\,y_1(x),\quad y_3(x+2iK')=\lambda_1' y_3(x)+a' y_1(x)$$

$a$ et $a'$ étant des constantes; $\lambda_1$ et $\lambda_1'$ sont les multiplicateurs de $y_1$.

Si $\psi_2(x)$ est de première espèce, $\psi_3$ ne l'étant pas, $y_3$ sera alors une fonction de seconde espèce et on aura cette fois

$$y_2(x+2K)=\lambda_1 y_2(x)+b\,y_1(x),\quad y_2(x+2iK')=\lambda_1' y_2(x)+b' y_1(x).$$

Soit au contraire $\psi_3$ de première espèce et non $\psi_2$; $y_1$ et $y_2$ sont alors des fonctions doublement périodiques de seconde espèce, et en mettant $y_3$ sous la forme

$$y_3 = \psi_1(x)\left[\int\psi_2(x)\,dx\times\int\psi_3(x)\,dx-\int\psi_3(x)\left\{\int\psi_2(x)\,dx\right\}dx\right]$$

qu'on déduit de la première par une intégration par parties, on voit que

$$\begin{aligned}
y_3(x+2K) &= \lambda_2 y_3(x)+c\,y_2(x)\\
y_3(x+2iK') &= \lambda_2' y_3(x)+c' y_2(x)
\end{aligned}$$

$\lambda_2$ et $\lambda_2'$ étant les multiplicateurs de $y_2(x)$.

Si enfin $\psi_2$ et $\psi_3$ sont de première espèce, on aura

$$\begin{aligned} y_1(x+2K) &= \lambda_1 y_1(x) \\ y_2(x+2K) &= \lambda_1 y_2(x)+a y_1(x) \\ y_3(x+2K) &= \lambda_1 y_3(x)+b y_2(x)+c y_1(x) \end{aligned}$$

et on a des formules analogues pour l'accroissement $2iK'$.

6. Donnons, comme application, l'équation linéaire du troisième ordre

$$\frac{d^3y}{dx^3}+(h-6k^2\operatorname{sn}^2x)\frac{dy}{dx}+h_1 y = 0$$

où $\operatorname{sn}x$ est la première fonction elliptique de module $k$, $h$ et $h_1$ sont deux constantes quelconques. On reconnaîtra sans peine que son intégrale générale est uniforme; trois de ses intégrales auront la forme

$$y = \frac{H(x+\omega)}{\Theta(x)} e^{\left(\lambda-\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right)x}$$

$\lambda$ et $\omega$ étant des constantes convenablement choisies. La substitution de $y$ dans l'équation différentielle donne les relations qui vont servir à déterminer $\lambda$ et $\omega$. On trouve ainsi:

$$h-(1+k^2)+3(\lambda^2-k^2\operatorname{sn}^2\omega) = 0,$$

$$2\lambda^3-6\lambda k^2\operatorname{sn}^2\omega+2\lambda(1+k^2)-4k^2\operatorname{sn}\omega\operatorname{cn}\omega\operatorname{dn}\omega-h_1 = 0.$$

L'élimination de $\lambda$ entre ces équations donne:

$$(8.)\qquad h_1+8h_1k^2\operatorname{sn}\omega\operatorname{cn}\omega\operatorname{dn}\omega+M\operatorname{sn}^2\omega+N = 0.$$

$M$ et $N$ sont des polynômes en $h$, dont la forme se simplifie beaucoup quand on pose comme l'a fait M. *Hermite* pour l'intégration de l'équation de *Lamé* dans le cas de $n=2$

$$h = 4(1+k^2)-6k^2\operatorname{sn}^2a,$$

on a alors

$$M = 16k^4(3k^2\operatorname{sn}^4a-2(1+k^2)\operatorname{sn}^2a+1)$$

et

$$N = 16k^4\operatorname{sn}^4a(1+k^2-2k^2\operatorname{sn}^2a).$$

Le premier membre de l'équation (8.), considéré comme fonction de $\omega$, est une fonction doublement périodique aux périodes $2K$ et $2iK'$, ayant l'infini triple $iK'$; l'équation (8.) a donc trois racines dans le parallélogramme des périodes et l'on obtient bien ainsi trois intégrales de la forme indiquée. En faisant dans ces calculs $h_1=0$, on retombe sur les équations obtenues par M. *Hermite*, dans l'intégration de l'équation de *Lamé* pour $n=2$ (Comptes rendus, 5 avril 1880).

## Chapitre II.

7. Le théorème général qui fait l'objet du chapitre précédent, peut évidemment être étendu à un système d'équations linéaires simultanées que nous pouvons toujours mettre sous la forme

$$(\alpha.)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + \cdots \qquad + a_{nn}x_n, \end{cases}$$

où l'on suppose que les coefficients soient des fonctions doublement périodiques ordinaires de la variable $t$. Si le système d'intégrales de ces équations est uniforme, il y a toujours un système d'intégrales formé de fonctions doublement périodiques de seconde espèce, et on peut trouver la forme analytique des autres intégrales. Je me propose d'étudier particulièrement le système suivant formé de trois équations

$$(\text{I.})\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -Av + Bw, \\ \dfrac{dv}{dt} = +Au - Cw, \\ \dfrac{dw}{dt} = -Bu + Cv. \end{cases}$$

On voit que le déterminant formé par les coefficients de $u$, $v$, $w$ dans le second membre est un déterminant symétrique gauche. Ce système jouit de la propriété de coïncider avec son système adjoint, tel qu'il a été envisagé par M. *Darboux* dans une note sur les équations linéaires simultanées (Comptes rendus, 15 mars 1880). $A$, $B$ et $C$ sont des fonctions doublement périodiques ordinaires de $t$ aux périodes $2K$ et $2iK'$, et je supposerai, ce que l'on pourra reconnaître aisément, que les intégrales sont uniformes. Je me propose d'établir la proposition suivante: Il y a toujours un système d'intégrales des équations (I.), formé de fonctions doublement périodiques de première espèce, les périodes pouvant être dans certains cas $4K$ et $4iK'$ au lieu de $2K$ et $2iK'$.

8. Soit

$$(\text{II.})\quad \begin{Bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{Bmatrix}$$

un système fondamental d'intégrales.

Considérons deux systèmes de solutions $u_m$, $v_m$, $w_m$ et $u_n$, $v_n$, $w_n$, $m$ et $n$ désignant l'un des nombres 1, 2, 3 et $m$ pouvant être égal à $n$. On aura:

$$\text{(III.)} \qquad u_m u_n + v_m v_n + w_m w_n = c_{mn}$$

$c_{mn}$ désignant une constante; on a en effet

$$\frac{du_m}{dt} = -Av_m + Bw_m, \quad \text{et} \quad \frac{du_n}{dt} = -Av_n + Bw_n,$$

$$\frac{dv_m}{dt} = +Au_m - Cw_m, \qquad \frac{dv_n}{dt} = +Au_n - Cw_n,$$

$$\frac{dw_m}{dt} = -Bu_m + Cv_m, \qquad \frac{dw_n}{dt} = -Bu_n + Cv_n.$$

Multiplions les trois premières équations par $u_n$, $v_n$, $w_n$ et les trois secondes par $u_m$, $v_m$ et $w_m$, et ajoutons membre à membre ces six équations; le second membre est identiquement nul et on a, en intégrant, la relation (III.). Il y a manifestement six relations de la forme (III.).

Supposons tout d'abord que le système (II.) soit formé de fonctions doublement périodiques de seconde espèce: soient $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ et $\lambda'_1$, $\lambda'_2$, $\lambda'_3$ leurs multiplicateurs respectifs. Admettons que les constantes $c_{11}$, $c_{22}$, $c_{33}$ ne soient pas toutes nulles; soit, par exemple, $c_{11}$ différent de zéro, la fonction $u_1^2 + v_1^2 + w_1^2$ admettant les multiplicateurs $\lambda_1^2$ et $\lambda_1'^2$, et ayant d'autre part une valeur constante différente de zéro, on devra nécessairement avoir $\lambda_1^2 = \lambda_1'^2 = 1$, et le théorème se trouve, dans ce cas, établi.

Si on a $c_{11} = c_{22} = c_{33} = 0$, il ne peut en être de même à la fois des trois autres constantes; car les six constantes $c$ ne peuvent être simultanément nulles. En effet, s'il en était ainsi, on déduirait des relations (III.)

$$U^2 + V^2 + W^2 = 0,$$

$U$, $V$, $W$ étant un système quelconque d'intégrales, et cette égalité est impossible puisque on peut se donner arbitrairement en un point quelconque les valeurs de $U$, $V$, $W$. Une des constantes $c_{12}$, $c_{23}$, $c_{31}$ sera donc différente de zéro; soit $c_{12}$ par exemple. La fonction

$$u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2$$

admettant les multiplicateurs $\lambda_1 \lambda_2$ et $\lambda'_1 \lambda'_2$, et ayant d'autre part une valeur constante différente de zéro, on devra nécessairement avoir $\lambda_1 \lambda_2 = \lambda'_1 \lambda'_2 = 1$. Ceci posé, considérons le déterminant formé par le tableau (II.). On sait (*Darboux,* Comptes rendus loc. cit.) que le déterminant, formé par un système

fondamental d'intégrales des équations ($\alpha$.), a pour valeur

$$Ce^{\int (a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})dt}$$

où $C$ est une constante différente de zéro.

Les quantités $a_{11}\, a_{22} \dots a_{nn}$ étant toutes nulles dans le système (I.), le déterminant formé par le tableau (II.) a une valeur constante différente de zéro. Mais ce déterminant a pour multiplicateurs $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ et $\lambda'_1 \lambda'_2 \lambda'_3$. On déduit donc de ce qui vient d'être dit

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \lambda'_1 \lambda'_2 \lambda'_3 = 1.$$

Mais nous avons déjà vu que $\lambda_1 \lambda_2 = \lambda'_1 \lambda'_2 = 1$, on a par suite $\lambda_3 = \lambda'_3 = 1$, ce qui établit notre proposition.

9. Nous avons supposé dans ce qui précède qu'un système fondamental d'intégrales était formé de fonctions doublement périodiques de seconde espèce. Supposons que nous n'ayons que deux systèmes d'intégrales de cette nature $u_1$, $v_1$, $w_1$ et $u_3$, $v_3$, $w_3$. Nous pouvons supposer, d'après ce qui a été dit (chapitre I, paragr. 5), que le système fondamental se complète par un système $u_2$, $v_2$, $w_2$ tel que

$$\text{(IV.)} \quad \begin{cases} u_2(t+2K) = \lambda_1 u_2(t) + a\, u_1(t), \\ v_2(t+2K) = \lambda_1 v_2(t) + a\, v_1(t), \\ w_2(t+2K) = \lambda_1 w_2(t) + a w_1(t), \end{cases}$$

$a$ étant une constante, et on a pour l'accroissement $2iK'$ des équations analogues. Pour démontrer ce point, je ferai seulement l'hypothèse, déjà faite implicitement d'ailleurs dans le paragraphe précédent, que les trois équations linéaires, donnant respectivement une des quantités $u$, $v$, $w$ par l'élimination des deux autres dans les équations (I.), ne soient pas toutes trois d'un degré inférieur au troisième. S'il en était autrement, l'intégration du système ne dépendrait que d'équations au plus du second ordre, et je fais abstraction de ce cas. Si l'équation donnant $u$ est du troisième ordre, on pourra exprimer $v$ et $w$ linéairement en fonction de $u$ et de ses dérivées jusqu'au second ordre, les coefficients étant des fonctions doublement périodiques ordinaires, et on voit par suite que les relations relatives au changement de $t$, en $t+2K$, ont la même forme, pour les $v$ et les $w$, que pour les $u$.

Si les constantes $c_{11}$, $c_{33}$ ne sont pas toutes deux nulles, le théorème est immédiatement établi: on le voit, en raisonnant comme précédemment. Supposons donc $c_{11} = c_{33} = 0$. Si $c_{12}$ n'est pas nul, on aura nécessairement

$\lambda_1^2 = \lambda_1'^2 = 1$. En effet l'expression

$$u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2$$

se transforme par le changement de $t$ en $t+2K$ en

$$\lambda_1^2 (u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2)$$

d'après les relations (IV.); d'où l'on conclut $\lambda_1^2 = 1$ et de même $\lambda_1'^2 = 1$, et le théorème serait établi. Supposons maintenant que les constantes $c_{11}$, $c_{33}$ étant toujours nulles, il en soit de même de $c_{12}$. Si $c_{22}$ n'est pas nul, nous allons encore montrer que $\lambda_1^2 = \lambda_1'^2 = 1$. En effet l'expression $u_2^2 + v_2^2 + w_2^2$ devient par le changement de $t$ en $t+2K$, $\lambda_1^2 (u_2^2 + v_2^2 + w_2^2)$, et on a par suite les égalités précédentes.

Enfin si les quatre constantes $c_{11}$, $c_{33}$, $c_{12}$, $c_{22}$ sont nulles, l'une au moins des deux autres constantes $c_{13}$, $c_{23}$ doit être différente de zéro. Si $c_{13}$ n'est pas nul, on aura $\lambda_1 \lambda_3 = 1$, et si enfin $c_{13} = 0$, on a encore $\lambda_1 \lambda_3 = 1$, comme le montre la relation

$$u_2 u_3 + v_2 v_3 + w_2 w_3 \;=\; c_{23}.$$

Mais on a d'autre part, puisque le déterminant formé par le tableau (II.) est une constante, $\lambda_1^2 \lambda_3 = 1$; ce déterminant se trouve en effet multiplié par $\lambda_1^2 \lambda_3$ quand on change $t$ en $t+2K$. On a pareillement $\lambda_1'^2 \lambda_3' = 1$. Or nous venons de voir que l'on a soit $\lambda_1^2 = 1$, soit $\lambda_3^2 = 1$, soit $\lambda_1 \lambda_3 = 1$, et puisque on a toujours $\lambda_1^2 \lambda_3 = 1$; il s'ensuit qu'il y aura toujours un des multiplicateurs $\lambda_1$, $\lambda_3$ égal à l'unité, l'autre étant égal à plus ou moins un.

10. Il peut arriver enfin qu'il n'y ait qu'un seul système d'intégrales doublement périodiques $u_1$, $v_1$, $w_1$; les deux autres systèmes jouiront des propriétés suivantes:

$$u_2(t+2K) = \lambda_1 u_2(t) + a u_1(t), \quad v_2(t+2K) = \lambda_1 v_2(t) + a v_1(t), \quad \ldots,$$
$$u_3(t+2K) = \lambda_1 u_3(t) + b u_2(t) + c u_1(t), \quad \ldots,$$

$a$ et $b$ etc. étant deux constantes.

Des considérations analogues à celles qui viennent d'être développées, en prenant comme point de départ le système des équations (II.), montrent que l'on doit avoir $\lambda_1^2 = 1$, d'autre part la considération du déterminant formé par le système des intégrales, apprend que $\lambda_1^3 = 1$. On a par suite $\lambda_1 = 1$, ce qui établit le théorème.

11. Parmi les systèmes ayant la forme (I.) j'envisage le suivant qui offre en géométrie un certain intérêt.

$$\text{(IV.)}\qquad \frac{du}{ds}=\frac{v}{R},\quad \frac{dv}{ds}=-\frac{u}{R}-\frac{w}{r},\quad \frac{dw}{ds}=\frac{v}{r},$$

si $R$ et $r$ désignent les rayons de courbure et de torsion d'une courbe gauche, que nous supposerons exprimés en fonction de l'arc $s$ de la courbe, on a comme système d'intégrales de ces équations les neuf cosinus que font avec les axes de coordonnées la tangente, la normale principale et la binormale. Supposons que $R$ et $r$ soient des fonctions doublement périodiques de $s$, aux périodes $2K$ et $2iK'$, et telles que le système (IV.) ait ses intégrales uniformes; la proposition que nous venons d'établir fait connaître une propriété de ces courbes: il existe une direction telle que la tangente, la normale principale et la binormale, pour tous les points de la courbe situés à une distance les uns des autres égale à la période réelle $2K$, font avec elle des angles respectivement égaux. Nous venons d'établir en effet que les équations (IV.) admettent un système d'intégrales $a''$, $b''$, $c''$, doublement périodiques de première espèce. Or $R$ et $r$ sont des fonctions de $s$, réelles pour des valeurs réelles de $s$. Si chaque intégrale du système précédent est décomposée en éléments simples, les coefficients des différents termes seront, à l'aide des équations (IV.), déterminés par des équations du premier degré et seront par suite réels. La somme $a''^2+b''^2+c''^2$ aura donc une valeur constante différente de zéro, et, en multipliant ces intégrales par un facteur convenable, cette somme sera égale à l'unité. $a''$, $b''$ et $c''$ pourront donc représenter les cosinus des angles faits par la tangente, la normale principale et la binormale avec une certaine direction; nous supposerons par la suite que celle-ci soit l'axe des $z$.

12. Considérons, comme application des considérations précédentes, le cas où

$$\frac{1}{R}=\frac{2n}{a}\operatorname{dn}\left(\frac{s}{a}\right),\quad \frac{1}{r}=\frac{1}{b}$$

$a$ et $b$ étant deux constantes, $n$ un entier positif, et $\operatorname{dn}x$ étant la troisième fonction elliptique.

Posons

$$\frac{s}{a}=x \quad\text{et}\quad \frac{a}{b}=h,$$

le système (IV.) s'écrira alors

$$\frac{du}{dx}=2n\operatorname{dn}x.v,\quad \frac{dv}{dx}=-2n\operatorname{dn}x.u-hw,\quad \frac{dw}{dx}=hv,$$

les équations ont toutes leurs intégrales uniformes. Je vais d'abord examiner le cas de $n=1$. Nous obtiendrons ainsi une courbe qui a déjà été rencontrée par M. *Hermite* comme cas particulier de la courbe élastique (Comptes rendus, 22 mars 1880. p. 645).

On a d'abord le premier système d'intégrales doublement périodiques

$$u=\operatorname{sn}^2 x+\frac{h^2-k^2}{2k^2},\quad v=\operatorname{sn}x\operatorname{cn}x,\quad w=-\frac{h}{k^2}\operatorname{dn}x.$$

Cherchons maintenant si nous pouvons déterminer les constantes $\lambda$ et $\omega$, de manière à ce qu'on ait pour $u$ l'intégrale

$$u = D_x\frac{H(x+\omega)e^{\left(\lambda-\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right)x}}{\Theta(x)};$$

on aura dans ce cas

$$v = \frac{1}{2\operatorname{dn}x}D_x^2\frac{H(x+\omega)}{\Theta(x)}e^{\left(\lambda-\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right)x},$$

et enfin

$$w = \int\frac{h\,dx}{2\operatorname{dn}x}D_x^2\frac{H(x+\omega)}{\Theta(x)}e^{\left(\lambda-\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right)x}.$$

Les fonctions $u$, $v$, $w$ ne devant avoir d'autres pôles que $x=iK'$, on voit que l'expression

$$D_x^2\frac{H(x+\omega)}{\Theta(x)}e^{\left(\lambda-\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right)x}$$

doit s'annuler pour les racines de $\operatorname{dn}x$; il suffira d'écrire qu'elle s'annule pour $x=K+iK'$.

Or en posant

$$P(x) = \frac{H(x+\omega)}{\Theta(x)}e^{\left(\lambda-\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right)x}$$

on a facilement

$$D_\varepsilon\log P(K+iK'+\varepsilon) = \frac{\Theta_1'(\omega+\varepsilon)}{\Theta_1(\omega+\varepsilon)}-\frac{H_1'(\varepsilon)}{H_1(\varepsilon)}+\lambda-\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}.$$

Or

$$\frac{\Theta_1'(\omega+\varepsilon)}{\Theta_1(\omega+\varepsilon)} = \frac{\Theta_1'(\omega)}{\Theta_1(\omega)}+\varepsilon D_\omega\frac{\Theta_1'(\omega)}{\Theta_1(\omega)}+\cdots;$$

mais on sait que

$$D_\omega\frac{\Theta_1'(\omega)}{\Theta_1(\omega)} = \frac{J}{K}-k^2\operatorname{sn}^2(\omega+K)$$

et par suite

$$D_\omega^{n+1}\frac{\Theta_1'(\omega)}{\Theta_1(\omega)} = -k^2D_\omega^n\operatorname{sn}^2(\omega+K).$$

Il vient donc

$$\frac{\Theta_1'(\omega+\varepsilon)}{\Theta_1(\omega+\varepsilon)}+\lambda-\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} = \lambda-\frac{k^2\operatorname{sn}\omega\operatorname{cn}\omega}{\operatorname{dn}\omega}+\varepsilon\left[\frac{J}{K}-k^2\operatorname{sn}^2(\omega+K)\right]+\cdots.$$

Prenons maintenant l'équation de M. *Weierstrass*

$$H_1(\varepsilon) = H_1(0)e^{\frac{J}{2K}\varepsilon^2}\operatorname{Al}_2(\varepsilon)$$

d'où

$$\frac{H_1'(\varepsilon)}{H_1(\varepsilon)}=\varepsilon\frac{J}{K}+\frac{\operatorname{Al}_2'(\varepsilon)}{\operatorname{Al}_2(\varepsilon)},\quad \text{et on a}\quad \operatorname{Al}_2(\varepsilon)=1-\frac{\varepsilon^2}{1.2}+(1+2k^2)\frac{\varepsilon^4}{1.2.3.4}+\cdots.$$

En remplaçant et intégrant, il vient

$$P(K+iK'+\varepsilon)$$
$$= C\left\{1+\left[\lambda-\frac{k^2\operatorname{sn}\omega\operatorname{cn}\omega}{\operatorname{dn}\omega}\right]\varepsilon+\left[\left(\lambda-\frac{k^2\operatorname{sn}\omega\operatorname{cn}\omega}{\operatorname{dn}\omega}\right)^2+\operatorname{dn}^2(\omega+K)\right]\frac{\varepsilon^2}{1.2}+\cdots\right\}$$

où $C$ est une constante, qu'il est inutile de déterminer.

Puisque l'on doit avoir $D_x^2P(x)=0$ pour $x=K+iK'$, le coefficient de $\varepsilon^2$ doit être nul dans le développement précédent, ce qui nous donne, toute réduction faite,

$$\lambda^2-2\lambda k^2\frac{\operatorname{sn}\omega\operatorname{cn}\omega}{\operatorname{dn}\omega}+1+k^2-\operatorname{dn}^2\omega = 0.$$

Quant à $w$, remarquons tout d'abord que l'intégration n'amènera certainement aucun terme logarithmique, l'expression placée sous le signe d'intégration ayant un résidu nul, relatif au pôle unique $iK'$, comme nous allons le vérifier.

On a en effet, comme l'a montré M. *Hermite*, (Comptes rendus, novembre 1877)

$$P(iK'+\varepsilon) = C'\left[\frac{1}{\varepsilon}+\lambda+\left(\lambda^2+\frac{1+k^2}{3}-k^2\operatorname{sn}^2\omega\right)\frac{\varepsilon}{2}+\cdots\right]$$

où $C'$ est une constante et

$$\frac{1}{\operatorname{dn}(iK'+\varepsilon)} = i\varepsilon\left[1-\frac{k^2-2}{6}\varepsilon^2+\cdots\right]$$

et on voit que le produit $\frac{1}{\operatorname{dn}(iK'+\varepsilon)}\cdot P(iK'+\varepsilon)$ ne contient pas de terme $\frac{1}{\varepsilon}$.

Les trois fonctions $u$, $v$ et $w$ satisfont à la première et à la dernière équation, d'après la manière même dont elles ont été obtenues. Nous avons à écrire maintenant qu'elles satisfont à l'équation

$$\frac{dv}{dx} = -2\operatorname{dn}x.u-hw.$$

Or $u$, $v$ et $w$ sont des fonctions doublement périodiques de seconde espèce; le second multiplicateur de $u$ est différent de celui de $v$ et $w$; mais les trois fonctions $u \operatorname{dn} x$, $v$, et $w$ ont les mêmes multiplicateurs. Pour écrire que cette équation est vérifiée, il nous suffira d'écrire que l'expression

$$(\alpha.) \qquad \frac{dv}{dx} + 2\operatorname{dn} x . u + hw$$

ne devient pas infinie pour $x = iK'$. Or c'est là un calcul qui ne présente aucune difficulté, quand on possède le développement de $P(iK'+\varepsilon)$ que j'ai écrit plus haut. Dans l'expression $(\alpha.)$ le terme en $\frac{1}{\varepsilon^3}$, quand on pose $x = iK'+\varepsilon$, disparaît de lui-même; il n'y a pas de terme en $\frac{1}{\varepsilon^2}$, et nous n'avons donc qu'à égaler à zéro le coefficient de $\frac{1}{\varepsilon}$; il vient ainsi

$$\lambda^2 - k^2 \operatorname{sn}^2 \omega + h^2 + 1 \;=\; 0,$$

équation, qui jointe à celle précédemment trouvée

$$\lambda^2 - 2\lambda k^2 \frac{\operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega}{\operatorname{dn}\omega} + 1 + k'^2 - \operatorname{dn}^2 \omega \;=\; 0$$

va nous permettre de déterminer $\lambda$ et $\omega$.

On trouve en éliminant $\lambda$

$$\operatorname{sn}^2 \omega = \frac{(h^2+k^2)^2}{k^2[(h^2+k^2)^2+4h^2k'^2]}, \quad \text{et d'autre part} \quad \lambda = \frac{(2k^2\operatorname{sn}^2\omega - h^2 - k^2)\operatorname{dn}\omega}{2k^2 \operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega}.$$

La valeur de $\operatorname{sn}^2\omega$ est comprise entre 1 et $\frac{1}{k^2}$, comme on le reconnaît par un calcul facile, et on peut par suite écrire $\omega = K+iv$, $v$ étant réel; la première équation montre aussi que $\lambda = li$, $l$ étant réel. Ayant une première intégrale, on en aura une seconde par le changement de $\omega$ en $-\omega$ et de $\lambda$ en $-\lambda$, ou, ce qui reviendra au même, par le changement de $i$ en $-i$. Désignons par $a$, $a'$, $a''$ les cosinus des angles faits par la tangente avec les axes de coordonnées et soient pareillement $b$, $b'$, $b''$ et $c$, $c'$, $c''$ les cosinus des angles faits avec les mêmes axes par la normale principale et la binormale.

Nous pourrons prendre:

$$a'' = \frac{2k^2}{\sqrt{(h^2-k^2)^2+4h^2}}\left(\operatorname{sn}^2 x + \frac{h^2-k^2}{2k^2}\right), \quad b'' = \frac{2k^2}{\sqrt{(h^2-k^2)^2+4h^2}} \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x,$$

$$c'' = \frac{2h}{\sqrt{(h^2-k^2)^2+4h^2}} \operatorname{dn} x.$$

On prendra ensuite

$$a = C\left[D_x\frac{H_1(x+iv)}{\Theta(x)}e^{\left(li-\frac{\Theta'_1(iv)}{\Theta_1(iv)}\right)x}+D_x\frac{H_1(x-iv)}{\Theta(x)}e^{-\left(li-\frac{\Theta'_1(iv)}{\Theta_1(iv)}\right)x}\right],$$

$C$ étant une constante convenable, et de même

$$a' = \frac{C}{i}\left[D_x\frac{H_1(x+iv)}{\Theta(x)}e^{\left(li-\frac{\Theta'_1(iv)}{\Theta_1(iv)}\right)x}-D_x\frac{H_1(x-iv)}{\Theta(x)}e^{-\left(li-\frac{\Theta'_1(iv)}{\Theta_1(iv)}\right)x}\right].$$

Soient $X$, $Y$, $Z$ les coordonnées d'un point de la courbe; on sait que

$$\frac{dX}{ds} = a, \quad \frac{dY}{ds} = a', \quad \frac{dZ}{ds} = a''$$

$a$, $a'$ et $a''$ étant connues en fonction de $x$ et par suite de $s$; ces formules vont nous donner les valeurs de $X$, $Y$ et $Z$. $Z$ est immédiatement connue; pour $X$ et $Y$, ce sont les combinaisons $X+iY$ et $X-iY$ que je vais obtenir; il vient

$$\frac{dX}{ds}+i\frac{dY}{ds} = 2CD_x\frac{H_1(x+iv)}{\Theta(x)}e^{\left(li-\frac{\Theta'_1(iv)}{\Theta(iv)}\right)x}$$

d'où

$$X+iY = 2Ca\frac{H_1(x+iv)}{\Theta(x)}e^{\left(li-\frac{\Theta'_1(iv)}{\Theta_1(iv)}\right)x},$$

d'où l'on conclut, en divisant ces deux expressions et intégrant

$$X+iY = (X_0+iY_0)\frac{\Theta(0)H_1(iv+x)}{\Theta(x)H_1(iv)}e^{\left(li-\frac{\Theta'_1(iv)}{\Theta_1(iv)}\right)x},$$

$X_0$ et $Y_0$ désignant les valeurs de $X$ et de $Y$ pour $x=0$. On aura pareillement

$$X-iY = (X_0-iY_0)\frac{\Theta(0)H_1(iv-x)}{\Theta(x)H_1(iv)}e^{-\left(li-\frac{\Theta'_1(iv)}{\Theta_1(iv)}\right)x}.$$

Ce sont bien les valeurs trouvées par M. *Hermite* pour les coordonnées de l'élastique (Comptes rendus, tome XC, page 644).

13. Supposons maintenant que $n$ soit un entier positif quelconque.

Le système d'intégrales doublement périodiques de première espèce, aura la forme

$$u = A_0\operatorname{sn}^{2n}x+A_1\operatorname{sn}^{2n-2}x+\cdots+A_n,$$

$$v = (A_0\operatorname{sn}^{2n-1}x+\cdots)\operatorname{cn}x,$$

$$w = \frac{(-1)^n}{2n-1}hA_0\operatorname{dn}^{2n-1}x+\cdots$$

les puissances se succédant de deux en deux dans chacun de ces polynômes. En effet d'après la forme de ces expressions, ces quantités vérifient la première et la troisième des équations formant le système (IV.). Il reste à substituer ces expressions dans la seconde équation. On voit tout d'abord immédiatement que $\operatorname{dn} x$ sera en facteur et les deux membres seront des polynômes pairs de degré $2n$. Les termes de degré $2n$ disparaissent d'eux-mêmes et il reste donc $n$ coefficients à annuler, ce qui permettra précisément de déterminer les coefficients entrant dans $u$.

On pourra prendre d'autre part

$$(\alpha.)\quad \begin{cases} u = D_x^{2n-1}\dfrac{H(x+\omega)}{\Theta(x)}e^{\left(\lambda-\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right)x}+B_1 D_x^{2n-3}\dfrac{H(x+\omega)}{\Theta(x)}e^{\left(\lambda-\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right)x}+\cdots \\ \qquad\qquad \cdots+B_{n-1}D_x\dfrac{H(x+\omega)}{\Theta(x)}e^{\left(\lambda-\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right)x}. \end{cases}$$

Pour former les équations donnant $\lambda$ et $\omega$, on suivra la même marche que dans le cas de $n=1$. De cette valeur de $u$ se déduisent immédiatement la valeur de $u$ et celle de $w$; la condition pour que $v$ n'ait d'autre pôle que les pôles de $\operatorname{dn} x$, donne une première relation entre $\lambda$, $\omega$ et les coefficients $B_1, B_2, \dots B_{n-1}$. Les valeurs de $u$, $v$ et $w$ ainsi obtenues satisfont, par la manière même dont on les a obtenues, à la première et à la dernière des équations (IV.); il faut maintenant les substituer dans la seconde de ces équations. On écrit, comme plus haut, que l'expression

$$\frac{dv}{dx}+2n\operatorname{dn} x.u+hw,$$

ne devient pas infinie pour $x=iK'$. Or en posant $x=iK'+\varepsilon$, le développement suivant les puissances de $\varepsilon$, commencera par un terme en $\frac{1}{\varepsilon^{2n-1}}$ le terme en $\frac{1}{\varepsilon^{2n+1}}$ disparaissant de lui-même. Nous aurons donc à égaler à zéro les coefficients de $\frac{1}{\varepsilon^{2n-1}}, \frac{1}{\varepsilon^{2n-3}}, \dots \frac{1}{\varepsilon}$, ce qui nous donnera par suite $n$ relations. Mais on voit de suite que les coefficients de $\frac{1}{\varepsilon^{2n-1}}$, $\frac{1}{\varepsilon^{2n-3}}, \dots \frac{1}{\varepsilon^3}$ ne dépendent pas de $\lambda$ et de $\omega$ et contiennent seulement linéairement $B_1, B_2, \dots B_{n-1}$. En égalant le premier coefficient à zéro, on obtient $B_1$ qui sera un polynôme du premier degré en $h$, le coefficient de $\frac{1}{\varepsilon^{2n-3}}$ fait connaître $B_2$ qui est un polynôme du second degré en $h$, et enfin on a de même pour $B_{n-1}$ un polynôme en $h$ de degré $n-1$. Egalons

maintenant à zéro le coefficient de $\frac{1}{\varepsilon}$, nous aurons une seconde relation entre $\lambda$ et $\omega$, qui, jointe à celle précédemment trouvée, permet de déterminer $\lambda$ et $\omega$. La forme de ces relations devient extrêmement compliquée quand $n$ est un nombre suffisamment grand. Toutefois on peut voir à priori quelles valeurs elles vont donner pour $\lambda$ et $\omega$. Comme il ne peut y avoir que deux intégrales de la forme ($\alpha$.), l'équation donnant $\lambda$ sera du second degré et le premier membre de l'équation en $\omega$ sera une fonction doublement périodique ordinaire aux périodes $2K$ et $2iK'$ ayant seulement le pôle double $iK'$ dans le parallélogramme des périodes. Mais l'équation différentielle donnant $u$, obtenue en éliminant $v$ et $w$ entre les équations (IV.), ne change pas par le changement de $x$ en $-x$. Or au lieu de changer $x$ en $-x$ dans l'expression ($\alpha$.), on arrive au même résultat en changeant $\lambda$ et $\omega$ en $-\lambda$ et $-\omega$. Donc l'équation en $\lambda$ ne contiendra pas de terme du premier degré et $\lambda^2$ sera alors une fonction rationnelle de $h$. Quant à l'équation en $\omega$, elle devra nécessairement avoir la forme $A\,\mathrm{sn}^2\omega+B=0$ et $\mathrm{sn}^2\omega$ sera par suite, comme $\lambda^2$, une fonction rationnelle de $h$.

Ceci posé, soit une première intégrale $u$, que nous pouvons désigner par $D_xF(x,\lambda,\omega)$, une seconde intégrale sera $D_xF(x,-\lambda,-\omega)$.

Gardant les mêmes notations que précédemment, nous prendrons

$$\begin{aligned} a &= A\,D_xF(x,\lambda,\omega)+B\,D_xF(x,-\lambda,-\omega)\\ a' &= A'D_xF(x,\lambda,\omega)+B'D_xF(x,-\lambda,-\omega)\end{aligned}$$

les $A$ et $B$ étant des constantes convenables; et on peut prendre

$$a'' = A_0\,\mathrm{sn}^{2n}x+\cdots,$$

la somme $a^2+a'^2+a''^2$ devant être égale à la constante 1; on en conclut que

$$A^2+A'^2=0 \quad \text{et} \quad B^2+B'^2=0$$

car les coefficients des termes doublement périodiques de seconde espèce dans cette somme doivent être nécessairement nuls. Nous prendrons

$$\begin{aligned} a &= AD_xF(x,\lambda,\omega)+BD_xF(x,-\lambda,-\omega)\\ a' &= i[AD_xF(x,\lambda,\omega)-BD_xF(x,-\lambda,-\omega)]\end{aligned}$$

$A$ et $B$ étant deux constantes qu'il est inutile de déterminer; car nous allons comme plus haut former les combinaisons $X+iY$ et $X-iY$. Il vient ainsi

$$X + iY = (X_0 + iY_0)\frac{F(x, -\lambda, -\omega)}{F(0, -\lambda, -\omega)}$$

$$X - iY = (X_0 - iY_0)\frac{F(x, \lambda, \omega)}{F(0, \lambda, \omega)}$$

$X_0$ et $Y_0$ désignant les valeurs de $X$ et de $Y$ pour $x = 0$. Quant à $Z$, on l'obtient par l'intégration de la fonction doublement périodique $a''$. Nous avons montré plus haut comment on obtenait $n$ équations homogènes entre les coefficients $A_0, A_1, \dots A_n$; on achèvera de les déterminer en écrivant que $a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1$, $b''$ et $c''$ étant les valeurs de $v$ et $w$ correspondant à $u = a''$.

Toulouse, le 29 mai 1880.

# Zur Theorie der reciproken Verwandtschaft.

(Von Herrn *Rosanes* in Breslau.)

---

Die durch eine bilineare ternäre Form vermittelte geometrische Beziehung zweier Ebenen auf einander ist (unter dem Namen der reciproken Verwandtschaft) wiederholt Gegenstand algebraischer wie auch geometrisch constructiver Behandlung gewesen.*) Dieselbe erstreckte sich einerseits auf die Frage, in welcher Weise die Transformation aus gewissen einfachen, der Zahl nach genügenden Daten zu construiren sei. Nach einer anderen Richtung bewegen sich diejenigen Untersuchungen, welche das Zusammenfallen der beiden auf einander bezogenen Gebiete zur Voraussetzung haben. Dagegen scheint eine Reihe von Eigenschaften der allgemeinen reciproken Transformation unbeachtet geblieben zu sein, welche ebenso sehr durch ihre Einfachheit, wie durch ihre Analogie mit bekannten Sätzen aus der Theorie der Kegelschnitte bemerkenswerth sind. Die auf diese letzteren bezüglichen geometrischen Figuren erfahren in dem Sinne eine Verallgemeinerung, dass an Stelle eines einzelnen Elementes (Punkt, Gerade) ein Paar von Elementen tritt, aus deren Zusammenfallen umgekehrt jene hervorgehen. Die so gewonnene Erweiterung erweist sich auch als geeignet, gewisse Eigenschaften der Kegelschnitte in ein besseres Licht zu setzen (vgl. §. 3.) und liefert (§. 4. Satz II.) einen anscheinend neuen Satz über die conjugirten Punktepaare einer Curve zweiter Ordnung. Die Anwendung auf quaternäre Formen, welche Erweiterungen von Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung ergiebt, ist in beschränkterem Masse ausgeführt worden. Die Kenntniss der Systeme abhängiger Punktepaare, wie sie in einer früheren Arbeit („*Ueber abhängige Punktsysteme*", dieses Journal

---

*) Neben den in den folgenden Seiten citirten Arbeiten von *Schröter* und *Hirst* seien noch besonders erwähnt *Seydewitz*, (Archiv f. Math. Th. VIII.); *Pfaff*, Neuere Geometrie, Erlangen 1867; *Reye*, Geometrie der Lage, Hannover 1880; *Fiedler*, Die darstellende Geometrie, Leipzig 1875.

Band 88) definirt sind, erfährt vermittelst der hier eingeführten Begriffe eine Ergänzung. Die Construction des von fünf Punktepaaren abhängigen sechsten Paares wird auf eine einfache bekannte Aufgabe zurückgeführt, wodurch zugleich die algebraische Berechnung sich vereinfacht. Für die räumliche Figur von acht abhängigen Punktepaaren ergiebt sich hier der in genannter Arbeit noch unbestimmt gebliebene Grad der dort auftretenden Flächen mit Leichtigkeit.

## §. 1.

Im Anschluss an die in der Arbeit *„Ueber linear-abhängige Punktsysteme“* *) eingeführte Bezeichnungsweise mögen auch hier $x(x_1 x_2 x_3)$, $y(y_1 y_2 y_3)$ die Punkte zweier Ebenen $X$, $Y$, $u(u_1 u_2 u_3)$, $v(v_1 v_2 v_3)$ die Geraden derselben heissen. Zwei bilineare Formen

$$f(x,y) = \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa y_\lambda$$

und

$$\varphi(u,v) = \sum_{\varkappa,\lambda} \alpha_{\varkappa,\lambda} u_\varkappa v_\lambda, \qquad \begin{pmatrix}\varkappa = 1,2,3\\ \lambda = 1,2,3\end{pmatrix}$$

von denen sich die eine auf Punkt-, die andere auf Liniencoordinaten bezieht, heissen *„einander conjugirt“* **), sobald deren Coefficienten die Gleichung befriedigen

$$\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} \cdot \alpha_{\varkappa,\lambda} = 0.$$

Zerfällt die Form $f(x,y)$ in die beiden Geraden $p$, $q$, d. h. ist $f(x,y) = p(x) . q(y)$ und gleichzeitig $\varphi(u,v)$ in die beiden Punkte $\pi$, $\varrho$, oder $\varphi(u,v) = u(\pi) . v(\varrho)$, so geht der Ausdruck $\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} \alpha_{\varkappa,\lambda}$ über in $p(\pi) . q(\varrho)$, d. h.

*„Zerfällt von zwei conjugirten Formen die eine in das Geradenpaar $(p,q)$, die andere in das Punktepaar $(\pi,\varrho)$, so liegt entweder der Punkt $\pi$ auf der Geraden $p$ oder $\varrho$ auf $q$, und umgekehrt.“*

Die Gesammtheit der Punkte $y^i$, welche den Punkt $x^i$ zu einem *„Nullpaar“* ***) der Form $f(x,y)$ ergänzen, liefert die Gerade

$$f(x^i, y) = 0,$$

*„die Polare des Punktes“* $x^i$. Die auf diese Weise vermittelte Beziehung der beiden Ebenen, wonach jedem Punkte der einen eine Gerade in der andern, jeder Geraden ein Punkt (*der Pol*) entspricht, wird in der Regel als die der

*) Dieses Journ. Band 88 pag. 241.
**) Vgl. das. pag. 246.
***) Ebendas. pag. 245.

„*Reciprocität*" oder auch „*Correlation*" (*Hirst*) bezeichnet. Vermöge der Form $\varphi(u, v)$ in Liniencoordinaten entspricht der Geraden $u^i$ der $X$-Ebene der *Pol*

$$\varphi(u^i, v) = 0.$$

Die bilineare Form

$$(1.) \qquad \Phi(u, v) = \sum_{\varkappa,\lambda} A_{\varkappa,\lambda} u_\varkappa v_\lambda,$$

deren Coefficienten $A_{\varkappa,\lambda}$ die Adjuncten der Grössen $a_{\varkappa,\lambda}$ in der Determinante $A = \Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33}$ sind, heisst *die adjungirte Form von* $f(x, y)$, derart dass die adjungirte Form der adjungirten bis auf einen constanten Factor mit der ursprünglichen übereinstimmt. Offenbar besteht die Relation:

„*Stehen* $x$, $v$ *in der Beziehung von Pol und Polare in Bezug auf die Form* $f(x, y)$, *so findet zwischen ihnen ein gleiches Verhältniss statt in Bezug auf die adjungirte Form* $\Phi(u, v)$."

„*Die adjungirte Form einer speciellen* $f(x, y) = p(x).q(y)$ *verschwindet identisch. Zerfällt* $f(x, y)$ *in eine Summe specieller Formen*

$$f(x, y) = \varrho_1 p^1(x).q^1(y) + \varrho_2 p^2(x).q^2(y) + \cdots + \varrho_n p^n(x).q^n(y),$$

*so ist die adjungirte Form*

$$(2.) \qquad \Phi(u, v) = \tfrac{1}{2} \sum_{\varkappa,\lambda} \varrho_\varkappa . \varrho_\lambda (u p^\varkappa p^\lambda).(v q^\varkappa q^\lambda)," \quad \binom{\varkappa = 1, 2, \ldots n}{\lambda = 1, 2, \ldots n}$$

wo $(u p^\varkappa p^\lambda)$ die Determinante $\Sigma \pm u_1 p_2^\varkappa p_3^\lambda$ bedeutet.

## §. 2.

Drei Geraden $a^1$, $a^2$, $a^3$ der $X$-Ebene und drei Geraden $b^1$, $b^2$, $b^3$ der $Y$-Ebene bilden „*ein polares System*" *der Form* $f(x, y)$, oder *die durch sie gebildeten Dreiseite sind* „*einander polar*", sobald in Bezug auf diese Form die Seiten des einen die Polaren der Ecken des andern bilden. In dem entsprechenden Verhältniss heissen *zwei Dreiecke einander polar* oder *ein polares System einer Form* $\varphi(u, v)$.

Bezeichnet man mit $\alpha_k^i$ die Adjuncten der Grössen $a_k^i$ in der Determinante $\Sigma \pm a_1^1 a_2^2 a_3^3$, mit $\beta_k^i$ die der $b_k^i$ in der Determinante $\Sigma \pm b_1^1 b_2^2 b_3^3$, derart dass $\alpha^1 \alpha^2 \alpha^3$; $\beta^1 \beta^2 \beta^3$ resp. die Ecken der beiden Dreiseite $a^1 a^2 a^3$, $b^1 b^2 b^3$ bedeuten, so ergeben sich sechs Punktepaare

$$(\alpha^1 \beta^2), \quad (\alpha^1 \beta^3), \quad (\alpha^2 \beta^3), \quad (\alpha^2 \beta^1), \quad (\alpha^3 \beta^1), \quad (\alpha^3 \beta^2),$$

deren jedes ein *Nullpaar*, d. h. eine specielle conjugirte Form von $f(x, y)$ darstellt. Da dieselben zugleich (solange weder $a^1 a^2 a^3$, noch $b^1 b^2 b^3$ durch

einen Punkt gehen) linear independent sind*), so bilden sie eine sechsgliedrige Gruppe. Nach der oben gemachten Bemerkung ist aber offenbar jede der drei Formen

$$a^1(x)\,b^1(y),\quad a^2(x)\,b^2(y),\quad a^3(x)\,b^3(y)$$

den sämmtlichen sechs Punktepaaren conjugirt, folglich ergiebt sich der Satz:

I. „*Bilden* $a^1a^2a^3$, $b^1b^2b^3$ *ein polares System der Form* $f(x,y)$, *so lässt sich dieselbe in die Gestalt bringen:*

$$(3.)\qquad f(x,y) = \varrho_1 a^1(x)\,b^1(y)+\varrho_2 a^2(x)\,b^2(y)+\varrho_3 a^3(x)\,b^3(y)."$$

Selbstverständlich ist die Umkehrung:

I^a. „*Zerlegt man die Form* $f(x,y)$ *in drei specielle Formen, so liefern die sechs Geraden, welche dieselben zusammensetzen, ein Paar polarer Dreiseite.*"

Wendet man auf (3.) die in (2.) gegebene Beziehung an, so ergiebt sich

$$\Phi(u,v) = \varrho_2\varrho_3 u(\alpha^1)\,v(\beta^1)+\varrho_3\varrho_1 u(\alpha^2)\,v(\beta^2)+\varrho_1\varrho_2 u(\alpha^3)\,v(\beta^3)$$

woraus hervorgeht, dass die conjugirte Form sich aus den drei speciellen Formen $u(\alpha^i)\,v(\beta^i)$ zusammensetzt. Unter Benutzung des voranstehenden Satzes findet man somit (was auch sonst evident ist):

II. „*Bilden zwei Dreiseite ein polares System einer Form, so stehen dieselben in analoger Beziehung zu der adjungirten Form.*"

Hieraus folgt:

III. „*Bilden* $\begin{matrix}a^1a^2a^3\\ b^1b^2b^3\end{matrix}$, $\begin{matrix}a^4a^5a^6\\ b^4b^5b^6\end{matrix}$ *zwei polare Systeme (zwei Paar polarer Dreiseite) einer und derselben Form* $f(x,y)$, *so bilden die sechs Geradenpaare* $(a^1,b^1)$, $(a^2,b^2)$, $\dots$ $(a^6,b^6)$ *ein abhängiges System***)."

Denn da vermöge dieser Voraussetzungen gleichzeitig die beiden Relationen bestehen

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \varrho_1 a^1(x)\,b^1(y)+\varrho_2 a^2(x)\,b^2(y)+\varrho_3 a^3(x)\,b^3(y)\\ &= \varrho_4 a^4(x)\,b^4(y)+\varrho_5 a^5(x)\,b^5(y)+\varrho_6 a^6(x)\,b^6(y), \end{aligned}$$

so ergiebt sich in der That eine lineare Abhängigkeit zwischen den sechs Formen:

$$\varrho_1 a^1(x)\,b^1(y)+\cdots+\varrho_3 a^3(x)\,b^3(y)-\varrho_4 a^4(x)\,b^4(y)-\cdots = 0.$$

---

*) Eine lineare Dependenz zwischen den sechs Formen

$$\begin{aligned} &\sigma_{12}u(\alpha^1)v(\beta^2)+\sigma_{13}u(\alpha^1)v(\beta^3)+\sigma_{23}u(\alpha^2)v(\beta^3)\\ &+\sigma_{21}u(\alpha^2)v(\beta^1)+\sigma_{31}u(\alpha^3)v(\beta^1)+\sigma_{32}u(\alpha^3)v(\beta^2) = 0 \end{aligned}$$

führt, indem man z. B. $u(\alpha^1)=0$, $u(\alpha^2)=0$ setzt, sogleich auf das Zusammenfallen des einen der beiden Dreiecke.

**) Vgl. in Betreff dieser Bezeichnung a. a. O. pag. 249.

Da aber auch die Ecken jener Dreiseite $\frac{\alpha^1\alpha^2\alpha^3}{\beta^1\beta^2\beta^3}$, $\frac{\alpha^4\alpha^5\alpha^6}{\beta^4\beta^5\beta^6}$ (wo $\alpha^4$ die Ecke $(a^5, a^6)$ etc. bedeutet) zwei polare Systeme einer und derselben, nämlich der adjungirten Form bilden, so gilt der Satz:

IV. *„Irgend zwei polare Systeme einer und derselben Form (Paare polarer Dreiecke oder Dreiseite) haben die Eigenschaft, dass ebensowohl deren zwölf Ecken-, als auch deren Seitenpaare ein abhängiges System von sechs Punkte- resp. Geradenpaaren bilden."*

Umgekehrt:

V. *„Zerlegt man ein abhängiges System von sechs Punktepaaren (oder Geradenpaaren)* $(\alpha^1, \beta^1)$, ... $(\alpha^6, \beta^6)$ *willkürlich in zwei Gruppen von je drei Paaren* $(\alpha^1, \beta^1)$, $(\alpha^2, \beta^2)$, $(\alpha^3, \beta^3)$; $(\alpha^4, \beta^4)$, $(\alpha^5, \beta^5)$, $(\alpha^6, \beta^6)$, *so liefern dieselben zwei Paare polarer Dreiecke (oder Dreiseite) einer und derselben Form."*

Die Verbindung der Sätze IV. und V. gestattet nun, den bemerkenswerthen Satz auszusprechen:

VI. *„Zerlegt man die sechs Punktepaare* $(\alpha^1, \beta^1)$, $(\alpha^2, \beta^2)$, ... $(\alpha^6, \beta^6)$ *eines abhängigen Systems beliebig in zwei Gruppen von je drei Paaren* $\frac{\alpha^1\alpha^2\alpha^3}{\beta^1\beta^2\beta^3}$, $\frac{\alpha^4\alpha^5\alpha^6}{\beta^4\beta^5\beta^6}$, *so bilden die zwölf Seiten dieser beiden Paare von Dreiecken*

$$(a^1, b^1), \quad (a^2, b^2), \quad . \; . \; . \quad (a^6, b^6)$$

(wo $a^1 a^2 a^3$ die Seiten des Dreiecks $\alpha^1\alpha^2\alpha^3$, $a^4 a^5 a^6$ die von $\alpha^4\alpha^5\alpha^6$ bedeuten) *ein abhängiges System von sechs Geradenpaaren."*

Indem die dual gegenüberstehenden Sätze übergangen werden, sei nur noch darauf hingewiesen, dass die unter I.—VI. ausgesprochenen Sätze in bekannte aus der Theorie der Kegelschnitte übergehen, sobald die beiden Punkte $\alpha^i$ (resp. $a^i$) und $\beta^i$ (resp. $b^i$) auf einander fallen. Der an letzter Stelle angegebene Satz führt dann auf den bekannten Fundamentalsatz der Curven zweiten Grades: *„Liegen die sechs Ecken zweier Dreiecke auf einer Curve zweiter Ordnung, so berühren die sechs Seiten eine Curve zweiter Klasse."*

## §. 3.

Sind drei Geradenpaare $\frac{a^1 a^2 a^3}{b^1 b^2 b^3}$ willkürlich gegeben, so giebt es eine dreigliedrige Gruppe von Formen $f(x, y)$, nämlich:

$$(3.) \qquad f(x, y) = \varrho_1 a^1(x) b^1(y) + \varrho_2 a^2(x) b^2(y) + \varrho_3 a^3(x) b^3(y),$$

in Bezug auf welche jene ein polares System bilden. Die Form wird

dann und nur dann eine symmetrische, sobald die drei Gleichungen erfüllt werden:

$$(4.)\quad \begin{cases} \varrho_1(a^1,b^1)_1+\varrho_2(a^2,b^2)_1+\varrho_3(a^3,b^3)_1 = 0 \\ \varrho_1(a^1,b^1)_2+\varrho_2(a^2,b^2)_2+\varrho_3(a^3,b^3)_2 = 0 \\ \varrho_1(a^1,b^1)_3+\varrho_2(a^2,b^2)_3+\varrho_3(a^3,b^3)_3 = 0 \end{cases} \quad (a^i,b^i)_1 = a^i_2 b^i_3 - a^i_3 b^i_2, \text{ etc.}$$

d. h. zwei beliebige Dreiseite lassen sich im Allgemeinen nicht als polares System einer symmetrischen Form ansehen. Damit dies der Fall sei, muss die Determinante des Systems (4.) verschwinden. Lässt man nun die beiden Gebiete $X$, $Y$ auf einander fallen (so dass zugleich die Coordinatensysteme zusammenfallen), so sind die Nullpaare einer symmetrischen Form identisch mit den conjugirten Punktepaaren eines gewissen Kegelschnitts. Die polaren Systeme sind dann nichts als Paare polarer (einander conjugirter) Dreiecke desselben: Setzt man daher die in (4.) auftretenden Grössen $(a^i,b^i)_k=\pi^i_k$, derart dass $\pi^i$ als der Schnittpunkt $(a^i,b^i)$ anzusehen ist, so zeigt das System (4.) ohne jede weitere Rechnung den bekannten Satz:

*„Zwei in Bezug auf einen Kegelschnitt einander polare Dreiecke sind in perspectivischer Lage“* — aber ebenso einfach dessen Umkehrung: *„Zwei in perspectivischer Lage befindliche Dreiecke lassen sich stets als polare Dreiecke eines Kegelschnitts ansehen“.*

Gleichzeitig ergiebt sich noch ohne jede Rechnung die Gleichung desjenigen Kegelschnitts, in Bezug auf den die beiden von $a^1a^2a^3$, $b^1b^2b^3$ gebildeten Dreiseite einander polar sind, durch Einsetzung der Werthe von $\varrho_1\varrho_2\varrho_3$ aus dem System (4.) in die Gleichung (3.). Durch die Gleichsetzung $y=x$ erhält man die Gleichung in der Gestalt:

$$p_1a^1(x)b^1(x)+p_2a^2(x)b^2(x)+p_3a^3(x)b^3(x)=0,$$

wo $p_1p_2p_3$ die z. B. aus der Matrix $\begin{vmatrix}\pi^1_1 & \pi^2_1 & \pi^3_1 \\ \pi^1_2 & \pi^2_2 & \pi^3_2\end{vmatrix}$ gebildeten Determinanten bedeuten; d. h. *„Der Kegelschnitt, in Bezug auf den zwei Dreiecke einander conjugirt sind, gehört der durch die drei Paare entsprechender Seiten bestimmten Gruppe an.“*

Aus dem Satze III. folgt aber auch, sobald die Form $f(x,y)$ symmetrisch angenommen wird:

*„Die Ecken zweier Paare in Bezug auf einen Kegelschnitt einander polarer Dreiecke bilden ein abhängiges System von sechs Punktepaaren; die Seiten ein abhängiges System von ebensovielen Geradenpaaren.“*

Der oben unter (V.) gefundene Satz, wonach ein abhängiges System von sechs Paaren von Elementen und zwei Paar polarer Systeme vollkommen aequivalent sind, gestattet eine vereinfachte Construction des aus fünf Punktepaaren folgenden abhängigen sechsten. Es seien nämlich $(\alpha^1, \beta^1), \dots (\alpha^5, \beta^5)$ die gegebenen fünf Paare, $(\alpha^6, \beta^6)$ das abhängige sechste und $f(x, y)$ diejenige Form, in Bezug auf welche sowohl $\begin{smallmatrix}\alpha^1\alpha^2\alpha^3\\ \beta^1\beta^2\beta^3\end{smallmatrix}$ als $\begin{smallmatrix}\alpha^4\alpha^5\alpha^6\\ \beta^4\beta^5\beta^6\end{smallmatrix}$ polare Systeme bilden. Da nun in Bezug auf $f(x, y)$ die Geraden $(\beta^2, \beta^3)$, $(\beta^3, \beta^1)$, $(\beta^1, \beta^2)$ die Polaren von $\alpha^1$, $\alpha^2$, $\alpha^3$ sein sollen, gleichzeitig aber die Polaren von $\alpha^4$, $\alpha^5$ resp. durch $\beta^5$, $\beta^4$ gehen müssen, so ist $f(x, y)$ hierdurch bestimmt, und man gelangt sonach zu folgender einfachen Construction:

*„Sind $(\alpha^1, \beta^1), \dots (\alpha^5, \beta^5)$ fünf Punktepaare, so construire man diejenige reciproke Verwandtschaft der beiden Gebiete, in Bezug auf welche die Geraden $(\beta^2, \beta^3)$, $(\beta^3, \beta^1)$, $(\beta^1, \beta^2)$ resp. die Polaren der Punkte $\alpha^1$, $\alpha^2$, $\alpha^3$ sind, während die Polaren von $\alpha^4$, $\alpha^5$ resp. durch $\beta^5$, $\beta^4$ gehen. In der hierdurch eindeutig definirten Beziehung bestimme man $\alpha^6$, den Pol der Geraden $(\beta^4, \beta^5)$, und $\beta^6$, den Pol von $(\alpha^4, \alpha^5)$. Alsdann bilden $(\alpha^6, \beta^6)$ das abhängige sechste aus $(\alpha^1, \beta^1), \dots (\alpha^5, \beta^5)$ folgende Paar.“*

Die hierin enthaltene Construction ist nicht nur viel übersichtlicher als die früher angegebene, sondern sie reducirt die Aufgabe auf eine der als kanonisch anzusehenden Constructionen einer reciproken Verwandtschaft aus acht elementaren Stücken*).

Auch die *Berechnung der Coordinaten des abhängigen sechsten Paares* erleichtert sich durch die neu gewonnene Auffassung nicht unerheblich. Nennt man nämlich $a^i_k$ die Coordinaten der Seiten des Dreiecks $\alpha^1\alpha^2\alpha^3$, derart dass $a^i_k$ die Adjuncte von $\alpha^i_k$ in der Determinante $\Sigma \pm \alpha^1_1\alpha^2_2\alpha^3_3$ ist, und bezeichnet ferner mit $a^6_k$ die Adjuncte von $x_k$ in der Determinante $\Sigma \pm x_1\alpha^4_2\alpha^5_3$, so ist die Form $f(x, y)$, da $\begin{smallmatrix}a^1a^2a^3\\ b^1b^2b^3\end{smallmatrix}$ ein polares System derselben sein soll, von der Gestalt

$$(5.)\qquad f(x, y) = \varrho_1 a^1(x)\, b^1(y) + \varrho_2 a^2(x)\, b^2(y) + \varrho_3 a^3(x)\, b^3(y),$$

worin die Grössen $\varrho$ sich aus den beiden weiteren Forderungen, dass $(\alpha^4, \beta^5)$, $(\alpha^5, \beta^4)$ Nullpaare sein müssen, durch die beiden Gleichungen bestimmen:

---

*) Vgl. hierüber *Schröter, Problematis geometrici etc.* dieses Journal Bd. 62, sowie *Hirst, On the Correlation of two planes,* Proc. of the London Mathem. Soc. T. V.

$$(5^a.)\quad \begin{cases} \rho_1 a^1(\alpha^4)\, b^1(\beta^5) + \rho_2 a^2(\alpha^4)\, b^2(\beta^5) + \rho_3 a^3(\alpha^4)\, b^3(\beta^5) = 0, \\ \rho_1 a^1(\alpha^5)\, b^1(\beta^4) + \rho_2 a^2(\alpha^5)\, b^2(\beta^4) + \rho_3 a^3(\alpha^5)\, b^3(\beta^4) = 0. \end{cases}$$

Aus der hiernach definirten Form $f(x, y)$ ist sodann der Pol der Geraden $(\beta^4, \beta^5)$ zu bestimmen. Da nun die adjungirte Form $\Phi(u, v)$ von $f(x, y)$ nach einer alten Formel gegeben ist durch:

$$\Phi(u, v) = \rho_2\rho_3 u(\alpha^1) v(\beta^1) + \rho_3\rho_1 u(\alpha^2) v(\beta^2) + \rho_1\rho_2 u(\alpha^3) v(\beta^3),$$

so erhält man durch die Einsetzung $v_i = (\beta^4, \beta^5)_i$ *die Gleichung des Punktes* $\alpha^6$ *in der Form:*

$$\sum_{i=1}^{i=3} \frac{1}{\rho_i} u(\alpha^i)(\beta^i \beta^4 \beta^5) = 0.$$

*Ebenso für* $\beta^6$ *die Gleichung:*

$$\sum_{i=1}^{i=3} \frac{1}{\rho_i} v(\beta^i)(\alpha^i \alpha^4 \alpha^5) = 0,$$

worin die Grössen $\rho$ aus (5.) zu berechnen sind.

Die lineare Abhängigkeit zwischen sechs Elementenpaaren wurde in dem Vorangehenden hauptsächlich in der Weise benutzt, dass dieselben in zwei Gruppen von je drei Paaren zerlegt wurden. Eine Zerlegung in drei Theile, von denen jeder aus zwei Paaren sich zusammensetzt, führt auf die folgende Betrachtung:

Nennt man eine bilineare Form *zweitheilig, sobald sie sich aus zwei speciellen* (zerfallenden) *zusammensetzen lässt,* so existiren in der zweigliedrigen Gruppe der beiden Formen $f(x, y)$, $f'(x, y)$ drei zweitheilige. Setzt man demgemäss

$$\begin{aligned} f(x, y) + \rho\ f'(x, y) &= a^1(x).b^1(y) + a^2(x).b^2(y) \\ f(x, y) + \rho' f'(x, y) &= a^3(x).b^3(y) + a^4(x).b^4(y) \\ f(x, y) + \rho'' f'(x, y) &= a^5(x).b^5(y) + a^6(x).b^6(y), \end{aligned}$$

so ergeben diese Gleichungen unmittelbar den Satz:

*„In einer zweigliedrigen Gruppe von bilinearen Formen treten drei zweitheilige auf. Die sie zusammensetzenden speciellen Formen* (die nicht vollkommen bestimmt sind) *ergeben sechs Paare von Elementen, welche ein abhängiges System bilden, und umgekehrt."*

Nennt man $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ die drei Schnittpunkte $(a^1, a^2)$, $(a^3, a^4)$, $(a^5, a^6)$, dagegen $\delta^1, \delta^2, \delta^3$ die drei Punkte $(b^1, b^2)$, $(b^3, b^4)$, $(b^5, b^6)$, so bilden die beiden Dreiecke der $\gamma^i$ und $\delta^i$ die Hauptdreiecke der durch die beiden

Gleichungen

$$f(x, y) = 0, \quad f'(x, y) = 0$$

repräsentirten quadratischen birationalen Beziehung der beiden Gebiete $X$, $Y$ auf einander. Vermöge dieser letztern entsprechen den Geraden $a^1$, $a^2$, $a^3$, $a^4$, $a^5$, $a^6$ resp. die Geraden $b^2$, $b^1$, $b^4$, $b^3$, $b^6$, $b^5$. Es gilt aber auch der umgekehrte Satz:

*„Heissen in einer birationalen quadratischen Transformation zweier Ebenen $\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ die Hauptpunkte der einen, $\delta^1\delta^2\delta^3$ die der andern Ebene; sind $(a^1, a^2)$ ein Geradenpaar durch $\gamma^1$, $(a^3, a^4)$ durch $\gamma^2$, $(a^5, a^6)$ durch $\gamma^3$ und die ihnen entsprechenden resp. $(b^2, b^1)$, $(b^4, b^3)$, $(b^6, b^5)$, so bilden die sechs Geradenpaare $(a^1, b^1)$, ... $(a^6, b^6)$ ein abhängiges System."*

Denn unter den gemachten Voraussetzungen lassen sich Grössen $\varrho_1, \ldots \varrho_6$ derart bestimmen, dass die Formen $\varrho_1 a^1(x) b^1(y) + \varrho_2 a^2(x) b^2(y)$, $\varrho_3 a^3(x) b^3(y) + \varrho_4 a^4(x) b^4(y)$, $\varrho_5 a^5(x) b^5(y) + \varrho_6 a^6(x) b^6(y)$ der Gruppe $(f, f')$ angehören.

Die Beziehung zweier Formen $f(x, y)$, $\varphi(u, v)$, welche das Conjugirtsein constituirt, ist bis jetzt nur algebraisch, als bilineare Gleichung zwischen ihren Coefficienten, aufgefasst worden. Eine geometrische Interpretation derselben ist allein für den besonderen Fall, dass sowohl $f$ als $\varphi$ symmetrische Functionen unter Voraussetzung zusammenfallender Ebenen, gegeben worden. Die voranstehenden Betrachtungen gestatten jetzt, eine solche für den Fall ganz allgemeiner Formen herzustellen.

Es sei $f(x, y)$ eine allgemeine Form, $\begin{smallmatrix} a^1 a^2 a^3 \\ b^1 b^2 b^3 \end{smallmatrix}$ ein polares System derselben. Da durch die beiden Geraden $a^2$, $a^3$ deren Schnittpunkt $\alpha^1$ und somit die Gerade $b^1$ bestimmt ist, so sind ein Paar polarer Dreiseite von $f$ völlig bestimmt, sobald die beiden Geraden $a^2$, $a^3$ beliebig, die zugeordneten $b^2$, $b^3$ dagegen resp. durch $\beta^3$, $\beta^2$ (die Pole von $a^3$, $a^2$) willkürlich gegeben werden. Ist daher $\varphi(u, v)$ eine Form in Liniencoordinaten, so können nach willkürlicher Wahl von $a^2$, $a^3$ die Geraden $b^2$, $b^3$ noch so bestimmt werden, dass $(a^2, b^2)$ $(a^3, b^3)$ Nullpaare von $\varphi(u, v)$ sind. Ergänzt man die Figur durch Construction von $a^1$, $b^1$, so ist ein Paar polarer Dreiseite von $f(x, y)$ construirt, von denen zwei Paare zugeordneter Seiten Nullpaare von $\varphi(u, v)$ sind. Verstehen wir nun unter $\varphi$ eine zu $f$ conjugirte Form, so bilden auch $(a^1, b^1)$ ein Nullpaar von $\varphi$, da in diesem Falle die vier Formen $f(x, y)$, $a^i(x) b^i(y)$ eine dreigliedrige Gruppe darstellen; damit ist der Satz bewiesen:

*„Sind $f(x,y)$, $\varphi(u,v)$ ein Paar conjugirter Formen, so kann man ein Paar polarer Dreiseite (und damit unendlich viele) von $f(x,y)$ construiren, deren Seitenpaare Nullpaare von $f(x,y)$ sind."* — Die Umkehrung, sowie die dual gegenüberstehenden Sätze gelten selbstverständlich.

Dieser Satz ermöglicht eine gleichzeitige Umformung zweier conjugirten Formen $f$, $\varphi$. Sind nämlich $\begin{smallmatrix} a^1 a^2 a^3 \\ b^1 b^2 b^3 \end{smallmatrix}$ ein polares System von $f$, von der im obigen Satze ausgesprochenen Eigenschaft, so steht der dreigliedrigen Gruppe der Formen

$$a^1(x).b^1(y), \quad a^2(x).b^2(y), \quad a^3(x).b^3(y)$$

die sechsgliedrige Gruppe

$$\begin{array}{lll} u(\alpha^1).v(\beta^2), & u(\alpha^2).v(\beta^3), & u(\alpha^3).v(\beta^1), \\ u(\alpha^2).v(\beta^1), & u(\alpha^3).v(\beta^2), & u(\alpha^1).v(\beta^3) \end{array}$$

als conjugirte gegenüber. Da nun der Annahme zufolge $f(x,y)$ der ersteren angehört, $\varphi(u,v)$ derselben conjugirt ist, so ergiebt sich:

*„Sind $f(x,y)$, $\varphi(u,v)$ ein Paar conjugirter Formen, so kann man dieselben gleichzeitig in folgende Form überführen*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \varrho_1 a^1(x) b^1(y) + \varrho_2 a^2(x) b^2(y) + \varrho_3 a^3(x) b^3(y), \\ \varphi(u,v) &= \sigma_{12} u(\alpha^1) v(\beta^2) + \sigma_{23} u(\alpha^2) v(\beta^3) + \sigma_{31} u(\alpha^3) v(\beta^1) \\ &\quad + \sigma_{21} u(\alpha^2) v(\beta^1) + \sigma_{32} u(\alpha^3) v(\beta^2) + \sigma_{13} u(\alpha^1) v(\beta^3), \end{aligned}$$

*wo $\begin{smallmatrix} \alpha^1 \alpha^2 \alpha^3 \\ \beta^1 \beta^2 \beta^3 \end{smallmatrix}$ die Ecken der Dreiseite $\begin{smallmatrix} a^1 a^2 a^3 \\ b^1 b^2 b^3 \end{smallmatrix}$ bedeuten *)."*

---

*) Fallen die Geraden $a^i$ resp. mit den $b^i$ zusammen, so führen die beiden zuletzt angegebenen Sätze auf die bekannten Eigenschaften conjugirter („harmonisch umschriebener," „sich stützender") Kegelschnitte.

An dieser Stelle mag noch eine Bemerkung in Betreff binärer Formen ihren Platz finden. Nach Analogie der für ternäre Formen aufgestellten Definition sind zwei binäre Formen

$$\begin{aligned} f(x,y) &= a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + a_{21} x_2 y_1 + a_{22} x_2 y_2, \\ \varphi(x,y) &= \alpha_{11} x_1 y_1 + \alpha_{12} x_1 y_2 + \alpha_{21} x_2 y_1 + \alpha_{22} x_2 y_2 \end{aligned}$$

als conjugirt zu bezeichnen, sobald die Relation erfüllt ist

$$a_{11}\alpha_{22} - a_{12}\alpha_{21} - a_{21}\alpha_{12} + a_{22}\alpha_{11} = 0.$$

Alsdann gilt folgender Satz:

*„Sind $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ einander conjugirt, so können sie (auf unendlich viele Arten) gleichzeitig in die Formen übergeführt werden:*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x\xi)(y\eta^1) + (x\xi^1)(y\eta), \\ \varphi(x,y) &= \varrho(x\xi)(y\eta) + \sigma(x\xi^1))y\eta^1), \end{aligned}$$

*wo $(x\xi) = x_1\xi_2 - x_2\xi_1$ etc. und $(\xi,\eta)$, $(\xi^1,\eta^1)$ irgend zwei Nullpaare der Form $f(x,y)$*

## §. 4.

Sind $a^1 a^2 a^3 a^4$ vier Geraden der $X$-Ebene, $b^1 b^2 b^3 b^4$ vier Geraden in der $Y$-Ebene; $\alpha^1 = (a^1, a^2)$, $\alpha^2 = (a^1, a^3)$, $\alpha^3 = (a^1, a^4)$, $\alpha^4 = (a^3, a^4)$, $\alpha^5 = (a^4, a^2)$, $\alpha^6 = (a^2, a^3)$ die Ecken des durch jene, und $\beta^1, \dots \beta^6$ die Ecken des durch diese gebildeten vollständigen Vierseits, so ist vermöge einer früheren Bemerkung jede der vier speciellen Formen

$$a^1(x).b^1(y), \quad a^2(x).b^2(y), \quad a^3(x).b^3(y), \quad a^4(x).b^4(y)$$

jeder der sechs speciellen Formen

$$u(\alpha^1).v(\beta^4), \quad u(\alpha^2).v(\beta^5), \quad u(\alpha^3).v(\beta^6), \quad u(\alpha^4).v(\beta^1), \quad u(\alpha^4).v(\beta^2), \quad u(\alpha^6).v(\beta^3)$$

conjugirt. Da nun die ersteren linear independent sind, so können es die an zweiter Stelle auftretenden nicht sein. Dies giebt den bemerkenswerthen Satz:

I. *„Werden die Ecken zweier vollständigen Vierseite* $a^1 a^2 a^3 a^4$, $b^1 b^2 b^3 b^4$ *in der Weise einander zugeordnet, dass die zusammengehörigen Ecken (wie* $(a^1, a^2)$ *und* $(b^3, b^4)$ *sämmtliche vier Indices aufweisen, so bilden dieselben ein abhängiges System von sechs Punktepaaren.“*

Da ein abhängiges System von sechs Punktepaaren, in einer Ebene gelegen, stets aus conjugirten Punktepaaren eines und desselben Kegelschnitts besteht, so ergiebt sich zugleich der Satz:

II. *„Liegen zwei Vierseite in einer Ebene, so bilden deren Eckenpaare (wie oben zugeordnet) sechs conjugirte Punktepaare eines und desselben Kegelschnitts.“*

Aus der früher gemachten Bemerkung (vgl. *„Ueber abhängige Punktepaare“* pag. 254), dass, wenn die fünf Geraden $(\alpha^1, \beta^1)$, $(\alpha^2, \beta^2)$, $\dots$ $(\alpha^5, \beta^5)$ durch einen Punkt gehen, dieser auch mit dem abhängigen sechsten Paar $(\alpha^6, \beta^6)$ in einer Geraden liegt, folgt ferner:

III. *„Liegen zwei Vierseite (in derselben Ebene) derart, dass die Verbindungslinien von fünf Paaren zugeordneter* (vgl. I.) *Ecken durch einen*

---

*bedeuten,“* d. h. auch: *„Sind* $(\xi, \eta)$, $(\xi^1, \eta^1)$ *zwei Nullpaare von* $f$, *so hat* $\varphi$ *die beiden Nullpaare* $(\xi, \eta^1)$, $(\xi^1, \eta)$.*“* Versteht man unter $x$, $y$ resp. Punkte zweier Geraden $X$, $Y$, so kann man auch den Satz aussprechen:

*„Construirt man zu einem Punkte* $y$ *(von* $Y$*) den ihm vermöge* $f(x, y) = 0$ *entsprechenden Punkt* $x$ *und durch den ihm vermöge* $\varphi(x, y) = 0$ *entsprechenden Punkt* $x_1$, *so bilden die Punktepaare* $x$, $x_1$ *(auf* $X$*) eine Involution, sobald die Formen* $f$, $\varphi$ *einander conjugirt sind.“*

*Punkt gehen, so geht auch der Verbindungsstrahl des sechsten Paares durch denselben.“*

Werden die Elemente $b^1 b^2 b^3 b^4$ als Punkte und demnach $\beta^1 \beta^2 \dots \beta^6$ als Seiten des durch jene gebildeten vollständigen Vierecks einander zugeordnet, so ergiebt die a. a. O. benutzte Schlussweise den Satz:

IV. *„Werden die Ecken eines vollständigen Vierseits $a^1 a^2 a^3 a^4$ und die Seiten $\beta^1 \dots \beta^6$ eines vollständigen Vierecks $b^1 b^2 b^3 b^4$ in der Weise einander zugeordnet, dass der Ecke $(a^i, a^k)$ die Seite $(b^l, b^m)$ zugeordnet ist, sobald $iklm$ eine Anordnung der Zahlen 1234 darstellt, und liegen fünf Ecken in den zugeordneten Seiten, so gilt das Gleiche für die sechste Ecke.“*

Stehen zwei Vierseite $a^1 a^2 a^3 a^4$, $b^1 b^2 b^3 b^4$ zu einer Form $f(x, y)$ in der Beziehung, dass die sechs Eckenpaare $(\alpha^i, \beta^{i+3})$ Nullpaare derselben sind, so heissen sie *„ein polares System“* oder *„einander polar in Bezug auf $f(x, y)$.“* Es besteht alsdann der Satz:

*„Sind $a^1 a^2 a^3 a^4$, $b^1 b^2 b^3 b^4$ die Seiten eines polaren Systems (von Vierseiten) einer Form $f(x, y)$, so kann man diese in die Gestalt bringen:*

(6.) $$f(x, y) = \varrho_1 a^1(x) b^1(y) + \varrho_2 a^2(x) b^2(y) + \varrho_3 a^3(x) b^3(y) + \varrho_4 a^4(x) b^4(y),$$

*und umgekehrt.“*

Denn, da der Voraussetzung nach $f(x, y)$ den sämmtlichen Formen $u(\alpha^i) v(\beta^{i+3})$ $(i = 1, 2, \dots 6)$ conjugirt ist, so ist sie ein Glied der Gruppe $a^i(x) b^i(y)$. Als unmittelbare Consequenz erhält man ähnlich, wie oben:

*„Bilden sieben Geradenpaare ein abhängiges System, so ergiebt ihre Trennung resp. in drei und vier Paare zwei polare Systeme (von je drei und vier Elementen) einer und derselben Form — und umgekehrt.“* —

Es ist jetzt auch ohne jede Schwierigkeit die Gleichung desjenigen Kegelschnittes anzugeben, in Bezug auf den die sechs Eckenpaare $(\alpha^i, \beta^{i+3})$ der beiden Vierseite $a^1 a^2 a^3 a^4$, $b^1 b^2 b^3 b^4$ (nach dem unter II. angegebenen Satze) conjugirte Punktepaare bilden. Offenbar ist hierzu nur erforderlich in (6.) die Grössen $\varrho$ so zu bestimmen, dass die Form $f(x, y)$ eine symmetrische wird, d. h. dass die drei Gleichungen erfüllt werden

$$\varrho_1 \pi_1^1 + \varrho_2 \pi_1^2 + \varrho_3 \pi_1^3 + \varrho_4 \pi_1^4 = 0,$$
$$\varrho_1 \pi_2^1 + \varrho_2 \pi_2^2 + \varrho_3 \pi_2^3 + \varrho_4 \pi_2^4 = 0,$$
$$\varrho_1 \pi_3^1 + \varrho_2 \pi_3^2 + \varrho_3 \pi_3^3 + \varrho_4 \pi_3^4 = 0,$$

*worin $\pi_k^i$ die Adjuncte von $u_k$ in der Determinante $\Sigma \pm u_1 a_2^i b_3^i$ bedeutet.*

Die Einsetzung dieser Werthe von $\varrho$ und Gleichsetzung der Variabeln

$y$ und $x$ in (6.) ergiebt somit

$$0 = (\pi^2\pi^3\pi^4)a^1(x)b^1(x) - (\pi^1\pi^3\pi^4)a^2(x)b^2(x) + (\pi^1\pi^2\pi^4)a^3(x)b^3(x) - (\pi^1\pi^2\pi^3)a^4(x)b^4(x)$$

***als die Gleichung desjenigen Kegelschnitts, für den*** $(\alpha^i, \beta^{i+3})$ ***sechs conjugirte Punktepaare bilden.*** Sie zeigt zugleich, dass derselbe der durch die vier Geradenpaare $a^i(x)b^i(x)$ bestimmten Gruppe angehört.

*Construction polarer Vierseite.* — A) Ist $a^1a^2a^3a^4$ ein beliebiges Vierseit der $X$-Ebene, $b^1$ eine Gerade der $Y$-Ebene, so lässt die Aufgabe, die Geraden $b^2b^3b^4$ so zu bestimmen, dass die beiden Vierseite $\binom{a^1a^2a^3a^4}{b^1b^2b^3b^4}$ ein polares System der gegebenen Form $f(x,y)$ bilden, eine einfache Mannigfaltigkeit von Lösungen zu. Man hat, um dies einzusehen, nur den Ausdruck $f'(x,y) = f(x,y) - \lambda a^1(x).b^1(x)$, in welchem der willkürliche Parameter $\lambda$ vorkommt, nach $a^2(x)$, $a^3(x)$, $a^4(x)$ zu ordnen, derart dass

$$f'(x,y) = a^2(x)b^2(y) + a^3(x)b^3(y) + a^4(x)b^4(y)$$

und folglich

$$f(x,y) = \lambda a^1(x)b^1(y) + a^2(x)b^2(y) + a^3(x)b^3(y) + a^4(x)b^4(y).$$

Da die Ausdrücke $b^2(y)$, $b^3(y)$, $b^4(y)$ die willkürliche Grösse $\lambda$ (und zwar linear) enthalten, so ist die Behauptung bewiesen*).

B) ***„Das aus zwei Vierseiten bestehende polare System einer Form*** $f(x,y)$ ***ist eindeutig bestimmt, sobald zwei zugeordnete Seitenpaare*** $(a^1, b^1)$, $(a^2, b^2)$ ***eine dritte Seite*** $a^3$, ***und von der zugeordneten*** $b^3$ ***ein Punkt*** $\pi$ ***gegeben sind.“***

Es ist zunächst evident, dass die Ecken $\alpha^1 = (a^1, a^2)$, $\alpha^2 = (a^1, a^3)$, $\alpha^6 = (a^2, a^3)$, $\beta^1 = (b^1, b^2)$ bekannt sind. Wir construiren nun $\beta^3$ auf der Geraden $b^1$, $\beta^5$ auf $b^2$, $\alpha^4$ auf $a^3$ derart, dass $(\beta^3, \alpha^6)$, $(\beta^5, \alpha^2)$, $(\beta^1, \alpha^4)$ Nullpaare der Form $f(x,y)$ sind, wodurch dieselben eindeutig bestimmt sind, und bestimmen auf der Geraden $(\beta^3, \beta^4) = b^4$ den Punkt $\beta^4$, so dass $(\alpha^1, \beta^4)$ ein Nullpaar bilden. Nennt man nun die Verbindungslinie $(\beta^4, \pi)$ kurz

---

*) Eine mehr geometrische Construction führt auf dasselbe Resultat. Nennt man nämlich, wie oben, $\alpha^1, \alpha^2, \dots \alpha^6$ die Ecken des vollständigen Vierseits $a^1a^2a^3a^4$ und $A^1, A^2, \dots A^6$ die Polaren derselben in Bezug auf $f(x,y)$, so dass $A^1 \dots A^6$ die Seiten eines vollständigen Vierecks bilden, so construirt man die drei Punkte $\beta^1\beta^2\beta^3$ als Schnittpunkte der gegebenen Geraden $b^1$ resp. mit $A^4$, $A^5$, $A^6$, derart dass $(\alpha^4, \beta^1)$, $(\alpha^5, \beta^2)$, $(\alpha^6, \beta^3)$ als Nullpaare von $f(x,y)$ auftreten. Man hat nun nur noch drei Punkte $\beta^4\beta^5\beta^6$ je auf einer der drei (durch einen Punkt gehenden) Geraden $A^1$, $A^2$, $A^3$ derart zu construiren, dass $\beta^4\beta^5\beta^3$, $\beta^5\beta^6\beta^1$, $\beta^6\beta^4\beta^2$ je in einer Geraden liegen. Dies ist auf unendlich viele Arten möglich. Jedes System liefert aber mit $\beta^1\beta^2\beta^3$ zusammen sechs Ecken eines Vierseits, welches zu $a^1a^2a^3a^4$ in Bezug auf $f(x,y)$ polar ist.

$b^3$ und bezeichnet die Schnittpunkte $(b^1, b^3)$, $(b^2, b^3)$ resp. durch $\beta^2$, $\beta^6$, ferner denjenigen Punkt auf $a^1$, welcher $\beta^6$ zu einem Nullpaar ergänzt, mit $\alpha^3$, endlich die Gerade $(\alpha^3, \alpha^4)$ mit $a^4$, so hat man in der That die beiden Vierseite $\frac{a^1a^2a^3a^4}{b^1b^2b^3b^4}$ derart construirt, dass die gegebenen Ecken der Forderung gemäss in ihnen vorkommen und die fünf Paare entsprechender Ecken $(\alpha^1, \beta^4)$, $(\alpha^2, \beta^5)$, $(\alpha^3, \beta^6)$, $(\alpha^4, \beta^1)$, $(\alpha^6, \beta^3)$ Nullpaare von $f$ sind, folglich gilt dasselbe von dem sechsten Eckenpaar $(\alpha^5, \beta^2)$, was zu beweisen war.

Hiernach ist es möglich den Satz auszusprechen:

„*Sind $f(x, y)$, $\varphi(u, v)$ ein Paar conjugirter Formen, so ist es möglich* (auf unendlich viele Arten) *ein Paar polarer Vierseite $\frac{a^1a^2a^3a^4}{b^1b^2b^3b^4}$ von $f(x, y)$ zu construiren, derart dass die zugeordneten Seitenpaare $(a^1, b^1)$, $(a^2, b^2)$, $(a^3, b^3)$, $(a^4, b^4)$ Nullpaare der Form $\varphi$ sind.*“

Man hat, um die Richtigkeit desselben einzusehen, nur der voranstehenden Construction folgend die willkürlich gebliebenen Geraden $(a^1, b^1)$, $(a^2, b^2)$ so zu wählen, dass sie Nullpaare der Form $\varphi$ sind und unter $\pi$ den Pol der Geraden $a^3$ in Bezug auf $\varphi(u, v)$ zu verstehen. Die oben angegebene Vervollständigung ergiebt dann ein polares System $\frac{a^1a^2a^3a^4}{b^1b^2b^3b^4}$ von $f(x, y)$, dessen drei Seitenpaare $(a^1, b^1)$, $(a^2, b^2)$, $(a^3, b^3)$ und somit auch das vierte $(a^4, b^4)$ Nullpaare von $\varphi(u, v)$ sind. Daraus folgt, ebenso wie für drei polare Dreiecke am Schlusse des §. 3 gezeigt wurde;

„*Sind $f(x, y)$, $\varphi(u, v)$ einander conjugirt, so kann man dieselben gleichzeitig in folgende Gestalt bringen**):

$$\begin{cases} f(x, y) = \varrho_1 a^1(x) b^1(y) + \varrho_2 a^2(x) b^2(y) + \varrho_3 a^3(x) b^3(y) + \varrho_4 a^4(x) b^4(y), \\ \varphi(u, v) = \sigma_1 u(\alpha^1) v(\beta^4) + \sigma_2 u(\alpha^2) v(\beta^5) + \sigma_3 u(\alpha^3) v(\beta^6) + \sigma_4 u(\alpha^4) v(\beta^1) \\ \qquad\qquad + \sigma_5 u(\alpha^5) v(\beta^2) + \sigma_6 u(\alpha^6) v(\beta^3), \end{cases}$$

*wo $\frac{\alpha^1, \dots \alpha^6}{\beta^1, \dots \beta^6}$ die Ecken der Vierseite $\frac{a^1a^2a^3a^4}{b^1b^2b^3b^4}$ bedeuten.*“

## §. 5.

Eine bilineare *quaternäre* Form der Variabeln $x(x_1 x_2 x_3 x_4)$, $y(y_1 y_2 y_3 y_4)$

$$f(x, y) = \sum_{\varkappa, \lambda} a_{\varkappa, \lambda} x_\varkappa y_\lambda \qquad \begin{pmatrix} \varkappa = 1, 2, 3, 4 \\ \lambda = 1, 2, 3, 4 \end{pmatrix}$$

*) Dieser Satz ebenso wie der voranstehende gehen in bekannte über, sobald man die beiden Vierseite zusammenfallen lässt.

vermittelt die reciproke Verwandtschaft („Correlation" nach Herrn *Hirst*) zweier Räume $X$, $Y$. Jedem Punkte $x^i$ eines der beiden Räume ist eine Ebene — *die Polarebene* — in $Y$ zugeordnet (als Gesammtheit der Punkte $y^i$, welche $x^i$ zu einem Nullpaare der Form $f(x, y)$ ergänzen), deren Gleichung $f(x^i, y) = 0$; jeder Ebene entspricht ein Punkt — *der Pol.* Eine gleiche Zuordnung von Punkten und Ebenen der beiden Räume findet durch eine Form $\varphi(u, v)$ in Ebenencoordinaten statt. Die im §. 1 von einer früheren Arbeit angeführte Beziehung des Conjugirtseins und deren nächste Consequenzen erweitern sich leicht für die quaternären Formen.

Die bilineare Form

$$\Phi(u, v) = \sum_{\varkappa,\lambda} A_{\varkappa,\lambda} u_\varkappa v_\lambda, \quad \begin{pmatrix} \varkappa = 1, 2, 3, 4 \\ \lambda = 1, 2, 3, 4 \end{pmatrix}$$

deren Coefficienten $A_\varkappa^\lambda$ die Adjuncten der Grössen $a_{\varkappa,\lambda}$ in der Determinante $\Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$, werde auch jetzt *„die adjungirte Form von $f(x, y)$"* genannt, dann besteht die Beziehung:

*„Stehen $x$, $v$ in der Beziehung von Pol und Polarebene in Bezug auf die Form $f(x, y)$, so findet das gleiche Verhältniss in Bezug auf die adjungirte Form statt."*

Die Ebenen $a^1 a^2 a^3 a^4$ im $X$-Raume und die Ebenen $b^1 b^2 b^3 b^4$ im $Y$-Raume bilden *„ein polares System"* oder die beiden Tetraeder $a$, $b$ sind *„einander polar in Bezug auf die Form $f(x, y)$"*, sobald in Bezug auf diese die Ebenen des einen die Polarebenen der Ecken des andern sind. Eine entsprechende Definition findet statt für Formen $\varphi(u, v)$. Die Verfolgung der im §. 2 angewandten Methode ergiebt:

I. *„Bilden $\begin{matrix} a^1 a^2 a^3 a^4 \\ b^1 b^2 b^3 b^4 \end{matrix}$ ein Paar polarer Tetraeder der Form $f(x, y)$, so lässt sich dieselbe in die Gestalt überführen:*

$$(7.) \quad f(x, y) = \varrho_1 a^1(x) b^1(y) + \varrho_2 a^2(x) b^2(y) + \varrho_3 a^3(x) b^3(y) + \varrho_4 a^4(x) b^4(y),$$

*sowie umgekehrt diese Gestalt das Tetraederpaar als polares System erkennen lässt."*

Da die adjungirte Form von $f$ vermöge (7.) die Form annimmt

$$\Phi(u, v) = \varrho_2 \varrho_3 \varrho_4 (u a^2 a^3 a^4) + \varrho_1 \varrho_3 \varrho_4 (u a^1 a^3 a^4) + \varrho_1 \varrho_2 \varrho_4 (u a^1 a^2 a^4) + \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 (u a^1 a^2 a^3),$$

so ergiebt sich auch hier die Folgerung:

II. *„Bilden zwei Tetraeder ein polares System von $f(x, y)$, so bilden deren Ecken ein polares System in Bezug auf die adjungirte Form."*

III. „*Irgend zwei polare Tetraederpaare* $\frac{a^1a^2a^3a^4}{b^1b^2b^3b^4}, \frac{a^5a^6a^7a^8}{b^5b^6b^7b^8}$ *einer und derselben Form* $f(x, y)$ *haben die Eigenschaft, dass ihre acht Ebenenpaare, gleichzeitig aber auch ihre acht Paare von Ecken ein abhängiges System*) von acht Paaren von Elementen bilden.*“

IV. „*Zerlegt man ein abhängiges System von acht Punktepaaren (oder Ebenenpaaren)* $(\alpha^1, \beta^1), \ldots (\alpha^8, \beta^8)$ *in zwei Gruppen von je vier Paaren* $(\alpha^1, \beta^1), \ldots (\alpha^4, \beta^4)$; $(\alpha^5, \beta^5), \ldots (\alpha^8, \beta^8)$, *so bilden dieselben zwei Paare polarer Tetraeder einer und derselben Form*“ und als Schlussfolgerung:

V. „*Zerlegt man die acht Punktepaare eines abhängigen Systems* $(\alpha^1, \beta^1), \ldots (\alpha^8, \beta^8)$ *in zwei Gruppen von je vier Paaren* $\frac{\alpha^1\alpha^2\alpha^3\alpha^4}{\beta^1\beta^2\beta^3\beta^4}, \frac{\alpha^5\alpha^6\alpha^7\alpha^8}{\beta^5\beta^6\beta^7\beta^8}$, *so bilden auch die sechzehn Ebenen dieser beiden Tetraederpaare* $(a^1, b^1), \ldots (a^4, b^4)$; $(a^5, b^5), \ldots (a^8, b^8)$ *ein abhängiges System von acht Ebenenpaaren (wo* $a^1 = (\alpha^2\alpha^3\alpha^4)$, *etc.).*“

Fallen die acht Punkte $\alpha^i$ auf die entsprechenden $\beta^i$, so ergiebt sich der bekannte Satz: „*Bilden die Ecken zweier Tetraeder das Schnittpunktsystem dreier Flächen zweiter Ordnung, so sind deren acht Ebenen drei Flächen zweiter Classe gemeinsam.*“

Die Zerlegung eines abhängigen Systems von acht Punktepaaren nach IV. in zwei polare Tetraederpaare gestattet die schon früher (a. a. O. pag. 259) behandelte Aufgabe, *sechs Punktepaare durch Hinzufügung zweier zu einem abhängigen System von acht Paaren zu ergänzen*, einfacher und vollständig zu lösen. Sind nämlich $(\alpha^1, \beta^1), \ldots (\alpha^6, \beta^6)$ sechs Punktepaare, so zerlegt man sie in zwei Gruppen von resp. vier und zwei Paaren $(\alpha^1, \beta^1), \ldots (\alpha^4, \beta^4)$ und $(\alpha^5, \beta^5)$, $(\alpha^6, \beta^6)$ und bestimmt die allgemeine reciproke Beziehung, vermöge welcher die Ebenen des Tetraeders $\beta^1\beta^2\beta^3\beta^4$ die Polarebenen resp. der Punkte $\alpha^1\alpha^2\alpha^3\alpha^4$ sind, und überdies die Polarebenen von $\alpha^5$, $\alpha^6$ resp. durch $\beta^6$, $\beta^5$ gehen. Da hierdurch für die entsprechende bilineare Form $f(x, y)$ vierzehn Nullpaare gegeben sind, so nimmt dieselbe die Form an

$$f(x, y) = f'(x, y) + \mu . f''(x, y),$$

wo $f'$, $f''$ zwei feste Formen, $\mu$ einen unbestimmten Parameter bedeuten. Wird nun $\mu$ ein bestimmter Werth beigelegt, wodurch sodann $f$ bestimmt ist, so construire man die Polarebenen $b^5$, $b^6$ der Punkte $\alpha^5$, $\alpha^6$ (welche

*) Vgl. dieses Journal Bd. 88 pag. 259 in Betreff solcher abhängigen Systeme.

resp. durch $\beta^6$, $\beta^5$ gehen) und die Polarebenen $a^5$, $a^6$ der Punkte $\beta^5$, $\beta^6$. Wählt man alsdann $\alpha^7$ willkürlich auf der Geraden $(a^5, a^6)$, nennt $b^7$ dessen Polarebene, $\beta^8$ den Schnittpunkt von $b^7$ mit der Geraden $(\beta^5, \beta^6)$; ebenso $\alpha^8$ willkürlich auf $(a^5, a^6)$ und führt entsprechend $b^8$, $\beta^7$ ein, so sind zwei polare Tetraederpaare mit den Ecken $\frac{\alpha^1\alpha^2\alpha^3\alpha^4}{\beta^1\beta^2\beta^3\beta^4}$, $\frac{\alpha^5\alpha^6\alpha^7\alpha^8}{\beta^5\beta^6\beta^7\beta^8}$ (der Form $f$) construirt und folglich die gegebenen sechs Punktepaare durch die beiden neuen Paare $(\alpha^7, \beta^7)$, $(\alpha^8, \beta^8)$ zu einem abhängigen System ergänzt. Lässt man nun $\mu$ variiren, so beschreiben die Ebenen $a^5$, $a^6$ projectivische Büschel, folglich ist die Gerade $(a^5, a^6)$ eine Generatrix der durch sie erzeugten Fläche zweiter Ordnung $F_x$, auf welcher nun $\alpha^7$ zu wählen ist. Gleichzeitig liegt $\alpha^8$ auf derselben Fläche, so dass $(\alpha^7, \alpha^8)$ ganz in $F_x$ liegt. Durch $\alpha^7$, $\alpha^8$ sind $\beta^8$, $\beta^7$ vollkommen bestimmt, sie liegen stets auf einer Fläche zweiter Ordnung $F_y$ im $Y$-Raum. Es ergiebt sich sonach:

„*Sind* $(\alpha^1, \beta^1)$, ... $(\alpha^6, \beta^6)$ *irgend sechs Punktepaare des Raumes, so ist die Gesammtheit der Punkte* $\alpha^7$, $\beta^8$, *welche die Eigenschaft haben, dass* $\alpha^1 \dots \alpha^6$ *von* $\alpha^7$ *aus und* $\beta^1 \dots \beta^6$ *von* $\beta^8$ *aus projicirt (auf irgend zwei Ebenen), ein abhängiges System von sechs Punktepaaren bilden, so gelegen dass* $\alpha^7$ *auf einer Fläche zweiter Ordnung* $F_x$, $\beta^8$ *auf einer andern* $F_y$ *gelegen sind. Wird* $\alpha^7$ *willkürlich auf jener gewählt, so ist* $\beta^8$ *dadurch bestimmt. Es giebt dann zwei weitere Punkte* $\alpha^8$, $\beta^7$ *(in unendlicher Zahl), welche* $(\alpha^1, \beta^1)$, ... $(\alpha^8, \beta^8)$ *zu einem abhängigen System machen.* $\alpha^8$ *liegt auf* $F_x$, *so dass* $\alpha^7\alpha^8$ *ganz der Fläche angehört, desgleichen* $\beta^7$."

Fallen die Punkte $\alpha^1 \dots \alpha^6$ resp. mit den Punkten $\beta^1 \dots \beta^6$ zusammen, so wird die Fläche $F_x$ und ebenso $F_y$ unbestimmt.

Sind zwei Tetraeder $\frac{a^1a^2a^3a^4}{b^1b^2b^3b^4}$ gegeben, so giebt es eine viergliedrige Gruppe von Formen (7.)

$$f(x, y) = \varrho_1 a^1(x) b^1(y) + \dots + \varrho_4 a^4(x) b^4(y),$$

in Bezug auf welche dieselben ein polares System bilden. Damit unter diesen eine symmetrische Form vorkommt, haben die Grössen $\varrho$ den sechs Gleichungen zu genügen

$$(8.)\quad \begin{cases} \varrho_1(a^1, b^1)_1 + \varrho_2(a^2, b^2)_1 + \varrho_3(a^3, b^3)_1 + \varrho_4(a^4, b^4)_1 = 0, \\ \varrho_1(a^1, b^1)_2 + \varrho_2(a^2, b^2)_2 + \varrho_3(a^3, b^3)_2 + \varrho_4(a^4, b^4)_2 = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varrho_1(a^1, b^1)_6 + \varrho_2(a^2, b^2)_6 + \varrho_3(a^3, b^3)_6 + \varrho_4(a^4, b^4)_6 = 0, \end{cases}$$

worin die Grössen $(a^i, b^i)_1, \dots (a^i, b^i)_6$ die Determinanten der Matrix $\begin{vmatrix} a_1^i & a_2^i & a_3^i & a_4^i \\ b_1^i & b_2^i & b_3^i & b_4^i \end{vmatrix}$ bedeuten, d. h. zwei Tetraeder lassen sich im Allgemeinen nicht als polares System („einander polar") einer symmetrischen Form ansehen. Es ist dies aber dann und nur dann der Fall, sobald das System der Gleichungen (8.) in Bezug auf die Grössen $\varrho$ erfüllt werden kann. Lässt man die beiden Räume zusammenfallen, so dass $(a^i, b^i)_1, \dots (a^i, b^i)_6$ die Coordinaten der Schnittlinie $(a^i, b^i)$ bedeuten und summirt die resp. mit $(u, v)_4$, $(u, v)_5$, $(u, v)_6$, $(u, v)_1$, $(u, v)_2$, $(u, v)_3$ multiplicirten Gleichungen (8.), so ergiebt sich die sie vertretende Gleichung

$$(9.)\qquad \varrho_1(a^1 b^1 u v)+\varrho_2(a^2 b^2 u v)+\varrho_3(a^3 b^3 u v)+\varrho_4(a^4 b^4 u v) = 0.$$

Da aber $(a^i b^i u v) = 0$ die Gleichung der Geraden $(a^i, b^i)$ ist, so ergiebt sich der bekannte Satz:

*„Zwei in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung einander polare Tetraeder sind so gelegen, dass die Schnittlinien der entsprechenden Ebenen derselben in linearer Dependenz stehen*)"* (d. h. auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen). — Aber auch umgekehrt *lassen sich zwei Tetraeder stets als polar in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung ansehen, sobald die Schnittlinien entsprechender Ebenen in linearer Dependenz stehen. — „Die Gleichung der Fläche ist von der Gestalt:"*

$$0 = \sigma_1 a^1(x) b^1(x) + \sigma_2 a^2(x) b^2(x) + \sigma_3 a^3(x) b^3(x) + \sigma_4 a^4(x) b^4(x).$$

Ausserdem folgt hierbei der Satz, *„dass die Ecken zweier Paare einander conjugirter Tetraeder einer Fläche zweiter Ordnung stets ein abhängiges System von acht Punktepaaren bilden."*

Sind drei Ebenen $a^2 a^3 a^4$ im $X$-Raume und drei Punkte $\pi^2 \pi^3 \pi^4$ im $Y$-Raume gegeben, so kann man drei Ebenen $b^2 b^3 b^4$ resp. durch $\pi^2$, $\pi^3$, $\pi^4$ und ein weiteres Ebenenpaar $a^1 b^1$ derart finden, dass $\begin{smallmatrix} a^1 a^2 a^3 a^4 \\ b^1 b^2 b^3 b^4 \end{smallmatrix}$ ein polares System der Form $f(x, y)$ bilden. Sind nun $f(x, y)$, $\varphi(u, v)$ ein Paar conjugirter Formen, so lasse man $\pi^2 \pi^3 \pi^4$ mit den Polen der Ebenen $a^2$, $a^3$, $a^4$ in Bezug auf $\varphi(u, v)$ zusammenfallen, derart dass $(a^2, b^2)$, $(a^3, b^3)$, $(a^4, b^4)$ und folglich auch $(a^1, b^1)$ ein Nullpaar von $\varrho$ bilden, d. h.

*) Es ist unschwer zu sehen, wie der Satz für Räume von mehr als drei Dimensionen sich gestaltet.

„*Sind* $f(x, y)$, $\varphi(u, v)$ *conjugirte Formen, so kann man ein* (*und zugleich unendlich viele*) *polares System von zwei Tetraedern der Form* $f$ *finden, deren Ebenenpaare Nullpaare von* $\varphi(u, v)$ *sind — und umgekehrt.*"

In Betreff polarer Systeme von mehr als vier Elementen sei nur Folgendes bemerkt:

„*Zwei Sechsflache* $\begin{matrix} a^1 a^2 a^3 a^4 a^5 a^6 \\ b^1 b^2 b^3 b^4 b^5 b^6 \end{matrix}$ *mit den* 20 *Ecken* $\alpha^{ikl} = (a^i, a^k, a^l)$ *resp.* $\beta^{ikl} = (b^i, b^k, b^l)$ *heissen einander polar in Bezug auf eine Form* $f(x, y)$, *sobald die* 20 *Paare complementärer Ecken* $(\alpha^{ikl}, \beta^{mnp})$, *in denen die Zahlen* $i\,k\,l\,m\,n\,p$ *sämmtlich ungleich sind, Nullpaare von* $f(x, y)$ *sind.*"

Die sechs speciellen Formen $a^i(x).b^i(y)$, $(i = 1, 2, \ldots 6)$ haben offenbar jene 20 Punktepaare zu Nullpaaren, folglich bilden die diesen entsprechenden Formen eine höchstens zehngliedrige Gruppe, d. h. es bestehen zwischen denselben zehn lineare Relationen.

Breslau, Mai 1880.

---

# Zur Theorie der Kugelfunctionen.

(Von Herrn *H. Bruns.*)

---

Der von Herrn *Dini* gegebene Convergenzbeweis für die nach Kugelfunctionen fortschreitenden Reihen beruht im Wesentlichen auf folgenden Hülfssätzen aus der Theorie der Kugelfunctionen $P_n(x)$:

1) $(2n+1)P_n = P'_{n+1} - P'_{n-1}$;

2) die $n$ Wurzeln von $P_n(\cos\omega) = 0$ sind sämmtlich reell, einfach und nahezu gleichförmig über das Intervall 0 bis $\pi$ vertheilt, um so gleichmässiger, je grösser $n$;

3) für $n = \infty$ wird $\lim P_n(\cos\omega) = 0$, nicht nur wenn $\cos\omega$ in angebbarer Weise von $\pm 1$ verschieden ist, sondern auch noch wenn $\omega$ in gewisser Weise mit wachsendem $n$ gegen Null oder $\pi$ convergirt.

Der letzte Hülfssatz ist bisher, was für den *Dini*schen Beweis ausreichte, nur unter der Voraussetzung begründet worden, dass $n^\alpha \omega$ für $\alpha < \frac{1}{2}$ noch unendlich wird, wenn $n$ über alle Grenzen wächst, während man andererseits weiss, dass $\lim P_n(\cos\omega)$ in eine *Bessel*sche Function übergeht, wenn $\lim n\omega$ einen endlichen Werth besitzt. (Vgl. die Darstellung dieses Gegenstandes in „*Heine,* Handbuch der Kugelfunctionen" 2. Aufl.) Im Folgenden soll nun ganz allgemein die Frage beantwortet werden, welchen Werth $\lim P_n(\cos\omega)$ besitzt, wenn $\omega$ in irgend einer Weise mit wachsendem $n$ gegen Null convergirt. Die hierbei benutzte Methode führt zu gleicher Zeit zu dem zweiten der oben angeführten Sätze, während der erste sich ohne Schwierigkeit direct herleiten lässt. Man gelangt auf diese Art zu einer Form des in Rede stehenden Convergenzbeweises, welche verhältnissmässig ebenso einfach und direct ist, wie die des bekannten elementaren Beweises von *Dirichlet* für die trigonometrischen Reihen. Um dies noch

besser hervortreten zu lassen, sind im Folgenden absichtlich keinerlei Sätze aus der Theorie der Kugelfunctionen als bekannt angenommen worden.

§. 1. Ausgangspunkt ist das Integral

$$(A.)\qquad U(\omega, \varkappa) = \frac{2}{\pi}\int_0^\omega \varDelta(\psi)\cos\tfrac{1}{2}\varkappa\psi\, d\psi,\quad \varDelta(\psi) = (2\cos\psi - 2\cos\omega)^{-\frac{1}{2}},$$

$\varkappa$ reell positiv, $\omega$ reell und $0 \leqq \omega \leqq \pi$. Durch die Substitution

$$\sin\tfrac{1}{2}\psi = \sin\tfrac{1}{2}\omega\cos\varphi$$

erhält man

$$(B.)\qquad U = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\tfrac{1}{2}\varkappa\psi \sec\tfrac{1}{2}\psi\, d\varphi.$$

Aus dieser zweiten Form folgt, dass $U$ eine stetige Function von $\omega$ ist, so lange $\omega$ den Werth $\pi$ noch nicht erreicht hat, ferner ist $U(0, \varkappa) = 1$. Wenn $\psi$ von 0 bis $\omega$ wächst, so wächst auch $\varDelta(\psi)$ beständig; dasselbe gilt von der Ableitung

$$\varDelta'(\psi) = \sin\psi(2\cos\psi - 2\cos\omega)^{-\frac{3}{2}},$$

denn die zweite Ableitung

$$\varDelta''(\psi) = (3 - \cos^2\psi - 2\cos\psi\cos\omega)(2\cos\psi - 2\cos\omega)^{-\frac{5}{2}}$$

ist niemals negativ und könnte höchstens an den Stellen $\omega = \psi = 0$ resp. $\omega = \psi = \pi$ verschwinden, deren Untersuchung indessen für das Folgende nicht nothwendig ist.

§. 2. Es sei $\lambda$ die grösste ganze Zahl, welche in $\varkappa\omega : \pi$ enthalten ist, also

$$\frac{\lambda}{\varkappa}\pi \leqq \omega < \frac{\lambda+1}{\varkappa}\pi \quad \text{oder} \quad \omega = \frac{\lambda+\vartheta}{\varkappa}\pi,\quad 0 \leqq \vartheta < 1.$$

$\lambda$ ist dann höchstens gleich der grössten ganzen Zahl $k$, welche in $\varkappa$ enthalten ist. Man theile nun das Integrationsintervall $0 \ldots \omega$ in Formel (*A.*) an den Stellen, welche Vielfache von $\pi : \varkappa$ sind, und bezeichne die absoluten Werthe der einzelnen Theilintegrale der Reihe nach mit $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \ldots$ Das letzte Theilintegral $\varrho_\lambda$ hat die Grenzen $\lambda\pi : \varkappa$ und $\omega$, kann also unter Umständen, wenn nämlich $\vartheta = 0$, verschwinden, dagegen sind die Grenzen der übrigen $\varrho_\mu$ resp.

$$\frac{\mu}{\varkappa}\pi \quad \text{und} \quad \frac{\mu+1}{\varkappa}\pi \quad (\mu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ \lambda-1).$$

Mit Rücksicht auf die Zeichenwechsel von $\cos\frac{1}{2}\varkappa\psi$ wird dann

$$U = \varrho_0 - \varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4 - \varrho_5 \pm \cdots \pm \varrho_\lambda;$$

an jeden Zeichenwechsel schliesst sich also eine Zeichenfolge und umgekehrt. Mittelst der Substitutionen

$$\psi = \frac{2\mu\pi \mp \varepsilon}{x} \quad \text{resp.} \quad \psi = \frac{(2\mu+1)\pi \mp \varepsilon}{x}$$

erhält man für die $\varrho_\mu$ folgende transformirte Ausdrücke:

$$\varrho_{2\mu-1} = \frac{2}{\pi x}\int_0^\pi \cos\tfrac{1}{2}\varepsilon\, \varDelta\left(\frac{2\mu}{x}\pi - \frac{\varepsilon}{x}\right)d\varepsilon,$$

$$\varrho_{2\mu} = \frac{2}{\pi x}\int_0^\pi \cos\tfrac{1}{2}\varepsilon\, \varDelta\left(\frac{2\mu}{x}\pi + \frac{\varepsilon}{x}\right)d\varepsilon,$$

$$\varrho_{2\mu} = \frac{2}{\pi x}\int_0^\pi \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\, \varDelta\left(\frac{2\mu+1}{x}\pi - \frac{\varepsilon}{x}\right)d\varepsilon,$$

$$\varrho_{2\mu+1} = \frac{2}{\pi x}\int_0^\pi \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\, \varDelta\left(\frac{2\mu+1}{x}\pi + \frac{\varepsilon}{x}\right)d\varepsilon,$$

aus denen man sofort $\varrho_\mu < \varrho_{\mu+1}$ folgert, d. h. die $\varrho_\mu$ nehmen mit wachsendem $\mu$ beständig zu. Ferner ist

$$\varrho_{2\mu+3} - \varrho_{2\mu+2} - (\varrho_{2\mu+1} - \varrho_{2\mu}) = \frac{2}{\pi x}\int_0^\pi Q \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\, d\varepsilon,$$

$$Q = \varDelta\left(\frac{2\mu+3}{x}\pi + \frac{\varepsilon}{x}\right) - \varDelta\left(\frac{2\mu+3}{x}\pi - \frac{\varepsilon}{x}\right) - \varDelta\left(\frac{2\mu+1}{x}\pi + \frac{\varepsilon}{x}\right) + \varDelta\left(\frac{2\mu+1}{x}\pi - \frac{\varepsilon}{x}\right).$$

Man kann nun schreiben

$$Q = \frac{1}{x}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\left\{\varDelta'\left(\frac{2\mu+3}{x}\pi + \frac{\psi}{x}\right) - \varDelta'\left(\frac{2\mu+1}{x}\pi + \frac{\psi}{x}\right)\right\}d\psi,$$

woraus man nach den oben über das Wachsen von $\varDelta'$ gemachten Bemerkungen schliesst, dass $Q$ positiv ist; d. h. die Differenzen $\varrho_1 - \varrho_0$, $\varrho_3 - \varrho_2$, $\varrho_5 - \varrho_4$, ... bilden eine Reihe von zunehmenden Grössen.

§. 3. Wir nehmen jetzt an, dass $\omega$ ein genaues Vielfaches von $\frac{\pi}{x}$ sei, also

$$\omega = \frac{\lambda\pi}{x}, \quad (\vartheta = 0), \quad \varrho_\lambda = 0$$

und

$$U = \varrho_0 - \varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 + \cdots \pm \varrho_{\lambda-1}.$$

Trennt man die vier Fälle $\lambda \equiv 0, \equiv 1, \equiv 2, \equiv 3 \pmod{4}$ von einander, so kann man entsprechend schreiben:

$$U = (\varrho_{\lambda-1}-\varrho_{\lambda-2})-(\varrho_{\lambda-3}-\varrho_{\lambda-4})+\cdots \qquad +(\varrho_3-\varrho_2)-(\varrho_1-\varrho_0),$$
$$U = \varrho_{\lambda-1}+(\varrho_{\lambda-2}-\varrho_{\lambda-3})-(\varrho_{\lambda-4}-\varrho_{\lambda-5})+\cdots +(\varrho_3-\varrho_2)-(\varrho_1-\varrho_0),$$
$$U = -(\varrho_{\lambda-1}-\varrho_{\lambda-2})+(\varrho_{\lambda-3}-\varrho_{\lambda-4})-\cdots \qquad +(\varrho_3-\varrho_2)-(\varrho_1-\varrho_0),$$
$$U = -\varrho_{\lambda-1}-(\varrho_{\lambda-2}-\varrho_{\lambda-3})+(\varrho_{\lambda-4}-\varrho_{\lambda-5})-\cdots+(\varrho_3-\varrho_2)-(\varrho_1-\varrho_0).$$

Weil nun die in Klammern eingeschlossenen Terme der Reihe nach abnehmen, so ist $U$ in den beiden ersten Fällen positiv, in den beiden letzten negativ. Daraus folgt wegen der Stetigkeit von $U(\omega, \varkappa)$, dass in jedem der Intervalle

$$\frac{2\mu-1}{\varkappa}\pi \quad \text{bis} \quad \frac{2\mu}{\varkappa}\pi \qquad (\mu = 1, 2, 3\ldots)$$

wenigstens eine reelle Wurzel von $U(\omega, \varkappa) = 0$ existirt. Die Anzahl dieser Wurzelintervalle ist gleich der grössten ganzen Zahl, welche in $\frac{1}{2}\varkappa$ enthalten ist.

§. 4. Es sei nun $\omega$ beliebig in dem Intervall $0 < \omega < \pi$ gegeben, fest oder mit $\varkappa$ veränderlich, dann gehört zu jedem Werthepaare $(\varkappa, \omega)$ ein bestimmtes $\lambda$ und man kann den vier vorhin unterschiedenen Fällen entsprechend schreiben:

$$U = \varrho_\lambda+(\varrho_{\lambda-1}-\varrho_{\lambda-2})-(\varrho_{\lambda-3}-\varrho_{\lambda-4})+\cdots,$$
$$U = -\varrho_\lambda+\varrho_{\lambda-1}+(\varrho_{\lambda-2}-\varrho_{\lambda-3})-(\varrho_{\lambda-4}-\varrho_{\lambda-5})+\cdots,$$
$$U = -\varrho_\lambda-(\varrho_{\lambda-1}-\varrho_{\lambda-2})+(\varrho_{\lambda-3}-\varrho_{\lambda-4})-\cdots,$$
$$U = \varrho_\lambda-\varrho_{\lambda-1}-(\varrho_{\lambda-2}-\varrho_{\lambda-3})+(\varrho_{\lambda-4}-\varrho_{\lambda-5})-\cdots.$$

Die Werthe von $U$ liegen dann entsprechend zwischen folgenden Grenzen:

| | | |
|---|---|---|
| $\varrho_\lambda$ | und | $\varrho_\lambda+\varrho_{\lambda-1}-\varrho_{\lambda-2}$, |
| $-\varrho_\lambda+\varrho_{\lambda-1}$ | - | $-\varrho_\lambda+\varrho_{\lambda-1}+\varrho_{\lambda-2}-\varrho_{\lambda-3}$, |
| $-\varrho_\lambda$ | - | $-\varrho_\lambda-\varrho_{\lambda-1}+\varrho_{\lambda-2}$, |
| $\varrho_\lambda-\varrho_{\lambda-1}$ | - | $\varrho_\lambda-\varrho_{\lambda-1}-\varrho_{\lambda-2}+\varrho_{\lambda-3}$. |

Wenn $\varrho_\lambda$ und $\varrho_{\lambda-1}$ mit wachsendem $\varkappa$ gegen Null convergiren, so gilt dasselbe von allen vorhergehenden $\varrho$ und desshalb auch von $U$. Es sei nun

$$\sin\frac{\mu\pi}{2\varkappa} = \sin\frac{\omega}{2}\cos\varphi_\mu,$$

dann wird

$$(C.) \quad \varrho_\lambda = \pm\frac{2}{\pi}\int_0^{\varphi_\lambda}\cos\tfrac{1}{2}\varkappa\psi\sec\tfrac{1}{2}\psi\, d\varphi, \quad \varrho_{\lambda-1} = \pm\frac{2}{\pi}\int_{\varphi_\lambda}^{\varphi_{\lambda-1}}\cos\tfrac{1}{2}\varkappa\psi\sec\tfrac{1}{2}\psi\, d\varphi.$$

Es soll nun vorausgesetzt werden, dass $\omega$ bei wachsendem $\varkappa$ stets um einen angebbaren Betrag unterhalb $\pi$ liege, dann bleiben in (*C.*) die zu integrirenden Functionen stets unterhalb einer angebbaren endlichen Grenze, und es werden $\varrho_\lambda$ und $\varrho_{\lambda-1}$ gegen Null convergiren, sobald dies für $\varphi_\lambda$ und $\varphi_{\lambda-1}$ der Fall ist. Es ist aber

$$\tfrac{1}{2}\varphi = \arcsin\left[\cos\frac{\omega+\psi}{4}\,\frac{\sin\frac{\omega-\psi}{4}}{\sin\frac{\omega}{2}}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\tfrac{1}{2}\varphi_\lambda = \arcsin\left[\cos\frac{2\lambda+\vartheta}{4\varkappa}\pi\,\frac{\sin\frac{\vartheta}{4\varkappa}\pi}{\sin\frac{2\lambda+2\vartheta}{4\varkappa}\pi}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\tfrac{1}{2}\varphi_{\lambda-1} = \arcsin\left[\cos\frac{2\lambda+\vartheta-1}{4\varkappa}\pi\,\frac{\sin\frac{\vartheta+1}{4\varkappa}\pi}{\sin\frac{2\lambda+2\vartheta}{4\varkappa}\pi}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Die beiden letzten Ausdrücke convergiren offenbar mit wachsendem $\varkappa$ gegen Null, nicht nur wenn $\omega$ einen festen von Null verschiedenen Werth besitzt, sondern auch noch wenn $\omega$ selber mit wachsendem $\varkappa$ gegen Null convergirt, jedoch so, dass dabei $\varkappa\omega$, also auch $\lambda$ über alle Grenzen wächst. Also

$$\lim_{(\varkappa=\infty)} U(\omega,\varkappa) = 0,$$

so lange $\omega < \pi$ und $\lim \varkappa\omega = \infty$. Die letztere Bedingung ist, wie man sieht, hinreichend, sie ist aber auch nothwendig. Wenn nämlich $\varkappa\omega$ mit wachsendem $\varkappa$ gegen einen endlichen Werth $2c$ convergirt, so ist in der Formel (*B.*)

$$\lim\cos(\tfrac{1}{2}\varkappa\psi) = \cos(c\cos\varphi), \quad \lim\sec\tfrac{1}{2}\psi = 1,$$

also

$$\lim U = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(c\cos\varphi)\,d\varphi,$$

ein Ausdruck, der nur für gewisse Werthe von $c$, aber nicht allgemein verschwindet.

Derselbe Gedankengang wie bisher lässt sich auch mit genau denselben Resultaten anwenden auf den Ausdruck

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\omega \cos\tfrac{1}{2}\varkappa\,\psi\,(2\cos\psi-2\cos\omega)^{-a}\,d\psi,$$

wo $a$ ein positiver echter Bruch ist.

§. 5. Es sei jetzt $\varkappa$ gleich einer ungeraden Zahl $2n+1$ und

$$U_n(\omega) \;=\; U(\omega, 2n+1),$$

dann ist, wenn $\alpha$ ein echter Bruch,

$$\sum_0^\infty \alpha^m U_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sec\tfrac{1}{2}\psi\,\Sigma\alpha^m \cos\frac{2m+1}{2}\psi = 2\,\frac{1-\alpha}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{1-2\alpha\cos\psi+\alpha^2}$$

$$= 2\,\frac{1-\alpha}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(1-\alpha)^2\sin^2\varphi+(1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2)\cos^2\varphi} = (1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Die $U_n$ sind daher die Coefficienten der Entwickelung von

$$(1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$$

nach steigenden Potenzen von $\alpha$, d. h. nichts anderes als die Kugelfunctionen $P_n(\cos\omega)$. Hieraus in Verbindung mit dem Früheren ergeben sich folgende Schlüsse. $P_n(\cos\omega)$ ist eine ganze rationale Function $n^{\text{ten}}$ Grades von $\cos\omega$, gleichzeitig mit $n$ gerade oder ungerade. Ferner ist $P_n(\pm 1) = (\pm 1)^n$. Die Anzahl der Wurzelintervalle

$$\frac{2\mu-1}{2n+1}\pi \quad \text{bis} \quad \frac{2\mu}{2n+1}\pi$$

ist gleich der grössten in $\frac{1}{2}\varkappa = n+\frac{1}{2}$ enthaltenen ganzen Zahl, also $n$. Da aber $P_n(\cos\omega) = 0$ nur $n$ Wurzeln besitzt, so sind sämmtliche Wurzeln von $P_n(\cos\omega)$ reell, einfach und nahezu gleichförmig über das Intervall $0 < \omega < \pi$ vertheilt. Hieraus folgt weiter nach einem bekannten Satze, dass die $n-1$ Wurzeln der Ableitung $P'_n(\cos\omega)$ ebenfalls alle reell und einfach sind und zwischen den Wurzeln von $P_n(\cos\omega)$ liegen. Wenn $\omega$ fest und von 0 und $\pi$ verschieden ist, oder wenn $\omega$ mit wachsendem $n$ so gegen 0 oder $\pi$ convergirt, dass $\lim n\omega$ resp. $\lim n(\pi-\omega)$ unendlich werden, so ist $\lim P_n(\cos\omega) = 0$.

Bildet man die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{1}{R} - \Sigma\alpha^n P_n(x) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\alpha}{R^3} - \Sigma\alpha^n P'_n(x) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha} &= \frac{x-\alpha}{R^3} - \Sigma n\alpha^{n-1} P_n(x) = 0 \end{aligned}\right\}, \qquad R^2 = 1-2\alpha x+\alpha^2,$$

so wird

$$F+2\alpha\frac{\partial F}{\partial\alpha}-\frac{1-\alpha^2}{\alpha}\frac{\partial F}{\partial x}=\Sigma(1-\alpha^2)\alpha^{n-1}P'_{n-1}(x)-\Sigma(2n+1)\alpha^n P_n(x)$$
$$=\Sigma\alpha^n\{P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)-(2n+1)P_n(x)\}=0,$$

also

$$(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x).$$

Damit sind sämmtliche Hülfssätze über Kugelfunctionen, welche für den *Dini*schen Convergenzbeweis nöthig sind, gegeben. Es ist nicht erforderlich, im Anschlusse hieran den in Rede stehenden Beweis bis zu Ende durchzuführen, da die weiteren Schlüsse nur die Reproduction von bereits Bekanntem enthalten würden.

Berlin, den 30. Juni 1880.

---

# Ueber die Kugelfunction $P^n(\cos\gamma)$ für ein unendliches $n$.

(Von Herrn *E. Heine* in Halle a. S.)

---

§. 1. Die Untersuchung über die Entwickelung einer Function von zwei Argumenten nach Kugelfunctionen, welche im §. 117 des Handbuchs der Kugelfunctionen geführt wurde, beruht auf dem Satze, dass $P^n(\cos\gamma)$ für $n = \infty$ nicht nur dann verschwindet, wenn $\gamma$ eine reelle feste, von 0 verschiedene Zahl bezeichnet, sondern auch, wenn $\gamma$ von $n$ auf gewisse Art abhängt, nämlich so dass $\gamma$ in das Product einer von $n$ unabhängigen Grösse $\theta$ und von $n^{-\alpha}$ zerfällt, wo $\alpha < \frac{1}{4}$ vorausgesetzt wird. Diesen Hülfssatz hat Herr *Bruns* verallgemeinert, indem er bewies*), dass $P^n(\cos\gamma)$ auch dann noch für $n = \infty$ verschwindet, wenn $\alpha > \frac{1}{4}$ ist, wenn $\alpha$ nur unter 1 bleibt, allgemein wenn $\gamma$ nur so zu 0 convergirt, dass $n\gamma$ schon unendlich wird. Ich gebe im §. 2 für diesen von Herrn *Bruns* gefundenen Satz einen anderen Beweis, der sich den Entwickelungen des Handbuchs anschliesst.

Stellt man den Satz mit bekannten Eigenschaften der $P$ zusammen, so kennt man daher den Grenzwerth für $n = \infty$ von $P^n(\cos\gamma)$ für jedes reelle $\gamma$. Derselbe ist nämlich, wenn $\gamma$ zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegt,

$$0, \quad J(\theta), \quad 1,$$

je nachdem $n\gamma$ resp. unendlich wird, oder gleich einem endlichen von 0 verschiedenen Werthe $\theta$, oder gleich 0.

§. 2. Es soll $\gamma$ ein Ausdruck sein, der selbst für $n = \infty$ verschwindet, während $n\gamma$ schon unendlich wird. Wir können daher setzen

$$\gamma = \frac{\theta h}{n},$$

wo $h$ mit $n$ unendlich wird, aber nur so, dass der Bruch $\frac{h}{n}$, den wir durch

---

*) S. den vorangehenden Aufsatz, S. 322.

$2\varepsilon$ bezeichnen, die Grenze 0 giebt. Man hat (Handb. (7, $b$))

$$\pi P^n(\cos\gamma) = \int_0^\gamma \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{1}{2}\gamma - \sin^2\frac{1}{2}\varphi}}\, d\varphi,$$

und hieraus, wenn man statt $\varphi$ eine Veränderliche $\psi$ durch die Gleichung $n\varphi = h\psi$ einführt,

$$(a.)\qquad \pi P^n(\cos\gamma) = \int_0^\theta \frac{2\varepsilon}{\sqrt{\sin^2\varepsilon\theta - \sin^2\varepsilon\psi}} \cos(h+\varepsilon)\psi\, d\psi.$$

Unter dem Integrale multiplicirt man Zähler und Nenner mit $\sqrt{\theta^2-\psi^2}$; die zu integrirende Function zerlegt man dann in das Product aus dem Factor

$$2\sqrt{\frac{\theta^2-\psi^2}{\left(\frac{\sin\varepsilon\theta}{\varepsilon}\right)^2 - \left(\frac{\sin\varepsilon\psi}{\varepsilon}\right)^2}}$$

und dem zweiten

$$\frac{\cos(h+\varepsilon)\psi}{\sqrt{\theta^2-\psi^2}}.$$

Der erste kommt bei hinlänglich kleinem $\varepsilon$ beliebig nahe an 2, also $\pi P^n(\cos\gamma)$ beliebig nahe an

$$2\int_0^\theta \frac{\cos(h+\varepsilon)\psi}{\sqrt{\theta^2-\psi^2}}\, d\psi,$$

d. i. nach dem Fundamentalsatze 4, der sich auf S. 62 des Handb. im Gesetze über trigonometrische Reihen findet, beliebig nahe an 0, und zwar zur gleichen Ordnung wie $h^{-\frac{1}{2}}$.

In der That ist dort gezeigt, dass für ein unendliches $m$ die Ausdrücke

$$m^{1-\nu}\int_0^a \varphi(\alpha)\frac{\sin m\alpha}{\alpha^\nu}\, d\alpha,\quad m^{1-\nu}\int_0^a \varphi(\alpha)\frac{\cos m\alpha}{\alpha^\nu}\, d\alpha,$$

endlich bleiben, wenn die Function $\varphi(\alpha)$ zwischen $\theta$ und einer Grenze $a$ endlich und $\nu < 1$ ist, wenn ferner $\varphi$ nur eine endliche Zahl Maxima und Minima besitzt. Nun ist $(h+\varepsilon)$ eine Zahl wie $m$, und setzt man $\psi = \theta - \alpha$ so verwandelt sich unser Integral in

$$\int_0^\theta \frac{\cos m(\alpha-\theta)}{\sqrt{2\theta-\alpha}}\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}} = \cos m\theta \int_0^\theta \frac{1}{\sqrt{2\theta-\alpha}}\frac{\cos m\alpha}{\sqrt{\alpha}}\, d\alpha + \sin m\theta \int_0^\theta \frac{1}{\sqrt{2\theta-\alpha}}\frac{\sin m\alpha}{\sqrt{\alpha}}\, d\alpha.$$

Die Factoren von $\cos m\theta$ und $\sin m\theta$ werden aber nach dem Satze gleich Null.

§. 3. Die am Schluss des §. 1 angegebenen weiteren Eigenschaften von $P$ lassen sich gleichfalls aus $(a.)$ im §. 2 ableiten. Setzt man dazu, wie oben, $\gamma n = \theta h$, so wird

*erstens* $\gamma n$ auch noch unendlich, aber ohne dass $\gamma$ zu Null convergirt, wenn $h = n$ ist;

*zweitens* $\gamma n$ endlich und nicht Null für $h = 1$;

*drittens* $\gamma n$ endlich und Null, wenn $h = 0$ für $n = \infty$ genommen wird.

*Im ersten Falle* folgt aus (*a.*), dass $\pi P^n(\cos\gamma)$ gleich

$$\int_0^\theta \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\psi}{\sqrt{\sin^2\frac{1}{2}\theta - \sin^2\frac{1}{2}\psi}}\,d\psi,$$

also Null von derselben Ordnung wie $n^{-\frac{1}{2}}$ wird;

*im zweiten Falle* dass $\pi P^n(\cos\gamma)$ in

$$2\int_0^\theta \frac{\cos\psi}{\sqrt{\theta^2-\psi^2}}\,d\psi$$

übergeht, — und dieser Ausdruck stimmt mit $\pi J(\theta)$ im Handbuche S. 184 überein.

*Im dritten Falle* endlich, für $h = 0$, $n = \infty$, hat man aus (*a.*)

$$P^n(\cos\gamma) = \frac{2}{\pi}\int_0^\theta \frac{d\psi}{\sqrt{\theta^2-\psi^2}} = 1.$$

Halle a. S., September 1880.

# Sur l'intégrale *Euléri*enne de seconde espèce.

(Extrait d'une lettre adressée à M. *Schwarz* de Goettingue par M. *Ch. Hermite.*)

---

Dans son beau travail sur la fonction $\Gamma(x)$ (Tome 82 de ce Journal, page 165), M. *Prym* a obtenu l'expression de cette transcendante par la somme des deux fonctions suivantes:

$$P(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{1.2(x+2)} - \cdots.$$

$$Q(x) = \int_1^\infty \xi^{x-1} e^{-\xi} d\xi = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots,$$

qui sont uniformes et dont la seconde est holomorphe dans toute l'étendue du plan. Ce résultat si important peut se tirer immédiatement de l'équation:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty \xi^{x-1} e^{-\xi} d\xi,$$

bien qu'elle soit restreinte au cas où la variable ou sa partie réelle est essentiellement positive.

Faisons en effet en désignant par $a$ une constante positive quelconque:

$$\Gamma(x) = \int_0^a \xi^{x-1} e^{-\xi} d\xi + \int_a^\infty \xi^{x-1} e^{-\xi} d\xi;$$

il est d'abord évident que la seconde intégrale possède une seule et unique détermination pour toute valeur $x = \alpha + i\beta$, qui reste finie, tant que $\alpha$ n'est pas infini. C'est ce qui résulte de l'expression:

$$\int_a^\infty \xi^{x-1} e^{-\xi} d\xi = \int_a^\infty \xi^{\alpha-1} e^{-\xi} \cos(\log \xi^\beta) d\xi + i\int_a^\infty \xi^{\alpha-1} e^{-\xi} \sin(\log \xi^\beta) d\xi,$$

où le logarithme portant sur la quantité positive $\xi^\beta$ est pris dans le sens arithmétique. Quant à la première intégrale, dans laquelle il est nécessaire de conserver la restriction relative à la variable, elle donne naissance à une fonction uniforme dans toute l'étendue du plan. Il suffit en effet de

remplacer l'exponentielle par son développement en série, pour en conclure:

$$\int_0^a \xi^{x-1} e^{-\xi} d\xi = \left[\frac{1}{x} - \frac{a}{x+1} + \frac{a^2}{1.2(x+2)} - \cdots\right] a^x$$

et obtenir la partie fractionnaire ou méromorphe de $\Gamma(x)$, qui met en évidence les pôles $x = 0, -1, -2$, etc. On voit de plus que les numérateurs des fractions partielles se réduisent à des constantes et donnent pour les résidus, les valeurs déterminées par M. *Prym*, si l'on fait $a = 1$. Cet exemple du passage d'une expression donnée par une intégrale definie dans une portion du plan à une fonction analytique, n'est pas le seul qu'offre la théorie des intégrales *Eulér*iennes. Dans les éléments, on tire de la formule

$$D_x^2 \log \Gamma(x) = -\int_{-\infty}^0 \frac{\xi e^{\xi x}}{1-e^{\xi}} d\xi,$$

où la partie réelle de la variable est essentiellement positive, la fonction uniforme:

$$D_x^2 \log \Gamma(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \cdots,$$

en employant le développement en série:

$$\frac{1}{1-e^{\xi}} = 1 + e^{\xi} + e^{2\xi} + \cdots.$$

On sait d'ailleurs depuis *Riemann* que l'extension obtenue ne peut se faire que d'une seule manière. Soit maintenant

$$\mathfrak{P}(x) = \int_0^a \xi^{x-1} e^{-\xi} d\xi, \quad \mathfrak{Q}(x) = \int_a^\infty \xi^{x-1} e^{-\xi} d\xi,$$

de sorte qu'on ait les fonctions $P(x)$ et $Q(x)$ de M. *Prym*, en faisant $a = 1$. Nous ne connaissons, sous forme explicite, que la première de ces deux quantités, par la formule

$$\mathfrak{P}(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{a}{x+1} + \frac{a^2}{1.2(x+2)} - \cdots\right) a^x;$$

j'ai essayé, comme vous allez voir, d'obtenir aussi la fonction holomorphe $\mathfrak{Q}(x)$. Soit à cet effet:

$$\mathfrak{Q}_n = \int_{a+n}^{a+n+1} \xi^{x-1} e^{-\xi} d\xi;$$

nous aurons:

$$\mathfrak{Q}(x) = \mathfrak{Q}_0 + \mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_2 + \cdots$$

et la convergence de la série est manifeste, l'intégrale définie $\mathfrak{Q}_n$ et le reste

$\int_{a+n+1}^{\infty} \xi^{x-1} e^{-\xi} d\xi$ décroissant rapidement lorsque $n$ augmente. Cela posé, la substitution $\xi = a+n+\zeta$ donnant:

$$\mathfrak{Q}_n = e^{-a-n}\int_0^1 (a+n+\zeta)^{x-1} e^{-\zeta} d\zeta,$$

j'observe qu'entre les limites $\zeta = 0$, $\zeta = 1$, la quantité $(a+n+\zeta)^{x-1}$ sera développable pour toute valeur réelle ou imaginaire de l'exposant en série convergente, même dans le cas où $n = 0$, si l'on suppose $a > 1$. En employant la fonction $P(x)$ il vient ainsi:

$$\mathfrak{Q}(x) = e^{-a-n}\Big[P(1)(a+n)^{x-1} + \frac{x-1}{1} P(2)(a+n)^{x-2} + \frac{(x-1)(x-2)}{1.2} P(3)(a+n)^{x-3} + \cdots\Big],$$

et si nous faisons pour abréger

$$R(x) = \frac{a^x}{e^a} + \frac{(a+1)^x}{e^{a+1}} + \frac{(a+2)^x}{e^{a+2}} + \cdots$$

on en conclut l'expression suivante:

$$\mathfrak{Q}(x) = P(1)R(x-1) + \frac{x-1}{1} P(2)R(x-2) + \frac{(x-1)(x-2)}{1.2} P(3)R(x-3) + \cdots.$$

Cette suite $R(x)$ à laquelle nous nous trouvons amené définit une fonction holomorphe dans tout le plan. Elle met en évidence cette propriété, qu'en posant

$$F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots$$

on a:

$$A_0 R(x) + z A_1 R(x-1) + z^2 A_2 R(x-2) + \cdots$$
$$= \frac{a^x}{e^a} F\Big(\frac{z}{a}\Big) + \frac{(a+1)^x}{e^{a+1}} F\Big(\frac{z}{a+1}\Big) + \frac{(a+2)^x}{e^{a+2}} F\Big(\frac{z}{a+2}\Big) + \cdots.$$

Soit par exemple $F(x) = (1+x)^\lambda$, nous obtenons l'équation:

$$R(x) + z\frac{\lambda}{1} R(x-1) + z^2 \frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2} R(x-2) + \cdots$$
$$= \frac{a^{x-\lambda}(z+a)^\lambda}{e^a} + \frac{(a+1)^{x-\lambda}(z+a+1)^\lambda}{e^{a+1}} + \cdots,$$

et en supposant en particulier: $z = 1$, $\lambda = x$, celle-ci:

$$R(x) + xR(x-1) + \frac{x(x-1)}{1.2} R(x-2) + \cdots$$
$$= \frac{(a+1)^x}{e^a} + \frac{(a+2)^x}{e^{a+1}} + \frac{(a+3)^x}{e^{a+3}} + \cdots$$
$$= e\Big[R(x) - \frac{a^x}{e^a}\Big].$$

On tire deux remarques de cette relation; elle montre, en premier lieu, que la série du premier membre ayant, pour toute valeur de $x$, une somme finie, il en est de même de la suite qu'on obtient en multipliant ses termes par les quantités positives et décroissantes, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, etc. Mais de là résulte l'expression de $\mathfrak{Q}(x+1)$ sous forme d'une série dont la convergence est ainsi reconnue à posteriori.

En second lieu nous en déduisons facilement la propriété caractéristique de la fonction $\mathfrak{Q}(x)$ donnée par l'équation:

$$\mathfrak{Q}(x+1) = x\mathfrak{Q}(x)+\frac{a^x}{e^a}.$$

On a en effet

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q}(x+1)-x\mathfrak{Q}(x) &= P(1)R(x)\\ &+x[P(2)-P(1)]R(x-1)\\ &+\frac{x(x-1)}{1.2}[P(3)-2P(2)]R(x-2)\\ &+\cdots.\end{aligned}$$

Maintenant l'équation de M. *Prym:*

$$P(x+1) = xP(x)-\frac{1}{e}$$

permet d'écrire le second membre, sous cette forme:

$$P(1)R(x)-\frac{1}{e}\left[xR(x-1)+\frac{x(x-1)}{1.2}R(x-2)+\cdots\right];$$

il se réduit donc à l'expression:

$$P(1)R(x)-\frac{1}{e}\left[(e-1)R(x)-\frac{a^x}{e^{a-1}}\right],$$

ce qui est précisément $\frac{a^x}{e^a}$ puisque l'on a:

$$P(1) = \int_0^1 e^{-\xi}d\xi = 1-\frac{1}{e}.$$

Je n'ai pas été plus loin jusqu'ici dans l'étude des beaux résultats découverts par M. *Prym,* et il ne m'a pas été possible d'obtenir l'expression sous forme explicite de $Q(x)$, autrement que par l'égalité:

$$P(x)+Q(x) = \mathfrak{P}(x)+\mathfrak{Q}(x)$$

d'où l'on tire:

$$Q(x) = \mathfrak{Q}(x)+\mathfrak{P}(x)-P(x),$$

c'est-à-dire:

$$Q(x) = \mathfrak{Q}(x) + \frac{a^x - 1}{x} - \frac{a^{x+1} - 1}{x+1} + \frac{a^{x+2} - 1}{1.2(x+2)} - \cdots.$$

Mais voici en terminant, une démonstration immédiate qu'on peut encore en tirer de la proposition de M. *Weierstrass* que $\frac{1}{\Gamma(x)}$ est une fonction holomorphe. C'est ce qu'a fait voir M. *Bourguet* dans une thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris, en partant de la relation

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

On en conclut en effet:

$$\frac{1}{\Gamma(1-x)} = \frac{\sin \pi x}{\pi}\Gamma(x)$$
$$= \frac{\sin \pi x}{\pi}\left[P(x) + Q(x)\right]$$

et il est manifeste que le second membre est holomorphe, tous les pôles disparaissant dans le produit $\frac{\sin \pi x}{\pi}P(x)$.

---

## Postscriptum.

La formule élémentaire

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -C + \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1}\right) + \cdots$$

montre au moyen de la méthode de *Plana*, que l'équation $\Gamma'(x) = 0$ n'a pas de racines imaginaires, et qu'en outre de la racine positive, déterminée par *Legendre:* $x = 1{,}4636321\ldots$, elle en possède une infinité d'autres toutes négatives, et comprises successivement entre 0 et $-1$, $-1$ et $-2$, [redacted] etc. Il est facile de prouver comme vous allez voir, que les valeurs de la variable auxquelles correspondent ainsi les minima de la valeur absolue de la fonction tendent de plus à se rapprocher des pôles. Partons, à cet effet, de l'équation:

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \frac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)} = -\pi \cot g\, \pi x,$$

et soit pour une grande valeur du nombre entier $n$, $x = -n+\xi$, la racine de l'équation $\Gamma'(x) = 0$, comprise entre $-n+1$ et $-n$. On en tirera pour déterminer $\xi$, la condition

$$\frac{\Gamma'(n+1-\xi)}{\Gamma(n+1-\xi)} = \pi \operatorname{cotg} \pi \xi.$$

Employons maintenant l'expression approchée:

$$\log \Gamma(x+1) = (x+\tfrac{1}{2}) \log x - x + \log \sqrt{2\pi},$$

elle deviendra:

$$\log(n-\xi) + \frac{1}{2(n-\xi)} = \pi \operatorname{cotg} \pi \xi,$$

et en négligeant les quantités de l'ordre $\frac{1}{n}$:

$$\log n = \pi \operatorname{cotg} \pi \xi.$$

On en conclut:

$$\xi = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc tg} \frac{\pi}{\log n}$$

et plus simplement

$$\xi = \frac{1}{\log n},$$

de sorte que les racines de rang éloigné de l'équation $\Gamma'(x) = 0$ sont à fort peu près: $x = -n + \frac{1}{\log n}\cdot$ Ce résultat jette quelque jour sur la marche de la fonction holomorphe de M. *Weierstrass* $\frac{1}{\Gamma(x)}$, pour les valeurs réelles de la variable. Si la loi de succession est régulière et fort simple, quand la variable croît positivement de zéro à l'infini, la fonction partant de zéro, atteignant un maximum 0,671... et décroissant ensuite rapidement, il n'en est plus de même lorsqu'on considère la série des valeurs négatives, et l'on observe alors des changements brusques de la fonction. Calculons en effet, au moyen de la relation:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

le maximum de la valeur absolue de $\frac{1}{\Gamma(x)}$ pour $x = -n+\xi$; on trouve:

$$\frac{1}{\Gamma(-n+\xi)} = \frac{(-1)^n \sin \pi \xi}{\pi} \Gamma(n+1-\xi)$$

et d'une manière approchée:

$$\frac{1}{\Gamma(-n+\xi)} = \frac{(-1)^n}{\log n} \Gamma\left(n+1-\frac{1}{\log n}\right).$$

Cette expression des maxima augmente avec $n$, avec une extrême rapidité, il en résulte que dans l'intervalle indéfiniment décroissant compris entre $x=-n+\xi$ et $x=-n$, la fonction passe brusquement d'une valeur de plus en plus grande, positive ou négative, à zéro. Le calcul des coefficients numériques du développement de $\frac{1}{\Gamma(x)}$ suivant les puissances croissantes de la variable, que M. *Bourguet* a exécuté avec le plus grand soin*), a révélé des singularités signalées avec raison par l'auteur, et qu'on doit peut-être rapprocher des circonstances dont je viens de parler.

Enfin je remarque, en terminant, que si l'on pose:

$$\mathfrak{Q}_n = \int_{na}^{(n+1)a} \xi^{x-1} e^{-\xi} d\xi \quad \text{au lieu de} \quad \mathfrak{Q}_n = \int_{a+n}^{a+n+1} \xi^{x-1} e^{-\xi} d\xi,$$

comme je l'ai d'abord fait, la substitution: $\xi = na+\zeta$ conduit à l'expression suivante:

$$\mathfrak{Q}_n = e^{-na}\int_0^a (na+\zeta)^{x-1} e^{-\zeta} d\zeta,$$

et en employant la fonction $\mathfrak{P}(x)$ on en conclut:

$$\mathfrak{Q}_n = e^{-na}\left[\mathfrak{P}(1)(na)^{x-1} + \frac{x-1}{1}\mathfrak{P}(2)(na)^{x-2} + \frac{(x-1)(x-2)}{1.2}\mathfrak{P}(3)(na)^{x-3} + \cdots\right].$$

Faisant donc:

$$\mathfrak{R}(x) = \frac{a^x}{e^a} + \frac{(2a)^x}{e^{2a}} + \frac{(3a)^x}{e^{3a}} + \cdots$$

nous aurons cette nouvelle expression:

$$\mathfrak{Q}(x) = \mathfrak{P}(1)\mathfrak{R}(x-1) + \frac{x-1}{1}\mathfrak{P}(2)\mathfrak{R}(x-2) + \frac{(x-1)(x-2)}{1.2}\mathfrak{P}(3)\mathfrak{R}(x-3) + \cdots.$$

Les coefficients $\mathfrak{P}(1)$, $\mathfrak{P}(2)$, ... se tirent de proche en proche, au moyen de l'équation:

$$\mathfrak{P}(x+1) = x\mathfrak{P}(x) - \frac{e^{ax}}{a},$$

du premier

$$\mathfrak{P}(1) = 1 - \frac{1}{e^a},$$

et cette équation est une conséquence immédiate, il n'est pas inutile de l'observer, de la formule:

$$\mathfrak{P}(x) = \left[\frac{1}{x} - \frac{a}{x+1} + \frac{a^2}{1.2(x+2)} - \cdots\right] a^x.$$

*) Développement en série des intégrales *Eulér*iennes. Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris; Paris, Gauthier-Villars.

Paris, 15 janvier 1881.

# Inhaltsverzeichniss der Bände 81 bis 90.

## G. Cantor in Halle a. S.



## F. Caspary.



## A. Cayley in Cambridge.



## R. Clausius in Bonn.



## Thomas Craig in Washington.



## R. Dedekind in Braunschweig.



## G. Erdmann.



## Faà de Bruno in Turin.



## Franke in Dessau.

## G. Frobenius in Zürich.



## L. Fuchs in Heidelberg.



## E. Fürstenau.



## Geiser in Zürich.



## W. Godt in Lübeck.



## Graefe in Bern.

## Hermann Günther Grassmann †.



## S. Gundelfinger in Darmstadt.



## Hamburger.



## J. N. Hazzidakis in Athen.



## E. Heine in Halle a. S.



## Hermes in Königsberg i. Pr.



## Ch. Hermite in Paris.

## W. Killing in Brilon.



## G. Kirchhoff.



## L. Königsberger in Wien.



## D. J. Korteweg in Breda in Holland.



## Kostka in Insterburg.



## E. Laguerre in Paris.



## E. Lampe.



## Lindemann in Freiburg i. Br.

### J. Rosanes in Breslau.



### O. Röthig.



### Schady.



### Leopold Schendel in Tokio.



### Karl Schering in Göttingen.



### Schönemann †.



### F. Schottky in Breslau.



### Ernst Schröder in Karlsruhe.



### H. Schröter in Breslau.



### Hermann Schubert in Hamburg.



### H. A. Schwarz in Göttingen.

## C. Weierstrass.



## J. Weingarten.



## Christian Wiener in Karlsruhe.



## Zincken s. Sommer.

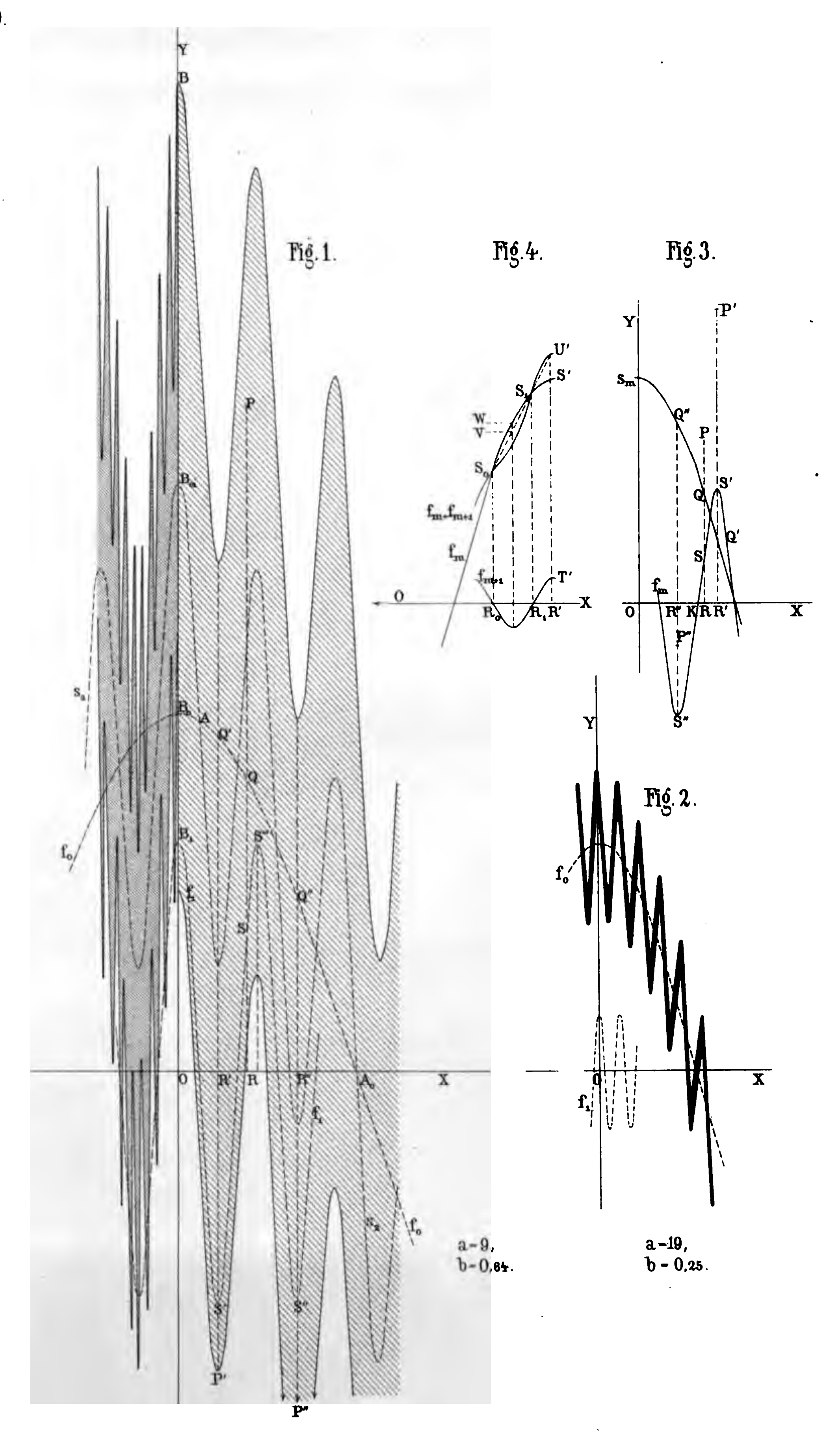
---

Sturm: ebene Curven dritter Ordnung

Fig. 2.

Fig. 7.

Fig. 8.


Fig. 1.
Fig. 4.
Fig. 3.
Fig. 2.
a = 9,
b = 0,64.
a = 19,
b = 0,25.

